Algebra Lineare
(parte I)

by **www.extrabyte.info**

Indice

Parte I

Spazi vettoriali

Capitolo 1

Matrici e determinanti

1.1 Definizione di matrice

Una **matrice** è un array (aggregato) di $m \times n$ elementi disposti per n righe e m colonne. Scriviamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

A volte si utilizza la seguente notazione simbolica:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con } i = 1, ..., n; \; j = 1, ..., m$$

Gli elementi a_{ij} possono essere numeri (o funzioni) reali o complessi.
Se $m = n$ si dice che A è una matrice quadrata di ordine n. Ad es.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A è una matrice quadrata di ordine 2.

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cosh t & -5e^{t} \\ 2\sin t & e^{-2t} \\ -\sqrt{2}\sinh t & 10\sin t \end{pmatrix}$$

B è una matrice 3×2 i cui elementi sono funzioni del tempo t.

1.2 Classificazione delle matrici

Consideriamo una matrice $A\,(m \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Si definisce **matrice trasposta** di A e si indica con A^T la matrice $(m \times n)$ ottenuta da A scambiando le righe per le colonne:

$$\begin{aligned} A^T &= (b_{ij}) = (a_{ji}) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ad esempio, la trasposta della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

è:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

***

Consideriamo la matrice quadrata di ordine n:

$$A = (a_{ij}), \text{ con } i, j = 1, 2, ..., n$$

Abbiamo la seguente definizione:

$$\forall i > j, \;\; a_{ij} = 0) \overset{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{triangolare alta} \tag{1.3}$$

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Viceversa:

$$\forall i < j, \;\; a_{ij} = 0) \overset{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{triangolare bassa} \tag{1.5}$$

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Nel caso speciale in cui la matrice quadrata di ordine n, $A = (a_{ij})$ è simultaneamente alta e bassa, si ha:

$$\forall i \neq j, \;\; a_{ij} = 0) \stackrel{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{diagonale} \tag{1.7}$$

La (1.7) implica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

e viene indicata con la notazione simbolica:

$$A = diag\,(a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}) \tag{1.9}$$

Se $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = k$, la matrice si dice **scalare**, e per $k = 1$, la (1.9) è la matrice **identità di ordine** n:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 \end{pmatrix} = diag\,(1, 1, 1, ..., 1) \tag{1.10}$$

Quando non è rilevante l'ordine n della matrice, la matrice identità si indica semplicemente con I.

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

$$A = A^T \stackrel{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{simmetrica} \tag{1.11}$$
$$A = -A^T \stackrel{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antisimmetrica}$$

Cioè, rispettiavamente:

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}\,, \;\; a_{ij} = a_{ji} \tag{1.12}$$
$$\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}\,, \;\; a_{ij} = -a_{ji}$$

Esempi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

La (1.13) è simmetrica:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= A$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

La (1.14) è antisimmetrica:

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -B$$

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n sul campo complesso $\mathbb{C}$, cioè $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Si definisce **matrice coniugata di** A, la matrice quadrata di ordine n i cui elementi sono i complessi coniugati degli elementi di A:

$$A^* \stackrel{def}{=} (a_{ij}^*)$$

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4+5i & -3i \\ 2 & 2-\sqrt{3}i \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 4-5i & 3i \\ 2 & 2+\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

Sussiste la proprietà:

$$(A^*)^* = A$$

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n sul campo complesso $\mathbb{C}$. Abbiamo le seguenti definizioni:

$$(A^*)^T = A \stackrel{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{hermitiana} \tag{1.15}$$
$$(A^*)^T = -A \stackrel{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antihermitiana}$$

Cioè, rispettivamente:

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\,,\, a_{ji}^* = a_{ij}) \overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{hermitiana}$$
$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\,,\, a_{ji}^* = -a_{ij}) \overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antihermitiana}$$

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Passando alla trasposta della coniugata:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$= A,$$

donde A è hermitiana.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Passando alla trasposta della coniugata:

$$(B^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1+i & -2 \\ 1+i & -3i & -i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -B,$$

donde B è antihermitiana.

1.3 Operazioni elementari sulle matrici

1.3.1 Somma e differenza di matrici

Sian $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ con $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ...n$. Si definisce **somma** di A e B, la matrice $m \times n$:

$$A + B = (c_{ij})\,, \tag{1.16}$$

essendo:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{1.17}$$

La **differenza** $A - B$ è la somma $A + (-B)$, essendo $-B = (-b_{ij})$. Quindi:

$$A-B=(d_{ij}),$$

con

$$d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$$

Esempio.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -9 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A-B=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

Consideriamo le matrici $A\,(n\times m)$ e $B\,(m\times p)$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

che possono essere indicate con la notazione compatta:

$$A=(a_{ij}),\ i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m$$
$$B=(b_{ij}),\ i=1,2,...m;\ j=1,2,...,p$$

Si definisce **matrice prodotto righe per colonne** e si indica con AB, la matrice $n\times p$:

$$AB=(c_{ij}),\ i=1,2,...n;\ j=1,2,...,p \tag{1.19}$$

essendo:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj} \tag{1.20}$$

Esempio 1 *Date le matrici:*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice AB.

Soluzione 2 *Abbiamo* $A\,(3\times 3)$, $B\,(3\times 4)$, *quindi* $AB\,(3\times 4)$. *Applicando la (1.20):*

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ciò premesso, sussiste il

Teorema 3 *Siano* $A\,(n\times m)$ *e* $B\,(m\times p)$. *Risulta:*

$$(AB)^T=B^TA^T \tag{1.21}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\begin{aligned} A&=(a_{ij}) \text{ con } i=1,...,n;\ j=1,...,m \\ B&=(b_{ij}) \text{ con } i=1,...,m;\ j=1,...,p \end{aligned}$$

Indichiamo con un apice gli elementi di matrice delle rispettive trasposte:

$$\begin{aligned} A^T&=\left(a'_{ij}\right) \text{ con } a'_{ij}=a_{ji} \\ B^T&=\left(b'_{ij}\right) \text{ con } b'_{ij}=b_{ji} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Il prodotto di A e B:

$$AB=(c_{ij}) \text{ con } c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj} \tag{1.23}$$

la cui trasposta è

$$(AB)^T=\left(c'_{ij}\right) \text{ con } c'_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}b_{ki} \tag{1.24}$$

Il prodotto di B^T e A^T:

$$B^TA^T=\left(c''_{ij}\right) \text{ con } c''_{ij}=\sum_{k=1}^{m}b'_{ik}a'_{kj} \tag{1.25}$$

Per le (1.22):

$$c''_{ij}=\sum_{k=1}^{m}b_{ki}a_{jk}=c'_{ij}\Longrightarrow B^TA^T=(AB)^T,$$

donde l'asserto. ■

Teorema 4 *Se* A *è una matrice quadrata di ordine* n, *la matrice* $A+A^T$ *è simmetrica.*

Dimostrazione. Poniamo $A=(a_{ij})$ con $i,j=1,2,...,n$. Quindi, $A^T=(a_{ji})$; la somma è:

$$A+A^T=(\alpha_{ij}),$$

essendo:

$$\alpha_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$$

Risulta:

$$\alpha_{ji}=\alpha_{ij}, \forall i,j=1,2,...,n$$

donde la simmetria di $A+A^T$. ■

Teorema 5 *Se A è una matrice quadrata di ordine n, la matrice $A - A^T$ è antisimmetrica.*

Dimostrazione. Poniamo $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$. Quindi, $A^T = (a_{ji})$; la differenza è:

$$A - A^T = (\beta_{ij}),$$

essendo:

$$\beta_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$$

Risulta:

$$\beta_{ji} = -\beta_{ij}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

donde l'antisimmetria di $A - A^T$. ■

Corollario 6 *Ogni matrice quadrata si esprime come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.*

Dimostrazione. Sia $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$. Il generico elemento di matrice può scriversi:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ji} - \frac{1}{2}a_{ji} \\ &= \frac{1}{2}a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ji} - \frac{1}{2}a_{ji} \\ &= \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \end{aligned} \tag{1.26}$$

La (1.26) implica:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)}_{\text{antisimmetrica}},$$

donde l'asserto. ■

Definizione 7 *Se A è una matrice quadrata, diremo che A è* **ortogonale** *se:*

$$AA^T = A^T A = I, \tag{1.27}$$

essendo A^T la matrice trasposta di A. In altri termini, la matrice A è ortogonale se l'inversa (per tale definizione vedere § 1.8) coincide con la trasposta:

$$A^{-1} = A^T \tag{1.28}$$

Definizione 8 *Se A è una matrice quadrata di ordine n e se $p \in \mathbb{N}$, la potenza p-esima di A è:*

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{p \text{ volte}}$$

Definizione 9 *Se A è una matrice quadrata di ordine n si dice che A è* **idempotente**, *se:*

$$A^2 = A$$

Definizione 10 *Se A è una matrice quadrata di ordine n e se $p \in \mathbb{N}$, si dice che A è* **nilpotente di ordine** *p, se:*

$$A^p = 0$$

Teorema 11 *Se A è nilpotente di ordine p, ogni intero $p' > p$ è ordine di nilpotenza per A.*

Dimostrazione.

$$\forall p' > p, \quad A^{p'} = A^p A^{p'-p} = 0 \cdot A^{p'-p} = 0$$

■

Teorema 12 *A è nilpotente di ordine $p = 2) \Longrightarrow (\forall s \in \mathbb{N},\ A(I \pm A)^s = A$*

Dimostrazione. La dimostrazione segue per calcolo diretto:

$$\begin{aligned}
&s = 1 \Longrightarrow A(I \pm A) = A \pm A^2 = A \\
&s = 2 \Longrightarrow A(I \pm A)^2 = A \pm 2A^2 + A^3 = A \\
&... \\
&s = s \Longrightarrow A(I \pm A)^s = A
\end{aligned}$$

■

***

Assegnate due matrici quadrate dello stesso ordine $A(n \times n)$, $B(n \times n)$, si osservi che in generale il prodotto righe per colonne non è commutativo, cioè:

$$AB \neq BA$$

Se risulta:

$$AB = BA$$

si dice che A e B **commutano** o che il prodotto AB è **commutativo.**
Se risulta:

$$AB = -BA$$

si dice che A e B **anticommutano** o che il prodotto AB è **anticommutativo.**
Possiamo poi considerare la potenza *k-sima* di una matrice quadrata:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k \text{ volte}}$$

Si consideri ad esempio, la matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che il prodotto $A^2 \cdot A$ è commutativo:

$$A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} = A^2 \cdot A$$

Determiniamo A^5:

$$A^5 = A^2 A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 39 & -41 & -21 \\ 62 & -33 & 20 \\ 41 & -31 & -2 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $A^2 A^3$ è commutativo:

$$A^3 A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 39 & -41 & -21 \\ 62 & -33 & 20 \\ 41 & -31 & -2 \end{pmatrix} = A^2 A^3$$

1.4 Determinanti

Abbiamo visto che una matrice è un array di $m \times n$ numeri. Nel caso speciale di una matrice quadrata:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

è possibile associare a tale array un numero, che si chiama **determinante** della matrice e si indica con il simbolo $\det A$,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Per $n = 1$, si pone per definizione:

$$\det A \overset{def}{=} a_{11}$$

Per definire $\det A$ nel caso $n \geq 2$, dobbiamo introdurre la nozione di **prodotto associato** alla matrice (1.29). A tale scopo chiediamoci se sia possibile prendere tra gli n^2 elementi di A, un sottoinsieme S costituito da n elementi tali che:

$$\forall a_{ij}, a_{hk} \in S, \quad (i \neq h, j \neq k)$$

cioè due qualunque elementi di S non appartengono nè alla stessa riga, nè alla stessa colonna. Quindi il sottoinsieme deve essere del tipop:

$$S = \{a_{h_1 k_1}, a_{h_2 k_2}, ..., a_{h_n k_n}\}$$

con h_i, k_i tali che:

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}, \, i \neq j \Longrightarrow (h_i \neq h_j, k_i \neq k_j)$$

Cioè

$$\begin{aligned} &h_1, h_2, ..., h_n \\ &k_1, k_2, ..., k_n \end{aligned} \tag{1.30}$$

sono permutazioni arbitrarie (distinte o coincidenti) degli elementi $1, 2, 3, ..., n$.
Ad esempio, per $n = 5$ consideriamo:

$$(h_1, h_2, ..., h_n) = (4, 2, 1, 3, 5)$$
$$(k_1, k_2, ..., k_n) = (2, 4, 3, 1, 5)$$

ottenendo:

$$S = \{a_{42}, a_{24}, a_{13}, a_{31}, a_{55}\} \tag{1.31}$$

Quindi, gli elementi dell'insieme (1.31) soddisfano la condizione richiesta.
Siano ora h e k le inversioni della prima e seconda delle (1.30), rispettivamente. Il prodotto associato alla matrice quadrata (1.29) è per definizione:

$$(-1)^{h+k} \, a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} ... a_{h_n k_n}$$

Si osservi che:

$$(-1)^{h+k} = +1, \;\; \text{se } h + k \text{ è pari}$$
$$(-1)^{h+k} = -1, \;\; \text{altrimenti}$$

Inoltre $h + k$ è pari se h, k hanno la medesima parità, cioè se le due permutazioni sono della stessa classe. Viceversa, se $h + k$ è dispari.
Per $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Abbiamo i seguenti sottoinsiemi:

$$a_{11}, a_{22}$$
$$a_{12}, a_{21}$$

e i relativi prodotti associati:

$$+ \, a_{11} a_{21}$$
$$- \, a_{21} a_{22}$$

Da ciò segue che per ottenere tutti i prodotti associati basta tenere fisso uno degli indici h_i, k_i, facendo variare l'altro in tutti i modi possibili, per cui il numero di prodotti associati ad una matrice di ordine n, è pari a $n!$ Ad esempio, per $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

abbiamo $3! = 6$ prodotti associati. Infatti gli insiemi sono:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}$$
$$a_{12}, a_{21}, a_{33}$$
$$a_{13}, a_{21}, a_{32}$$
$$a_{13}, a_{23}, a_{31}$$
$$a_{11}, a_{23}, a_{32}$$
$$a_{11}, a_{23}, a_{32}$$

Nel caso generale, il determinante di A è la somma degli $n!$ prodotti associati. Per eseguire la somma si può fissare la *n-pla* $h_1, h_2, ..., h_n$, per poi variare in tutti i modi possibili $k_1, k_2, ..., k_n$, o viceversa. Abbiamo quindi:

$$\det A = (-1)^h \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k \, a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} ... a_{h_n k_n} \tag{1.32}$$
$$\det A = (-1)^k \sum_{h_1 h_2 ... h_n} (-1)^h \, a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} ... a_{h_n k_n}$$

Nel caso speciale in cui $(h_1, h_2, ..., h_n) = (1, 2, ..., n)$, la prima delle (1.32) diventa ($h = 0$):

$$\det A = \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k \, a_{1 k_1} a_{2 k_2} ... a_{n k_n} \tag{1.33}$$

Nel caso speciale in cui $(k_1, k_2, ..., k_n) = (1, 2, ..., n)$, la seconda delle (1.32) diventa ($k = 0$):

$$\det A = \sum_{h_1 h_2 ... h_n} (-1)^h \, a_{h_1 1} a_{h_2 2} ... a_{h_n n} \tag{1.34}$$

Ad esempio, per $n = 3$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

Per $n = 4$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{24}a_{43} \\ &+ a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} - a_{11}a_{42}a_{24}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} + a_{21}a_{12}a_{34}a_{43} \\ &+ a_{21}a_{32}a_{13}a_{44} - a_{21}a_{32}a_{14}a_{43} - a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} + a_{21}a_{42}a_{14}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23}a_{44} \\ &- a_{31}a_{12}a_{24}a_{43} - a_{31}a_{22}a_{13}a_{44} + a_{31}a_{22}a_{14}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} \\ &- a_{31}a_{42}a_{14}a_{23} - a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} + a_{41}a_{12}a_{24}a_{33} + a_{41}a_{22}a_{13}a_{34} \\ &- a_{41}a_{22}a_{14}a_{33} - a_{41}a_{32}a_{13}a_{24} + a_{41}a_{32}a_{14}a_{23} \end{aligned}$$

Da ciò segue che al crescere di n, aumenta la complessità del calcolo diretto del determinante. Fortunatamente esistono teoremi che riducono tale complessità di calcolo.

Teorema 13 *Se A è una matrice quadrata di ordine n:*

$$\det A = \det A^T$$

Dimostrazione. Siano:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a'_{11} & ... & a'_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a'_{n1} & ... & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Per definizione di matrice trasposta:

$$a'_{hk} = a_{kh} \tag{1.35}$$

Il determinante di A:

$$\det A = \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k \, a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n}$$

Per la (1.35):

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k \, a'_{k_1 1} a'_{k_2 2} ... a'_{k_n n} \\ &= \det A^T \end{aligned}$$

■

Teorema 14 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se negli indici di riga eseguiamo la sostituzione:*

$$(1, 2, ..., n) \rightarrow (h_1, h_2, ..., h_n) \tag{1.36}$$

otteniamo una nuova matrice quadrata di ordine n, che indichiamo con A'. Risulta:

$$\det A' = (-1)^h \det A,$$

essendo h il numero di inversioni della sostituzione (1.36).

Dimostrazione. Poniamo $A' = (a'_{hk})$:

$$a'_{1r} = a_{h_1 r}, a'_{2r} = a_{h_2 r}, ..., a'_{nr} = a_{h_n r} \quad \text{con } r = 1, 2, ..., n$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k \, a'_{1k_1} a'_{2k_2} ... a'_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k \, a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} ... a_{h_n k_n} \\ &= (-1)^h \det A \end{aligned}$$

■

Ad esempio, consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Eseguiamo la sostituzione degli indici di riga:

$$(1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2) \tag{1.37}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &a'_{11} = a_{31},\ a'_{21} = a_{11},\ a_{31} = a_{21} \\ &a'_{21} = a_{11},\ a'_{22} = a_{12}\ a'_{23} = a_{13} \\ &a'_{31} = a_{21},\ a'_{32} = a_{22},\ a'_{33} = a_{23} \end{aligned}$$

Da cui:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Si osservi che la sostituzione (1.37) presenta due inversioni, quindi $h = 2$. Il determinante di A' è:

$$\det A' = (-1)^2 \det A = \det A$$

In maniera analoga si dimostra il seguente

Teorema 15 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se negli indici di colonna eseguiamo la sostituzione:*

$$(1, 2, ..., n) \rightarrow (k_1, k_2, ..., k_n) \tag{1.38}$$

otteniamo una nuova matrice quadrata di ordine n, che indichiamo con A'. Risulta:

$$\det A' = (-1)^k \det A,$$

essendo k il numero di inversioni della sostituzione (1.38).

I due teoremi precedenti si specializzano nel seguente:

Teorema 16 *Un determinante inverte il proprio segno se si scambiano due righe o due colonne.*

Dimostrazione. Poniamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.39}$$

Senza ledere la generalità, scambiamo la prima riga con la seconda, ottenendo:

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.40}$$

Si osservi che (1.40) si ottiene da (1.39) attraverso la sostituzione di indici di riga:

$$(1, 2, ..., n) \rightarrow (2, 1, ..., n)$$

Tale sostituzione ha $h = 1$ inversioni. Per i teoremi precedenti:

$$\det A' = -\det A$$

In maniera analoga si dimostra che

$$\det A'' = -\det A,$$

essendo $\det A''$ il determinante ottenuto da (1.39) scambiando la prima con la seconda colonna. ■

Teorema 17 *Se in una matrice quadrata* $A\,(n \times n)$ *contiene due righe (o due colonne) identiche, segue che* $\det A = 0$.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se scambiamo la prima riga con la seconda otteniamo una matrice $A' = A$. Per il teorema precedente:

$$\det A' = -\det A$$

D'altro canto $A' = A$ implica:

$$\det A' = \det A$$

donde:

$$\det A = -\det A \Longrightarrow \det A = 0$$

cioè l'asserto. ■

Teorema 18 *Sia* $A\,(n \times n)$ *una matrice quadrata:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Moltiplicando la riga i-esima *per una costante* λ, *si ottiene la matrice*

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{i1} & a'_{i2} & ... & a'_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

essendo $a'_{ir} = \lambda a_{ir}$.
Ciò posto, i determinanti di A *e* A' *sono legati dalla relazione:*

$$\det A' = \lambda \det A$$

Dimostrazione. Nella (1.32) troviamo un fattore λ in ogni termine della sommatoria, donde:

$$\begin{aligned} \det A' &= \lambda (-1)^h \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} ... a_{h_n k_n} \\ &= \lambda \det A \end{aligned}$$

■
Da tale teorema segue che se gli elementi di una riga hanno un fattore comune λ, questo può essere posto fuori del determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Il teorema precedente si generalizza al caso della moltiplicazione di una costante per gli elementi di una colonna. Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorema 19 *Se in una matrice quadrata* $A\,(n \times n)$, *gli elementi di una riga (o di una colonna) sono tutti nulli, si ha* $\det A = 0$.

Dimostrazione. Per il teorema (18):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

donde l'asserto. ■

Teorema 20 *Se una matrice quadrata $A\,(n \times n)$ contiene due righe (o due colonne) proporzionali, allora è* $\det A = 0$.

Dimostrazione. Qui per "righe proporzionali" intendiamo:

$$\exists \lambda : a_{s1} = \lambda a_{r1}, \;\; a_{s2} = \lambda a_{r2}, ..., a_{sn} = \lambda a_{rn},$$

donde:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{r1} & \lambda a_{r2} & \dots & \lambda a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \lambda \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

■

1.5 Minori di una matrice

Consideriamo una matrice $A\,(m \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sia $p \in \mathbb{N} - \{0\} : p \leq \min\{m, n\}$. Quindi prendiamo p righe di indice $h_1 < h_2 < ... < h_p$, e p colonne di indici $k_1, k_2, ..., k_p$; in tal modo resta individuato il determinante:

$$a_{h_1 h_2 \dots h_p, k_1 k_2 \dots k_p} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{h_1 k_1} & a_{h_1 k_2} & \dots & a_{h_1 k_p} \\ a_{h_2 k_1} & a_{h_2 k_2} & \dots & a_{h_2 k_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h_p k_1} & a_{h_p k_2} & \dots & a_{h_p k_p} \end{vmatrix} \tag{1.41}$$

Il determinante (1.41) si chiama **minore di ordine** p della matrice A. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

Assumiamo:

$$h_1 = 1,\ h_2 = 2$$
$$k_1 = 2,\ k_2 = 3$$

Quindi:

$$a_{12,23} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},$$

che è un minore di ordine 2 della matrice (1.42).
Ora consideriamo il caso particolare di una matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Assegnati $p \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $h_1, h_2, ..., h_p, k_1, k_2, ..., k_p$ abbiamo il minore di ordine p :

$$a_{h_1 h_2 ... h_p, k_1 k_2 ... k_p} = \begin{vmatrix} a_{h_1 k_1} & a_{h_1 k_2} & ... & a_{h_1 k_p} \\ a_{h_2 k_1} & a_{h_2 k_2} & ... & a_{h_2 k_p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_p k_1} & a_{h_p k_2} & ... & a_{h_p k_p} \end{vmatrix} \tag{1.43}$$

Al tempo stesso resta definito il minore di ordine $n-p$:

$$a_{h_{p+1} h_{p+2} ... h_n, k_{p+1} k_{p+2} ... k_n} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{h_{p+1} k_{p+1}} & a_{h_{p+1} k_{p+2}} & ... & a_{h_n k_n} \\ a_{h_{p+2} k_{p+1}} & a_{h_{p+2} k_{p+2}} & ... & a_{h_n k_p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_n k_{p+1}} & a_{h_n k_{p+2}} & ... & a_{h_n k_n} \end{vmatrix} \tag{1.44}$$

Il minore (1.44) si chiama **minore complementare** del minore (1.43). Definiamo poi **complemento algebrico** o **aggiunto** o **cofattore** del minore (1.43):

$$a'_{h_1 h_2 ... h_p, k_1 k_2 ... k_p} = (-1)^{\sum_{r=1}^{p} h_r + \sum_{r=1}^{p} k_r} a_{h_{p+1} h_{p+2} ... h_n, k_{p+1} k_{p+2} ... k_n}$$

Esempi numerici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12 \\ -4 & 2 & 3 \\ 9 & -6 & 14 \end{pmatrix}$$

Poniamo: $h_1 = 1, h_2 = 2$; $k_1 = 1, k_2 = 2$, per cui $h_{p+1} = 3$, $k_{p+1} = 3$, essendo $p = 2$. Perciò il minore di ordine 2:

$$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Il minore complementare del minore $a_{12,12}$ è di ordine 1:

$$a_{3,3} = \det(14) = 14$$

Il complemento algebrico di $a_{12,12}$ è:

$$a'_{12,12} = (-1)^6 a_{3,3} = 14$$

***

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \\ -7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo $p = 2$, donde: $h_1 = 1, h_2 = 2$; $k_1 = 1, k_2 = 2$

$$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Il minore complentare del minore $a_{12,12}$ è

$$a_{34,34} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Il complemento algebrico di $a_{12,12}$ è:

$$a'_{12,12} = (-1)^6 a_{34,34} = -4$$

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 9 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il minore del second'ordine:

$$a_{24,23} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

Il minore complementare di $a_{24,23}$ è di ordine 3:

$$a_{135,145} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -41$$

Il complemento algebrico di $a_{24,23}$ è:

$$a'_{24,23} = (-1)^{6+5} a_{135,145} = +41$$

***

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
a_{12,12} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\
a_{12,13} &= \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 44 \\
a_{12,23} &= \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \\
a_{13,12} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \\
a_{13,13} &= \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\
a_{13,23} &= \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \\
a_{13,23} &= \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \\
a_{13,23} &= \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \\
a_{23,12} &= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \\
a_{23,23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \\
a_{3,3} &= \det(1) = 1 \\
a'_{12,12} &= (-1)^6 a_{3,3} = -1 \\
&\text{ecc.}
\end{aligned}$$

***

La nozione di minore di ordine p si specializza nel caso $p = 1$. Più specificatamente, un qualunque elemento a_{hk} di una matrice $A\,(n \times n)$ è un minore di ordine 1. Il complemento algebrico di a_{hk} è:

$$a'_{hk} = (-1)^{h+k} M_{hk}, \tag{1.45}$$

essendo

$$M_{hk} = \det A_{hk}$$

Qui A_{hk} è la **matrice complementare** di A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h-1,1} & \dots & a_{h-1,k-1} & a_{h-1,k} & a_{h-1,k+1} & \dots & a_{h-1,n} \\ a_{h1} & \dots & a_{h,k-1} & a_{hk} & a_{h,k+1} & \dots & a_{hn} \\ a_{h+1,1} & \dots & a_{h+1,k-1} & a_{h+1,k} & a_{h+1,k+1} & \dots & a_{h+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.46}$$

cioè la matrice quadrata di ordine $n-1$ ottenuta dalla (1.46) cancellando la riga h-*esima* e la colonna k-*esima*:

$$A_{hk} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h-1,1} & \dots & a_{h-1,k-1} & a_{h-1,k+1} & \dots & a_{h-1,n} \\ a_{h+1,1} & \dots & a_{h+1,k-1} & a_{h+1,k+1} & \dots & a_{h+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.6 Teorema di Laplace

Consideriamo la matrice quadrata:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Fissiamo $p < n$, dopodiché prendiamo p righe di indici: $h_1 < h_2 < \dots < h_p$. Resta così individuata la matrice $p \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{h_1 1} & a_{h_1 2} & \dots & a_{h_1 n} \\ a_{h_2 1} & a_{h_2 2} & \dots & a_{h_2 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h_p 1} & a_{h_p 2} & \dots & a_{h_p n} \end{pmatrix}$$

Il numero di minori che possono essere estratti da tale matrice, è pari al numero delle combinazioni di classe p di n oggetti, cioè

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Abbiamo quindi:

$$a_{h_1 h_2 \dots h_p, k_1, k_2, \dots, k_p},$$

essendo $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ una qualunque combinazione di classe p di $1, 2, \dots, n$. Ciò posto, sussiste il Teorema di Laplace:

Teorema 21

$$\det A = \sum_{k_1 k_2 \dots k_p} a_{h_1 h_2 \dots h_p, k_1, k_2, \dots, k_p} a'_{h_1 h_2 \dots h_p, k_1, k_2, \dots, k_p} \tag{1.47}$$

Dimostrazione. Omessa. ■

Nel caso speciale $p = 1$, la (1.47) si scrive:

$$\det A = \sum_k a_{hk} a'_{hk} \tag{1.48}$$

che esprime lo sviluppo di un determinante secondo gli elementi di una riga assegnata (somma degli $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$ prodotti dei singoli elementi per i corrispondenti complementi algebrici). In maniera analoga si dimostra lo sviluppo secondo gli elementi di una colonna assegnata. Nella (1.48) a'_{hk} è il complemento algebrico del minore a_{hk} ed è dato dalla (1.45) che riscriviamo:

$$a'_{hk} = (-1)^{h+k} \det A_{hk} = \begin{cases} \det A_{hk}, & h+k \text{ pari} \\ -\det A_{hk}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La relazione precedente suggerisce la seguente

Definizione 22 *Un elemento a_{hk} di una matrice quadrata, si dice di **posto pari** o di **posto dispari** se $h+k$ è pari o dispari rispettivamente.*

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante di A secondo gli elementi della prima riga:

$$\det A = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 104,$$

poiché:

$$a'_{11} = (-1)^2 A_{11} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$a'_{12} = (-1)^3 A_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$a'_{22} = (-1)^4 A_{13} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

***

Calcoliamo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & -6 \end{vmatrix}$$

Sviluppando secondo gli elementi della seconda colonna:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} = -36$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} = -48$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 60$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

donde:

$$\Delta = -288$$

1.7 Altre proprietà delle matrici

Sia $A\,(n \times n)$ una matrice quadrata di ordine n. Senza ledere la generalità supponiamo che $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Fissiamo arbitrariamente $p \in \mathbb{N} : p < n$, e le righe: $h_1 < h_2 < ... < h_p$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_1 1} & a_{h_1 2} & ... & a_{h_1 n} \\ a_{h_2 1} & a_{h_2 2} & ... & a_{h_n n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_p 1} & a_{h_p 2} & ... & a_{h_p n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Fissiamo l'attenzione sulle p righe:

$$(a_{h_r1}, a_{h_r2}, ..., a_{h_rn}) \quad \text{con } r = 1, 2, ..., p$$

Se $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p \in \mathbb{R}$, consideriamo le combinazioni lineari:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \lambda_1 a_{h_11} + \lambda_2 a_{h_21} + ... + \lambda_p a_{h_p1} \\
b_2 &= \lambda_1 a_{h_12} + \lambda_2 a_{h_22} + ... + \lambda_p a_{h_p2} \\
&... \\
b_n &= \lambda_1 a_{h_1n} + \lambda_2 a_{h_2n} + ... + \lambda_p a_{h_pn}
\end{aligned}$$

Indichiamo con B la matrice ottenuta da (1.49) con la sostituzione

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \longrightarrow (a_{i1} + b_1, a_{i2} + b_2, ..., a_{in} + b_n),$$

per un assegnato $i \in \{1, 2, ..., n\} - \{h_1, h_2, ..., h_p\}$. Sussiste il

Teorema 23

$$\det A = \det B$$

Dimostrazione. Omessa. ■

Un caso particolare è:

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \longrightarrow (a_{i1} + \lambda a_{r1}, a_{i2} + \lambda a_{r2}, ..., a_{in} + \lambda a_{rn}),$$

essendo $i, r \in \{1, 2, ..., n\}$ con $i \neq n$. Tale sostituzione produce la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} + \lambda a_{r1} & a_{i2} + \lambda a_{r1} & ... & a_{in} + \lambda a_{r1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\det C = \det A$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -36$$

Fissiamo $p = 2$, $h_1 = 2, h_2 = 3$. Quindi:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \lambda_1 \cdot (-4) + \lambda_2 \cdot (2) \\
b_2 &= \lambda_1 \cdot (1) + \lambda_2 \cdot (1) \\
b_3 &= \lambda_1 \cdot (1) + \lambda_2 \cdot (-1)
\end{aligned}
$$

Assumendo $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 2)$:

$$b_1 = 0,\ b_2 = 3,\ b_3 = -1$$

Per $i = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Un calcolo diretto porge:

$$\det B = -36$$

***

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \longrightarrow (a_{11} + \lambda a_{21}, a_{12} + \lambda a_{22}, a_{13} + \lambda a_{23})$$

Per $\lambda = 1$

$$(1, -1, 0) \rightarrow (3, 0, 1)$$

donde:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Per $\lambda = -1/2$

$$(1,-1,0) \to \left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

donde:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$(a_{21}, a_{22}, a_{23}) \longrightarrow (a_{21} + \lambda a_{11}, a_{22} + \lambda a_{12}, a_{23} + \lambda a_{13})$$

Per $\lambda = -2$:

$$(2,1,1) \to (0,3,1),$$

donde:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Osservazione 24 *I teoremi precedenti continuano a valere nel caso di* sostituzioni per colonna. *Ad esempio:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

Eseguiamo la sostituzione per colonna:

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \to (a_{11} + \lambda a_{12}, a_{21} + \lambda a_{22}, a_{31} + \lambda a_{32})$$

Per $\lambda = 1$

$$(1,-1,5) \to (3,0,7),$$

donde:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

Teorema 25 *Sia $A\,(n \times n)$ e $p \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Fissiamo quindi $h_1 < h_2 < h_p$.*

$$\exists i_0 \in \{1, 2, ..., n\} : (a_{i_0 1}, a_{i_0 2}, ..., a_{i_0 n}) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(a_{h_j 1}, a_{h_j 2}, ..., a_{h_j n} \right) \Longrightarrow \det A = 0$$

$$\exists j_0 \in \{1, 2, ..., n\} : (a_{1 j_0}, a_{2 j_0}, ..., a_{n j_0}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(a_{1 h_i}, a_{2 h_i}, ..., a_{n h_i} \right) \Longrightarrow \det A = 0$$

Dimostrazione. Omessa. ■

Secondo il teorema precedente, un determinante è nullo se una riga (o una colonna) è combinazione lineare di altre righe (o di altre colonne). Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Qui è:

$$(5, 7, 19) = 2\,(1, 2, 5) + 3\,(1, 1, 3)\,,$$

donde

$$\det A = 0$$

come confermato da un calcolo diretto.

Teorema 26 *Siano A, B matrici quadrate di ordine n.*

$$\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Dimostrazione. Omessa. ■

1.8 Inversa di una matrice

Consideriamo la matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.50}$$

Secondo la (1.45) per ogni elemento a_{hk} resta univocamente definito il suo complemento algebrico a'_{hk}:

$$a_{hk} \to a'_{hk} = (-1)^{h+k} \det A_{hk}$$

Resta così definita la matrice quadrata di ordine n:

$$A^{(a)} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}^T$$

che si chiama **matrice aggiunta** della matrice A. In altri termini, la matrice aggiunta è la trasposta della matrice dei complementi algebrici.

Definizione 27 *Una matrice quadrata è* **non singolare** *se il suo determinante è non nullo. Nel caso contrario, la matrice è* **singolare**.

Definizione 28 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se A è non singolare, si definisce* **inversa** *di A e si indica con A^{-1} la matrice quadrata di ordine n tale che:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

essendo I_n la matrice identità di ordine n.

Proposizione 29 *Sia A una matrice quadrata di ordine n non singolare. La sua inversa è:*

$$A^{-1} = \frac{A^{(a)}}{\det A} \tag{1.51}$$

Dimostrazione. Omessa. ■

***

Definizione 30 *Una matrice quadrata di ordine n si dice* ***involutoria*** *se coincide con la propria inversa:*

$$A^{-1} = A \Longleftrightarrow A^2 = I$$

Esempi
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 43$$

La matrice aggiunta è:

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 2 \\ -24 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Quindi l'inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{43} & \frac{5}{43} & \frac{2}{43} \\ -\frac{24}{43} & \frac{5}{43} & \frac{2}{43} \\ \frac{2}{43} & -\frac{4}{43} & \frac{7}{43} \end{pmatrix}$$

***

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

La matrice aggiunta è:

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $\det A = 0$, per cui la matrice è singolare e come tale è priva di inversa.

1.9 Rango di una matrice

Se $A\,(n \times n) \neq 0$ per § 1.5 esistono minori di ordine $p = 1, 2, ..., \min\{m, n\}$.

Definizione 31 *Dicesi* **rango** *o* **caratteristica** *di A, l'intero naturale:*

$$r\,(A) \overset{def}{=} p_{>},$$

essendo $p_{>} = \max\{p\}$: *i minori di ordine* $p_{>}$ *sono non nulli.*

Da tale definizione segue che se $r\,(A) = p_{>}$, significa:

1. Esiste almeno un minore di ordine $p_{>}$ non nullo;
2. se $p_{>} < \min\{m, n\}$, i minori di ordine $p_{>} + 1$, $p_{>} + 2, ...$, sono tutti nulli.

1.10 Esercizi proposti

1.10.1 Operazioni sulle matrici e classificazione delle matrici

(**per alcune soluzioni consultare l'Appendice A**)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

***

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -12$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \\ -4 & -6 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 5 & 3 & 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 16 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix};$$

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

calcolare la matrice prodotto AB.

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

determinare:

$$D = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix} : A + B - D = 0$$

***

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

determinare: $A + B$, $A - C$, $-2A$. Verificare l'identità:

$$A + (B - C) = (A + B) - C$$

Determinare una matrice D tale che:

$$A + D = B$$

Verificare le identità:

$$D = B - A$$
$$D = -(A - B)$$

***

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

verificare la non commutatività del loro prodotto.
Soluzione

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1-6-6 & -1+4+3 & 1-2 \\ 2-12-12 & -2+8+6 & 2-4 \\ 1-6-6 & -1+4+3 & 1-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -20 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix},$$

cioè $AB \neq BA$.

***

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

verificare l'identità matriciale:

$$AB = AC$$

Soluzione
Procediamo per calcolo diretto:

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

***

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare l'identità (proprietà distributiva rispetto alla moltiplicazione righe per colonne):

$$A(BC) = (AB)C$$

Soluzione
Procediamo per calcolo diretto:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$$
$$(AB)\,C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{pmatrix}$$
$$BC = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$
$$A\,(BC) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{pmatrix}$$

***

Date le matrici (1.52) verificare la proprietà distributiva della moltiplicazione righe per colonne rispetto all'addizione di matrici:

$$A\,(B+C) = AB + AC \tag{1.53}$$

Soluzione

$$B+C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A\,(B+C) = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 41 & -4 & 32 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il secondo membro della (1.53):

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -3 \\ 22 & 1 & 16 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 41 & -4 & 32 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

***

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

essendo $i = \sqrt{-1}$, determinare A^n per $n \in \mathbb{N}$.
Soluzione

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \\
A^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -A \\
A^4 &= A^3 A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I
\end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}
n \text{ è pari} &\Longrightarrow A^n = \pm I \\
n \text{ è dispari} &\Longrightarrow A^n = \pm A
\end{aligned}$$

Precisamente:

$$\begin{aligned}
A^2 &= -I \\
A^4 &= +I \\
A^8 &= +I \\
A^{10} &= -I
\end{aligned}$$

da ciò segue:

$$\begin{aligned}
A^n &= +I, \ \text{ se } n = 4p \ \ \forall p \in \mathbb{N} \\
A^n &= -I, \ \text{ se } n = 4p + 2 \ \ \forall p \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

In maniera simile si dimostra che:

$$\begin{aligned}
A^n &= +A, \ \text{ se } n = 4p + 1 \ \ \forall p \in \mathbb{N} \\
A^n &= -A, \ \text{ se } n = 4p + 3 \ \ \forall p \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

verificare che A e B commutano e che $AC = A$, $CA = C$.
Soluzione

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2-3+5 & -6-9-15 & 10+15-25 \\ 1+4-5 & -3-12+15 & -5-20+25 \\ -1-3+4 & 3+9-12 & 5+15-20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 2-3+5 & -6-9-15 & 10+15-25 \\ 1+4-5 & -3-12+15 & -5-20+25 \\ -1-3+4 & 3+9-12 & 5+15-20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cioè $AB = BA = 0$.

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A \\ CA &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

verificare che A e B commutano.
Soluzione

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} ca+db & cb+da \\ da+cb & db+ca \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad AB = BA$$

***

Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

è idempotente.
Soluzione

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = A \end{aligned}$$

***

Verificare l'idempotenza delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Per la matrice A:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Per la matrice B

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

***

Dimostrare la seguente proposizione:

$$AB = A, \ \ BA = B) \Longrightarrow (A, \ B \text{ sono idempotenti}$$

Soluzione

$$AB = A \Longrightarrow A\,(BA) = A$$

Per la proprietà distributiva rispetto alla moltiplicazione tra matrici:

$$(AB)\,A = A$$

Ma $AB = A$, donde:

$$A^2 = A$$

da cui l'idempotenza di A. Passiamo alla matrice B:

$$BA = B \Longrightarrow B\,(AB) = B$$

Per la proprità distributiva:

$$(BA)\,B = B$$

Ma $BA = B$, donde:

$$B^2 = B,$$

da cui l'idempotenza di B.

***

Verificare la nilpotenza di ordine 3 della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde l'asserto.

***

Assegnata la matrice quadrata:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare che è soluzione dell'equazione matriciale:

$$X^2 - 4X - 5I_3 = 0$$

Abbiamo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A^2 - 4A - 5I_3$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cioè:

$$A^2 - 4A - 5I_3 = 0$$

***

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare che è soluzione dell'equazione matriciale:

$$X^3 - 2X^2 - 9X = 0$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 34 & 23 & 49 \\ 15 & 3 & 24 \\ 19 & 20 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:

$$A^3 - 2A^2 - 9A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

***

Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

è nilpotente di ordine 2.
Soluzione

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

***

Verificare che le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

commutano, e che il loro prodotto è la matrice identità.
Soluzione
Abbiamo:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

***

Verificare che le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{pmatrix}$$

commutano, e che il loro prodotto è la matrice identità.
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

***

Verificare che le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

anticommutano. Inoltre si dimostri che:

$$\forall A, B : A \text{ e } B \text{ anticommutano, } (A+B)^2 = A^2 + B^2$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -BA
\end{aligned}$$

Se A, B sono due qualunque matrici che anticommutano:

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B) \cdot (A+B) \\
&= A^2 + AB + BA + B^2 \\
&\underset{BA=-AB}{=} A^2 + B^2
\end{aligned}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \, A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

verificare che ciascuna anticommuta con le altre. Più precisamente:

$$A_i A_j = \begin{cases} -A_j A_i & \text{se } i \neq j \\ I & \text{se } i = j \end{cases}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
A_2 A_1 &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -A_1 A_2 \\
A_1 A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
A_3 A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -A_1 A_3 \\
A_2 A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
A_3 A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A_2 A_3 \\
A_1^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_2^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_3^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

***

Determinare le matrici che commutano con $D = diag\,(1, 2, 3)$.
Soluzione
Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

A e D commutano se:

$$AD = DA \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 2a_{12} \\ a_{13} = 3a_{13} \\ a_{21} = 2a_{12} \\ a_{31} = 3a_{31} \\ 3a_{32} = 2a_{32} \end{cases}$$

Cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 3a_{33} \end{pmatrix}, \forall a_{11}, a_{22}, a_{33}$$

Ridefinendo (in forza della loro arbitarietà) a_{11}, a_{22}, a_{33}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Il risultato precedente si generalizza al caso di una matrice diagonale di ordine n. Precisamente, la più generale matrice quadrata di ordine n che commuta con $D_n = diag\,(d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn})$.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

***

Determinare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ applicando la definizione.

Soluzione

Imponiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cioè:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ 3a+4c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases}$$

Risolvendo entrambi i sistemi lineari:

$$(a,c)=\left(-2,\frac{3}{2}\right),\ (b,d)=\left(1,-\frac{1}{2}\right),$$

donde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

***

Assegnata la matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

verificare che è involutoria.
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} A^2 &= A\cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificare che A è hermitiana, e B antihermitiana.
Soluzione
Abbiamo:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-3i \\ 1+i & 2 & i \\ 2+3i & -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix} = A$$
$$(B^*)^T = \begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

1.10.2 Minori e complementi algebrici

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 12 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

Determinare il minore complementare e il complemento algebrico del minore del terzo ordine $a_{145,135}$.

Soluzione

Abbiamo:

$$a_{145,135} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix} \tag{1.54}$$

Il minore complementare di (1.54) è il minore del second'ordine:

$$a_{23,24} = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

Il complemento algebrico:

$$a'_{145,135} = (-1)^{1+4+5+1+3+5} a_{23,24} = -a_{23,24}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \; B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

verificare che i complementi algebrici degli elementi di A, B soddisfano rispettivamente le proprietà seguenti:

$$a'_{ij} = a_{ij},\, b'_{ij} = b_{ji}$$

Soluzione
Per la matrice A:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= -\frac{1}{3} = a_{11},\, a'_{12} = -\frac{2}{3} = a_{12},\, a'_{13} = -\frac{2}{3} = a'_{13} \\
a'_{21} &= \frac{2}{3} = a_{21},\, a'_{22} = \frac{1}{3} = a_{22},\, a'_{23} = -\frac{2}{3} = a'_{23} \\
a'_{31} &= \frac{2}{3} = a_{31},\, a'_{22} = -\frac{2}{3} = a_{22},\, a'_{33} = -\frac{2}{3} = a'_{33}
\end{aligned}$$

In maniera analoga per la matrice B.

***

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare i cofattori dei singoli elementi, nonché la matrice inversa.
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad a'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \\
a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad a'_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad a'_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\
a'_{31} &= +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}$$

La matrice aggiunta è:

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'inversa:

$$A^{-1} = \frac{A^{(a)}}{\det A}$$

Calcolo del determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +1$$

Quindi:

$$A^{-1} = A^{(a)}$$

***

Assegnato il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix},$$

si moltiplichino le sue colonne per a, b, c. Quindi, raccogliendo il fattore comune di ciascuna riga, si dimostri che:

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & cb \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$a\Delta = a \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^2 \\ ab^2 & ca & b^2 \\ ac^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$ab\Delta = b \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^2 \\ ab^2 & ca & b^2 \\ ac^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2 \\ ab^2 & bca & b^2 \\ ac^2 & bc^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$abc\Delta = c \begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2 \\ ab^2 & bca & b^2 \\ ac^2 & bc^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2c \\ ab^2 & bca & cb^2 \\ ac^2 & bc^2 & abc \end{vmatrix}$$

Raccogliendo i fattori comuni per singola riga:

$$abc\Delta = abc \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & cb \\ ac & bc & ab \end{vmatrix} \Longrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & cb \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$$

***

1.10.3 Calcolo di determinanti del secondo ordine

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha+i\beta & \gamma+i\delta \\ \gamma-i\delta & \alpha-i\beta \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \tan\alpha & -1 \\ 1 & \tan\alpha \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a-b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix};$$

1.10.4 Calcolo di determinanti del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix};$$

1.10.5 Calcolo di determinanti di ordine qualsiasi

Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali è nullo il determinante:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

Calcolare il determinante della matrice di ordine n:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{pmatrix}$$

***

Calcolare il determinante di ordine n:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, ..., +\infty \tag{1.55}$$

***

Calcolare il determinante di ordine n:

$$D(n) = \begin{vmatrix} 1 & a & a & ... & a \\ 0 & 2 & a & ... & a \\ 0 & 0 & 3 & ... & a \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, ..., +\infty \tag{1.56}$$

***

Assegnata la funzione:

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k), \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \tag{1.57}$$

calcolare i seguenti determinanti di ordine $n+1$:

a) $$F(n) = \begin{vmatrix} f_n(0) & f_n(1) & f_n(2) & \ldots & f_n(n) \\ f_n(1) & f_n(2) & f_n(3) & \ldots & f_n(n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & .. & \ldots \\ f_n(n) & f_n(n+1) & f_n(n+2) & \ldots & f_n(2n) \end{vmatrix}$$

b) $$G(x,n) = \begin{vmatrix} f_n(x) & f_n'(x) & f_n''(x) & \ldots & f_n^{(n)}(x) \\ f_n'(x) & f_n''(x) & f_n'''(x) & \ldots & f_n^{(n+1)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n''(x) & f_n'''(x) & \ldots & \ldots & f_n^{(2n)}(x) \end{vmatrix}$$

***

Assegnati $a_k \in \mathbb{R}$ con $a_{k'} \neq a_{k''}$ $(k', k'' = 1, 2, \ldots n)$, risolvere l'equazione algebrica di grado $n-1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.58}$$

***

Risolvere l'equazione algebrica di grado $n-2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & (n-1)-x \end{vmatrix} \tag{1.59}$$

Assegnati $a_k \in \mathbb{R}$ con $a_{k'} \neq a_{k''}$ $(k', k'' = 1, 2, \ldots n)$, risolvere l'equazione algebrica di grado $n-1$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0 \tag{1.60}$$

***

Dimostrare che

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.61}$$

***

Assegnata la matrice diagonale di ordine n:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \tag{1.62}$$

determinare la somma dei complementi algebrici degli elementi di matrice.

***

Assegnata la matrice di ordine n:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

determinare la somma dei complementi algebrici degli elementi di matrice.

***

Calcolare il seguente determinante, sviluppando secondo gli elementi delle terza riga:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{1.64}$$

Calcolare il seguente determinante, sviluppando secondo gli elementi delle quarta colonna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix} \tag{1.65}$$

***

Calcolare il seguente determinante, sviluppando secondo gli elementi delle prima colonna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{1.66}$$

***

Calcolare:

1. $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = -1487\,600$

2. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = -29\,400\,000$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 12$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 900$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 394$

9. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$

10. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} = c^2 - 2ac - 2bc + b^2 - 2ba + a^2$

11. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2x^3 - 2y^3$

12. $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^5 - x^4 + x^2 - x + 1 + x^3$

13. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = z^2x^2$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = -12 - 3x^4 + 15x^2$

15. $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = 2\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)$

16. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = [-eb + af + 2c\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)]^2$

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n+b_n \end{vmatrix}$

19. Esplicitare l'espressione analitica della funzione $f_n(x, x_1, x_2, ..., x_n)$ data dallo sviluppo del determinante di ordine n:

$$f_n(x; x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & ... & x_{n-1} & x_n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

20. Calcolare:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & ... & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & ... & n-1 & n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 2 & 3 & ... & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} \tag{1.67}$$

21. Calcolare:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & ... & 2 & 2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & ... & n \end{vmatrix} \tag{1.68}$$

22. Calcolare:

$$\phi(b_1, b_2, ..., b_n) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_2 & .. & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{1.69}$$

23. Calcolare:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & ... & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & ... & 0 \\ 0 & -a & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a \end{vmatrix} \tag{1.70}$$

24. Calcolare:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} \tag{1.71}$$

25. Calcolare:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

26. Se $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ e se $f_k(x)$ con $k = 1, 2, ..., n$, sono polinomi su $\mathbb{R}$ di grado $r_k \leq n-2$, dimostrare:

$$\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.72}$$

27. Calcolare $(n \in \mathbb{N} - \{0\})$:

$$f(x_1, x_2, ...x_n; y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix} \tag{1.73}$$

28. Calcolare $(n \in \mathbb{N} - \{0\})$:

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & a_n \\ -n & x & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} \tag{1.74}$$

29. Calcolare per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$D(n) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \tag{1.75}$$

30. Costruire il diagramma cartesiano della funzione reale di variabile reale nell'intervallo $[-2,2]$:

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2\cos x \end{vmatrix}, \tag{1.76}$$

per $n = 1, ..., 7$.

31. Costruire il diagramma cartesiano della funzione reale di variabile reale nell'intervallo $[-1,1]$:

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2\cos x \end{vmatrix} \tag{1.77}$$

per $n = 1, ..., 7$.

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Definizione assiomatica

Sia E un insieme non vuoto e K un campo (ad esempio, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). L'insieme E è uno **spazio vettoriale** (e i suoi elementi si dicono **vettori**) se sono definite una legge di composizione interna χ e una legge di composizione esterna η:

$$\begin{aligned} \chi &: E \times E \longmapsto E \\ \eta &: K \times E \longmapsto E \end{aligned} \tag{2.1}$$

La prima delle (2.1) si chiama **addizione di vettori** e si indica con $+$. Quindi:

$$+ : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E \longmapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in E \tag{2.2}$$

L'operazione (2.2) verifica le seguenti proprietà:

1. **Proprietà commutativa.**
   $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \;\; \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2. **Proprietà associativa.**
   $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \;\; \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

3. **Esistenza dell'elemento neutro.**
   $\exists \mathbf{0} \in E : \forall \mathbf{u} \in E, \;\; \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

4. **Esistenza dell'opposto**
   $\forall \mathbf{u} \in E, \exists\, (-\mathbf{u}) \in E \mid -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

La seconda delle (2.1) si chiama **moltiplicazione di uno scalare per un vettore**:

$$\eta : (\lambda, \mathbf{v}) \in K \times E \longmapsto (\lambda \mathbf{v}) \in E \tag{2.3}$$

L'operazione (2.3) verifica le seguenti proprietà:

I Proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale.

$\forall \lambda \in K$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, $\lambda (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$

II Proprietà distributiva rispetto alla somma in K

$\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall \mathbf{v} \in E$, $(\lambda + \mu) \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}$

III Proprietà associativa

$\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall \mathbf{v} \in E$, $\lambda (\mu \mathbf{v}) = (\lambda \mu) \mathbf{v}$

IV Esistenza dell'elemento neutro

$\exists 1 \in K : \forall \mathbf{v} \in E$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Per quanto detto, se le operazioni (2.1) verificano le proprietà 1, 2, 3, 4 e I, II, III, IV, l'insieme E assume la struttura di spazio vettoriale su K. Gli elementi di K si dicono **scalari.**

Esempio 32 *Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-ple ordinate di numeri reali:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, ..., n\}$$

Definiamo l'operazione di addizione:

$$+ : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$$

essendo:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...x_n), \ \mathbf{y} = (y_1, y_2, ...y_n)$$

Per definizione:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Abbiamo

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $x_i + y_i = y_i + x_i$ $(i = 1, 2, ..., n) \Longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i$, $(i = 1, 2, ..., n) \Longrightarrow \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
3. $\exists \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists (-\mathbf{x}) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n) \in \mathbb{R}^n : -\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$

   L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è così definita:

   $$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, ..., ax_n), \quad a \in \mathbb{R}$$

   e verifica le proprietà:

I $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $a (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$

II $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $(a + b) \mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$

III $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $a (b\mathbf{x}) = (ab) \mathbf{x}$

IV $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Da ciò segue che con le operazioni sopra definite, l'insieme $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale sul campo reale $\mathbb{R}$.

Esempio 33 *Consideriamo l'insieme $\mathbb{C}^n$ delle n-ple ordinate di numeri complessi:*

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, ..., z_n) : z_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

Definiamo l'operazione di addizione:

$$+ : (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}^n$$

essendo:

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, ...z_n)\ ,\ \mathbf{w} = (w_1, w_2, ...w_n)$$

Per definizione:

$$\mathbf{z} + \mathbf{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, ..., z_n + w_n)$$

È evidente che:

1. $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n,\ \mathbf{z} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$

1. $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n,\ \mathbf{z} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{z} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$

2. $\exists \mathbf{0} = (0, 0, ...0) \in \mathbb{C}^n : \mathbf{z} + \mathbf{0} = \mathbf{z}$

3. $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n,\ \exists - \mathbf{z} = (-z_1, -z_2, ..., -z_n) \in \mathbb{C}^n : -\mathbf{z} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$

   L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è così definita:

$$a\mathbf{z} = (az_1, az_2, ..., az_n)\ , \quad a \in \mathbb{C}$$

   e verifica le proprietà:

I $\forall a \in \mathbb{C},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n,\ a(\mathbf{z} + \mathbf{w}) = a\mathbf{z} + a\mathbf{w}$

II $\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n,\ (a + b)\mathbf{z} = a\mathbf{z} + b\mathbf{z}$

III $\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n,\ a(b\mathbf{z}) = (ab)\mathbf{z}$

IV $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n,\ 1\mathbf{z} = \mathbf{z}$

Da ciò segue che con le operazioni sopra definite, l'insieme $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale sul campo complesso $\mathbb{C}$.

Esempio 34 *Sia $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ l'insieme delle matrici $m \times n$ su $\mathbb{R}$. Introduciamo in $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ l'operazione di addizione:*

$$+ : (A, B) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \longmapsto (A + B) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$$

Più precisamente:

$$(A = (a_{ij})\ ,\ \ B = (b_{ij})) \Longrightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

L'operazione di addizione verifica gli assiomi:

1. $\forall A, B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),\ A + B = B + A$

2. $\forall A, B, C \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),\ \ A + (B + C) = (A + B) + C$

3. $\exists \mathbf{0} = (a_{ij} = 0) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) : \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),\ A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

4. $\forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),\ \exists - A = (-a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) : -A + A = \mathbf{0}$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per una matrice:

$$\eta : (\lambda, A) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \longmapsto (\lambda A) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$$

Più precisamente:

$$(\lambda \in \mathbb{R},\ \ A = (a_{ij})) \Longrightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Tale operazione verifica gli assiomi:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),\ \lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),\ (\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),\ \lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$

IV $\forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),\ \ 1A = A$

Si conclude che $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ con le operazioni sopra introdotte assume la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esempio 35 *Sia $\mathcal{P}_n[x]$ l'insieme dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale di $n \in \mathbb{N}$. Prendiamo ad arbitrio due elementi di tale insieme:*

$$\begin{gathered} p_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \\ q_r(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_r x^r, \end{gathered}$$

essendo $m, r \leq n$. Definiamo l'addizione tra polinomi:

$$+ : (p_m(x), q_r(x)) \in \mathcal{P}_n[x] \times \mathcal{P}_n[x] \longmapsto (p_m(x) + q_r(x)) \in \mathcal{P}_n[x]$$

Senza ledere la generalità, supponiamo che $m < r$:

$$\begin{aligned} & p_m(x) + q_r(x) \\ & = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \ldots + (a_m + b_m) x^m + b_{m+1} x^{m+1} + \ldots b_r x^r \end{aligned}$$

L'operazione di addizione verifica gli assiomi:

1. $\forall p_m(x), q_r(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ p_m(x) + q_r(x) = q_r(x) + p_m(x)$

2. $\forall p_m(x), q_r(x), l_k(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ \ p_m(x) + (q_r(x) + l_k(x)) = (p_m(x) + q_r(x)) + l_k(x)$

3. $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n \mid \ \forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ p_m(x) + 0 = p_m(x)$

4. $\forall p_m(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j x^j\right) \in \mathcal{P}_n[x],\ \exists - p_m(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} (-a_j) x^j\right) \in \mathcal{P}_n[x] : -p_m(x) + p_m(x) = 0$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per una polinomio

$$\eta : (\lambda, p_m(x)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_n[x] \longmapsto (\lambda p_m(x)) \in \mathcal{P}_n[x]$$

Tale operazione verifica i seguenti assiomi:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p_m(x), q_r(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ \lambda(p_m(x) + q_r(x)) = \lambda p_m(x) + \lambda q_r(x)$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ (\lambda + \mu) p_m(x) = \lambda p_m(x) + \mu p_m(x)$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ \lambda(\mu p_m(x)) = (\lambda\mu) p_m(x)$

IV $\forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ \ 1 p_m(x) = p_m(x)$

Da ciò segue che l'insieme $\mathcal{P}_n[x]$ con l'operazioni sopra introdotte assume la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esempio 36 *Sia $\mathcal{F}(a, b)$ l'insieme delle funzioni reali di variabile reale definite in $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$:*

$$f \in \mathcal{F}(a, b) \Longrightarrow f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$$

Definiamo l'addizione:

$$+ : (f, g) \in \mathcal{F}(a, b) \times \mathcal{F}(a, b) \longmapsto (f + g) \in \mathcal{F}(a, b) \tag{2.4}$$

Più specificatamente:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La (2.4) verifica gli assiomi:

1. $\forall f, g \in \mathcal{F}(a, b), f + g = g + f$
2. $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(a, b), f + (g + h) = (f + g) + h$
3. $\exists \mathbf{0} \equiv 0$ *(funzione identicamente nulla)*: $\forall f \in \mathcal{F}(a, b), f + \mathbf{0} = f$
4. $\forall f \in \mathcal{F}(a, b), \exists - f : -f + f = \mathbf{0}$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per un elemento di $\mathcal{F}(a, b)$:

$$\eta : (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(a, b) \longmapsto (\lambda f) \in \mathcal{F}(a, b)$$

Precisamente:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

e verifica gli assiomi:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{F}(a, b),\ \lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}(a, b),\ (\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu g$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}(a, b),\ \lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f$

IV $\forall f \in \mathcal{F}(a,b), \quad 1f = f$

Con le operazioni sopra introdotte, $\mathcal{F}(a,b)$ assume la struttura di spazio vettoriale.

***

Sia E uno spazio vettoriale su K.

Proposizione 37 $\forall \lambda \in K, \quad \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Dimostrazione.
$\lambda \mathbf{0} = \lambda (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ■

Proposizione 38 $\forall \mathbf{v} \in E, \quad 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Dimostrazione.
$0\mathbf{v} = (0+0)\,\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} \Longrightarrow 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ■

2.2 Dipendenza ed indipendenza lineare di vettori

Sia E uno spazio vettoriale su K. Consideriamo il **sistema di vettori**:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}, \quad \text{con } r \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Presi ad arbitrio r scalari $\lambda_i \in K$ $(i = 1, 2, ..., r)$, il vettore:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r,$$

si chiama **combinazione lineare** dei vettori di Σ. Ciò premesso, abbiamo la seguente:

Definizione 39 *Σ è* **linearmente indipendente** *se:*

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0 \tag{2.5}$$

Nel caso contrario diremo che Σ è **linearmente dipendente.** *Cioè:*

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \neq (0, 0, ..., 0) : \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

Esempio 40 *Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ (cfr esempio 32 per $n = 3$), mostrare che il sistema di vettori $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ con*

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 2), \ \mathbf{v}_2 = \left(7, -\frac{3}{2}, 3\right), \ \mathbf{v}_3 = (-3, 1, -1) \ , \tag{2.7}$$

è linearmente dipendente.

Soluzione 41 *Consideriamo l'equazione vettoriale:*

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}, \tag{2.8}$$

equivalente a:

$$\lambda_1 (2,1,2) + \lambda_2 \left(7, -\frac{3}{2}, 3\right) + \lambda_3 (-3,1,-1) = (0,0,0),$$

le cui componenti formano il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 7\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

La matrice dei coefficienti del sistema (2.9) è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

La caratteristica del sistema 2.9 è $p = r(A) = 2$, per cui tale sistema ammette ∞^1 soluzioni proprie. In altri termini $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0) : \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, per cui $\Sigma = \{\mathbf{v}_i\}$ è linearmente dipendente.

Esempio 42 *Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, mostrare che il sistema di vettori $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ con*

$$\mathbf{v}_1 = (2,1,2), \ \mathbf{v}_2 = \left(7, -\frac{1}{2}, 3\right), \ \mathbf{v}_3 = (-3,1,-1) \ , \tag{2.10}$$

è linearmente indipendente. Esprimere altresì il vettore $\mathbf{v}_4 = (1,1,-1)$ come combinazione lineare di Σ.

Soluzione 43 *Procedendo come nell'esercizio precedente, abbiamo il sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 7\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

la cui matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Qui è $\det A = 4$*, perciò* $p = 3 = n$ *(numero di incognite). Pertanto il sistema 2.11 ammette solo la soluzione impropria* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$*; da ciò segue che* Σ *è linearmente indipendente. Per la seconda domanda, poniamo:*

$$\mathbf{v}_4 = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mu_3 \mathbf{v}_3$$

Tale equazione vettoriale può essere scritta come:

$$\mu_1 (2,1,2) + \mu_2 \left(7, -\frac{1}{2}, 3\right) + \mu_3 \left(7, -\frac{1}{2}, 3\right) = (1,1,-1),$$

le cui componenti formano il sistema lineare non omogeneo:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 7\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= -1, \end{aligned} \tag{2.12}$$

Il sistema 2.12 è manifestamente di Cramer, ammettendo l'unica soluzione:

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(-\frac{5}{2}, 3, 5\right),$$

donde:

$$\mathbf{v}_4 = -\frac{5}{2}\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3$$

Proposizione 44 $(\mathbf{0} \in \Sigma) \Longrightarrow$ (Σ *è linearmente dipendente*)

Dimostrazione. $\exists h \in \{1, 2, ..., r\} : \mathbf{v}_h = \mathbf{0}$. Quindi:

$$\forall \lambda_h \in K - \{0\}, \quad 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + ... + 0\mathbf{v}_{h-1} + \lambda_h \mathbf{0} + 0\mathbf{v}_{h+1} + ... + 0\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Abbiamo così trovato una *r-pla* di scalari $(0, 0, ...0, \lambda_h, 0, ..., 0)$ non tutti nulli tali che $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, donde l'asserto. ■

Proposizione 45 $(\exists \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_k \in \Sigma : \mathbf{v}_h = \mu \mathbf{v}_k, \ \mu \in K - \{0\}) \Longrightarrow$ (Σ *è linearmente dipendente*)

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo che $h < k$. Eseguiamo la combinazione lineare di vettori di Σ :

$$\begin{aligned} & 0\mathbf{v}_1 + ... + (-1)\,\mathbf{v}_h + ... + \mu \mathbf{v}_k + ... + 0\mathbf{v}_r \\ &= -\mu \mathbf{v}_k + \mu \mathbf{v}_k + \mathbf{0} \\ &= (-\mu + \mu)\,\mathbf{v}_k \\ &= 0\mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la proposizione 38. Abbiamo quindi trovato una *r-pla* di scalari:

$$(\lambda_1, ..., \lambda_h, ..., \lambda_k, ..., \lambda_r) = (0, ..., -1, ..., \mu, ..., 0) \neq (0, ..., 0, ..., 0, ...0) : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

donde l'asserto. ■

Proposizione 46 (Σ *è linearmente dipendente*) $\Longleftrightarrow$ ($\exists \Sigma' \subseteq \Sigma : \Sigma'$ *è linearmente dipendente*)

Dimostrazione. La condizione è necessaria.
Hp: $\exists \Sigma' \subseteq \Sigma : \Sigma'$ è linearmente dipendente.
Th: Σ è linearmente dipendente
Sia:

$$\Sigma' = \left\{ \mathbf{v}_{h_1}, \mathbf{v}_{h_2}, ..., \mathbf{v}_{h_p} \right\},$$

essendo:

$$h_i \in \{1, 2, ..., r\}, \quad i = 1, 2, ...p < r$$

Per ipotesi $\exists \left(\lambda_{h_1}, \lambda_{h_2}, ..., \lambda_{h_p} \right) \neq (0, 0, ..., 0)$:

$$\sum_{k=h_1}^{h_p} \lambda_{h_k} \mathbf{v}_{h_k} = \mathbf{0}$$

Posto $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, ..., h_p\}$, si consideri la seguente combinazione lineare:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \sum_{k \in \mathcal{H}} \lambda_k \mathbf{v}_k + \sum_{k \notin \mathcal{H}} 0 \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Abbiamo così trovato una *r-pla* di scalari non tutti nulli tali che $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, donde la tesi.
La condizione è sufficiente
(Σ è linearmente dipendente) $\Longrightarrow$ ($\exists \Sigma' \subseteq \Sigma : \Sigma'$ è linearmente dipendente)
È banale, poiché $\Sigma \supseteq \Sigma$. Quindi, posto $\Sigma' = \Sigma$, segue la tesi. ■

Proposizione 47 $\left(\exists h \in \{1, 2, ..., r\} : \mathbf{v}_h = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{r} \mu_k \mathbf{v}_k \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \Sigma \textit{ è linearmente} \\ \textit{dipendente} \end{array} \right)$

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto per $\mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}$; nel caso contrario si riduce alla proposizione 44.
Esplicitando la sommatoria:

$$\mathbf{v}_h - \mu_1 \mathbf{v}_1 - \mu_2 \mathbf{v}_2 + ... - \mu_{h-1} \mathbf{v}_{h-1} - \mu_{h+1} \mathbf{v}_{h+1} + ... - \mu_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Riordinando i singoli termini:

$$-\mu_1 \mathbf{v}_1 - \mu_2 \mathbf{v}_2 + ... - \mu_{h-1} \mathbf{v}_{h-1} + \mathbf{v}_h - \mu_{h+1} \mathbf{v}_{h+1} + ... - \mu_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Cioè:

$$\exists \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{h-1}, \lambda_h, \lambda_{h+1}, ..., \lambda_r \right) = \left(-\mu_1, -\mu_2, ..., -\mu_{h-1}, 1, \mu_{h+1}, ..., \mu_r \right) : \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

La *r-pla* di scalari $\left(-\mu_1, -\mu_2, ..., -\mu_{h-1}, 1, \mu_{h+1}, ..., \mu_r \right)$ è non nulla. ■

2.3 Sottospazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale su K. Consideriamo un insieme $H \neq \emptyset$ e tale che $H \subseteq E$. Diremo che H è un **sottospazio vettoriale** di E se:

1. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$, $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H$
2. $\forall \mathbf{v} \in H$, $\forall \lambda \in K$, $(\lambda \mathbf{v}) \in H$

I punti 1 e 2 si esprimono dicendo che l'insieme H è **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore.

Proposizione 48 *Il vettore nullo appartiene ad ogni sottospazio vettoriale di E.*

Dimostrazione. Sia H un qualunque sottospazio di E. Ciò implica:

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H$$

Prendiamo $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$, per cui $\mathbf{0} \in H$, per ogni H sottospazio di E. ■

Corollario 49 *L'insieme $H_0 = \{\mathbf{0}\}$ è un sottospazio di ogni spazio vettoriale E.*

Dimostrazione. Sia E uno spazio vettoriale su K. Risulta: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; per la proposizione 37 è $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \lambda \in K$, quindi sono verificate le proprietà 1 e 2, da cui l'asserto. ■

Esempio 50 *Asegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dire quali tra i suoi seguenti sottoinsiemi è uno sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:*
$H_1 = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$*;* $H_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a + b + c = 0\}$*,* $H_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a \geq 0\}$*;*
$H_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

Soluzione 51 *Prendiamo ad arbitrio due elementi di H_1:*

$$\mathbf{v} = (a, b, 0) \, , \quad \mathbf{w} = (c, d, 0)$$

Risulta:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + c, b + d, 0) \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H_1$$

Preso ad arbitrio $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, 0) \in H$$

Si conclude che H_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
Consideriamo H_2. Per ogni $\mathbf{v} = (a, b, c) \in H_2$, $\mathbf{w} = (d, e, f) \in H_2$, la somma è:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a', b', c') \, ,$$

essendo:

$$a' = a + d, \ b' = b + e, \ c' = c + f$$

Risulta:

$$a' + b' + c' = (a + b + c) + (d + e + f) = 0$$

Quindi:
$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_2, \quad (\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in H_2 \tag{2.13}$$
Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$*:*
$$\lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c),$$
ed è tale che:
$$\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda (a+b+c) = 0,$$
per cui:
$$\forall \mathbf{v} \in H_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ (\lambda \mathbf{v}) \in H_2 \tag{2.14}$$
Le (2.13)-(2.14) implicano che H_2 *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$*.*
L'insieme H_3 *è:*
$$H_3 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a \geq 0\right\}$$
Quindi:
$$\forall \lambda \in (-\infty, 0), \forall \mathbf{v} = (a,b,c) \in H_3, \ \lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \ \text{con } \lambda a \leq 0 \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \notin H_3$$
Si conclude che H_3 ***non*** *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$*.*
L'insieme H_4 *è:*
$$H_4 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a^2+b^2+c^2 \leq 1\right\}$$
Abbiamo:
$$\forall \mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall \mathbf{w} = (d,e,f) \in \mathbb{R}^3, \ \mathbf{v}+\mathbf{w} = (a', b', c'),$$
essendo:
$$a' = a+d, \ b' = b+e, \ c' = c+f$$
Da ciò segue:
$$\begin{aligned} a'^2 + b'^2 + c'^2 &= (a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \\ &= f(a,b,c) + f(d,e,f) + 2(ad+eb+cf) \end{aligned} \tag{2.15}$$
Nella (2.15) è:
$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$
Deve essere:
$$\forall (a,b,c), (d,e,f,) \in H_4, \ f(a,b,c), f(d,e,f) \leq 1,$$
per cui:
$$a'^2+b'^2+c'^2 \leq 2(1+ad+eb+cf) \Longrightarrow \left(\exists (a,b,c), (d,e,f,) \in H_4 : a'^2+b'^2+c'^2 > 1\right) \tag{2.16}$$
La (2.16) implica che H_4 ***non*** *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$*.*

Esempio 52 *Consideriamo lo spazio vettoriale* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *(es. 34). Dire quale tra i seguenti suoi sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:*
$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ A \text{ è simmetrica}\} \\ H'_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ AX = XA\}, \text{ con } X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) \\ J_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ \det A = 0 \ \} \\ J'_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \left\{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ A^2 = 0 \ \right\} \end{aligned}$$

Soluzione 53 $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $A+B = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}) = (A,B$ *simmetriche*$) = (c_{ji} = a_{ji} + b_{ji})$, *quindi:*

$$\forall A, B \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n), \quad (A+B) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{2.17}$$

Inoltre: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(\lambda A) = (\lambda a_{ij}) = (\lambda a_{ji})$, *perciò:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n), \quad (\lambda A) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{2.18}$$

Le (2.17)-(2.18) implicano che $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $\mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *è l'insieme delle matrici di* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *che commutano con un'assegnata matrice* $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
Risulta: $\forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(A+B)X = AX + BX = XA + XB = X(A+B)$, *donde:*

$$\forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n), (A+B)X = X(A+B) \Longrightarrow (A+B) \in \forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{2.19}$$

Inoltre: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda(XA) = (\lambda X)A = X(\lambda A)$, *donde:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n), \ (\lambda A)X = X(\lambda A) \Longrightarrow (\lambda A) \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{2.20}$$

Le (2.19)-(2.19) implicano che $\mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $J_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *è l'insieme delle matici di* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *a determinante nullo. Risulta:*

$$(\exists A, B \in J_{\mathbb{R}}(n \times n): \ \det(A+B) \neq \det A + \det B = 0) \Longrightarrow (A+B) \notin J_{\mathbb{R}}(n \times n),$$

donde $J_{\mathbb{R}}(n \times n)$ ***non*** *è un sottospazio di* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $J'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *è l'insieme delle matici di* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ *idempotenti. Risulta:*

$$\forall A, B \in J'_{\mathbb{R}}(n \times n), \quad (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Evidentemente:

$$\exists A, B \in J'_{\mathbb{R}}(n \times n), \quad (A+B)^2 = A^2+B^2+AB+BA \neq (A+B)^2 \Longrightarrow (A+B) \notin J'_{\mathbb{R}}(n \times n),$$

donde $J'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ ***non*** *è un sottospazio di* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.

Esempio 54 *Sia* $C(a,b)$ *l'insieme delle funzioni reali e continue in* $[a,b]$:

$$C(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è ivi continua}\}$$

Introducendo le operazioni di somma di vettori e moltiplicazione di uno scalare per un vettore, $C(a,b)$ *assume la struttura di spazio vettoriale. Ora consideriamo l'insieme delle funzioni reali derivabili in* $[a,b]$:

$$H = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è ivi derivabile}\}$$

Risulta:

$$(\forall f \in H, \ f \text{ è derivabile in } [a,b]) \Longrightarrow (f \text{ è continua in } [a,b]) \Longrightarrow H \subset C(a,b)$$

Inoltre H *è chiuso rispetto alle leggi di composizione sopra definite, da cui si conclude che* H *è un sottospazio vettoriale di* $C(a,b)$.

***

Proposizione 55 *Sia E uno spazio vettoriale su K. Se $H_1, H_2, ..., H_n$ sono sottospazi di E, allora $\cap_{i=1}^{n} H_i$ è un sottospazio vettoriale di E.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che:

$$(\forall i \in (1, 2, ..., n)\,,\ H_i \subseteq E) \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} H_i \subseteq E$$

$$(\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_i \quad (i = 1, 2, ..., n)) \Longrightarrow \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

Inoltre H_i è un sottospazio di E, quindi:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w} \in H_i \quad (i = 1, 2, ..., n)) \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

$$(\forall \lambda \in K, \quad (\lambda \mathbf{v}) \in H_i \quad (i = 1, 2, ...n)) \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i,$$

donde l'asserto. ■

Teorema 56 *Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di E. Sia A l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori di Σ:*

$$A \overset{def}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \mid \lambda_i \in K,\ \mathbf{v}_i \in \Sigma, \quad (i = 1, 2, ...r) \right\} \subseteq E \tag{2.21}$$

L'insieme (2.21) è un sottospazio vettoriale di E.

Dimostrazione. Presi ad arbitrio due elementi di A:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \mathbf{v}_i,$$

risulta:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + \mu_i)\, \mathbf{v}_i \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in A$$

$$\forall \lambda \in K,\ \lambda \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\lambda}_i \mathbf{v}_i \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \in A, \quad \text{essendo } \tilde{\lambda}_i \overset{def}{=} \lambda \lambda_i$$

donde l'asserto. ■

Definizione 57 *L'insieme (2.21) si chiama* **sottospazio generato da** Σ *e si indica con* $A\,[\Sigma]$.

Esercizio 58 *Assegnato il sistema* $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3)\,,\ \mathbf{v}_1 = (2, 3, 0, -1)\,,\ \mathbf{v}_1 = (2, -1, 2, 1)$$

provare che $\mathbf{v} \in A[\Sigma]$*, essendo* $\mathbf{v} = (3, 9, -4, -2)$*.*

Soluzione 59 *Risulta:*

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \iff \left(\exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0) : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) \tag{2.22}$$

La (2.22) si scrive:

$$\lambda_1 (1, -2, 0, 3) + \lambda_2 (2, 3, 0, -1) + \lambda_3 (2, -1, 2, 1) = (3, 9, -4, -2)$$

cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 9 \\ 0 + 0 + 2\lambda_3 &= -4 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= -2 \end{aligned} \tag{2.23}$$

La caratteristica del sistema lineare (2.23) è $p = 3$*, per cui esso è equivalente a:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 9 \\ 0 + 0 + 2\lambda_3 &= -4, \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 3, -2)$*. Si conclude che* $\mathbf{v} \in A[\Sigma]$*, poichè* $\mathbf{v}$ *si esprime come combinazione lineare dei vettori di* Σ*:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$$

***

Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di E. Abbiamo la seguente:

Proposizione 60 $\left(\begin{array}{c} \Sigma \textit{ è linearmente} \\ \textit{indipendente} \end{array}\right) \iff \left(\forall \mathbf{v} \in A[\Sigma]\,,\ \exists!\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i\right)$

Dimostrazione. Implicazione diretta
Hp Σ è lin. indip.
Per definizione di spazio vettoriale generato da Σ, deve essere:

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \Longrightarrow \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Se esiste una seconda *r-pla* di scalari $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r) : \mathbf{v} = \sum_i \mu_i \mathbf{v}_i$, abbiamo il sistema di equazioni:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$
$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

Sottraendo la seconda dalla prima:

$$(\lambda_1 - \mu_1)\,\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\,\mathbf{v}_2 + ... + (\lambda_r - \mu_r)\,\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{2.24}$$

Ma Σ è linearmente indipendente, per cui la (2.24) implica:

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = ... = \lambda_r - \mu_r = 0,$$

cioè:

$$\lambda_i = \mu_i, \ \text{ per } i = 1, 2, ..., r,$$

da cui esistenza ed unicità della *r-pla* di scalari $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$.
Implicazione inversa
Hp:

$$\forall \mathbf{v} \in A\,[\Sigma]\,, \exists!\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{2.25}$$

Per la proposizione 48 è $\mathbf{0} \in A\,[\Sigma]$, quindi la (2.25) per $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si scrive:

$$\exists!\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) : \mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r \tag{2.26}$$

L'unica *r-pla* $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$ che verifica la (2.26) è $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) = (0, 0, ..., 0)$, da cui Σ è linearmente indipendente. ■
La proposizione (60) ci dice che se Σ è un sistema di vettori linearmente indipendente, ogni vettore appartenente al sottospazio generato da Σ, si esprime in uno e un sol modo come combinazione lineare dei vettori di Σ.

Lemma 61 *Siano $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$, $\Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ due sistemi di vettori di E. Se Σ' è linearmente indipendente e ogni suo vettore dipende linearmente dai vettori di Σ, allora è $p \leq r$.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo supponendo che sia: $p = r + 1$. Per ipotesi:

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji} \mathbf{v}_i, \quad \text{per } j = 1, 2, ..., r, r+1 \tag{2.27}$$

Scriviamo la (2.27) per $j = j_1 \in \{1, 2, ..., r+1\}$:

$$\mathbf{u}_{j_1} = \lambda_{j_1 1} \mathbf{v}_1 + \lambda_{j_1 2} \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_{j_1 r} \mathbf{v}_r \tag{2.28}$$

Risulta:

$$\Sigma \text{ linearmente indipendente}) \Longrightarrow \mathbf{u}_{j_1} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow (\lambda_{j_1 1}, \lambda_{j_1 2}, ..., \lambda_{j_1 r}) \neq (0, 0, ..., 0)$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $\lambda_{j_1 1} \neq 0$. Dalla (2.28):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} - \frac{\lambda_{j_1 2}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{v}_2 - ... - \frac{\lambda_{j_1 r}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{v}_r \\ &= \frac{1}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} - \lambda'_{j_1 2} \mathbf{v}_2 - ... - \lambda'_{j_1 r} \mathbf{v}_r, \end{aligned} \tag{2.29}$$

essendo:

$$\lambda'_{j_1 i} \overset{def}{=} \frac{\lambda_{j_1 i}}{\lambda_{j_1 1}}, \quad i = 2, 3, ..., r$$

In tal modo la (2.27) diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \lambda_{j1} \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_{ji} \mathbf{v}_i \\ &= \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 2} \mathbf{v}_2 - ... - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 r} \mathbf{v}_r + \sum_{i=2}^{r} \lambda_{ji} \mathbf{v}_i \\ &= \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} + \left(\lambda_{j2} - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 2} \right) \mathbf{v}_2 + ... + \left(\lambda_{jr} - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 r} \right) \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

cioè:

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\lambda}_{j1} \mathbf{u}_{j_1} + \sum_{i=2}^{r} \tilde{\lambda}_{ji} \mathbf{v}_i \quad \text{per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\} \tag{2.30}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{ji} &= \lambda_{ji} - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 i} \text{ per } i = 2, ..., r \\ \tilde{\lambda}_{j1} &= \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}} \end{aligned}$$

Esplicitiamo la sommatoria a secondo membro della (2.30):

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\lambda}_{j1} \mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j2} \mathbf{v}_2 + \tilde{\lambda}_{j3} \mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{jr} \mathbf{v}_r, \quad \text{per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\} \tag{2.31}$$

Scriviamo la (2.31) per $j = j_2 \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\}$:

$$\mathbf{u}_{j_2} = \tilde{\lambda}_{j_2 1} \mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j_2 2} \mathbf{v}_2 + \tilde{\lambda}_{j_2 3} \mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{j_2 r} \mathbf{v}_r \tag{2.32}$$

Risulta:

$$\Sigma \text{ linearmente indipendente}) \Longrightarrow \mathbf{u}_{j_2} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \left(\tilde{\lambda}_{j_2 2}, \tilde{\lambda}_{j_2 3}, ..., \tilde{\lambda}_{j_2 r} \right) \neq (0, 0, ..., 0)$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $\lambda_{j_2 2} \neq 0$. Dalla (2.32):

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}} \mathbf{u}_{j_2} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 1}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}} \mathbf{u}_{j_1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 3}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}} \mathbf{v}_3 - ... - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 r}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}} \mathbf{v}_r$$

In tal modo la (2.31) diventa:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j &= \tilde{\lambda}_{j1}\mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j2}\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\mathbf{u}_{j_2} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_21}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\mathbf{u}_{j_1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_23}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\mathbf{v}_3 - ... - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2r}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\mathbf{v}_r\right) + \tilde{\lambda}_{j3}\mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{jr}\mathbf{v}_r \\ &= \left(\tilde{\lambda}_{j1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j2}\tilde{\lambda}_{j_21}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\right)\mathbf{u}_{j_1} + \frac{\tilde{\lambda}_{j2}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\mathbf{u}_{j_2} + \left(\tilde{\lambda}_{j3} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_23}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\right)\mathbf{v}_3 + ... + \left(\tilde{\lambda}_{jr} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_2r}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\right)\mathbf{v}_r\end{aligned}$$

cioè:

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\lambda}'_{j1}\mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}'_{j2}\mathbf{u}_{j_2} + \sum_{i=1}^{3}\tilde{\lambda}'_{ji}\mathbf{v}_i, \text{ per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1, j_2\} \tag{2.33}$$

essendo:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}'_{ji} &= \tilde{\lambda}_{ji} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_23}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}, \quad i \in \{1, ..., r\} - \{2\} \\ \tilde{\lambda}'_{j2} &= \frac{\tilde{\lambda}_{j2}}{\tilde{\lambda}_{j_22}}\end{aligned}$$

Il procedimento può essere iterato r volte, ottenendo:

$$\mathbf{u}_{j_{r+1}} = \mu_{j_1}\mathbf{u}_{j_1} + \mu_{j_2}\mathbf{u}_{j_2} + ... + \mu_{j_r}\mathbf{u}_{j_r}$$

Abbiamo quindi trovato un vettore di Σ' che dipende linearmente dai rimanenti vettori di Σ', quindi per la proposizione 47, Σ' è linearmente dipendente. Ma ciò contraddice l'ipotesi secondo cui Σ' è linearmente indipendente, da qui la tesi. ∎

2.4 Sistemi di ordine massimo

Sia E uno spazio vettoriale sul campo K. Un sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ di vettori di E si dice **sistema di ordine massimo**, se:

1. Σ è linearmente indipendente.
2. $\forall p > r \mid \Sigma' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_p\} \subseteq E \Longrightarrow \Sigma'$ è linearmente dipendente.

Abbiamo la seguente:

Proposizione 62 *Se $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ è un sistema di ordine massimo relativamente allo spazio vettoriale E:*

$$\left(\begin{array}{c}\forall \Sigma' \subseteq E,\ \Sigma' \supset \Sigma \\ \Sigma' \text{è } \textit{linearmente dipendente}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall \mathbf{v} \in E - \Sigma,\ \mathbf{v}\ \textit{dipende} \\ \textit{linearmente da } \Sigma\end{array}\right)$$

Dimostrazione. Implicazione diretta
Per ipotesi:

$$\forall \mathbf{v} \in E - \Sigma,\ \Sigma \subset \Sigma \cup \{\mathbf{v}\} \subseteq E\ ,\ \Sigma \cup \{\mathbf{v}\} \text{ è linearmente dipendente} \tag{2.34}$$

La (2.34) implica:

$$\lambda\mathbf{v}+\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+...+\lambda_r\mathbf{v}_r=\mathbf{0} \qquad (2.35)$$
$$(\lambda,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r)\neq(0,...,0)$$

Σ è linearmente indipendente $\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_r=0 \Longrightarrow \lambda\neq 0$
Quindi:

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{r}\tilde{\lambda}_i\mathbf{v}_i, \qquad (2.36)$$

essendo:

$$\tilde{\lambda}_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda},\ \ i=1,2,...,r,$$

da cui la tesi.
Implicazione inversa.
Per ipotesi: $\forall\mathbf{v}\in E-\Sigma$, $\mathbf{v}$ dipende linearmente da Σ. Per la proposizione 46 il sistema $\Sigma'=\Sigma\cup\{\mathbf{v}\}$ è linearmente dipendente. In forza dell'arbitrarietà di $\mathbf{v}\in E-\Sigma$, ogni $\Sigma'\subseteq E$ e tale che $\Sigma'\supset\Sigma$ è linearmente dipendente, cioè la tesi. ■

Proposizione 63 *Sia E uno spazio vettoriale su K.*

$$\left(\begin{array}{c}\Sigma=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}\ \textit{ è un sistema}\\ \textit{di ordine massimo}\end{array}\right)\Longrightarrow\left(\begin{array}{c}\forall p>r,\ \Sigma'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_p\}\subseteq E\\ \textit{è linearmente dipendente}\end{array}\right)$$

Dimostrazione. Per la proposizione 62:

$$(\forall i\in\{1,2,...,p\},\mathbf{u}_i\in E)\Longrightarrow(\mathbf{u}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma) \qquad (2.37)$$

Per il lemma 61 deve essere $p>r$, affinché Σ' sia linearmente dipendente. ■

Proposizione 64 *Sia E uno spazio vettoriale su K.*

$$\left(\begin{array}{c}\Sigma=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\},\ \Sigma'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_p\}\\ \textit{due sistemi di ordine massimo}\end{array}\right)\Longrightarrow(p=r)$$

Dimostrazione. Per il lemma 61:

$$\forall\mathbf{u}_i\in\boldsymbol{\Sigma}',\ \mathbf{u}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma\Longrightarrow p\leq r$$
$$\forall\mathbf{v}_i\in\boldsymbol{\Sigma},\ \mathbf{v}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma'\Longrightarrow r\leq p$$

cioè:

$$(p\leq r,\ r\leq p)\Longleftrightarrow p=r$$

■

Proposizione 65 *Sia E uno spazio vettoriale su K dotato di un sistema $\Sigma=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ di ordine massimo.*

$$\left(\begin{array}{c}\Sigma'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_r\}\\ \textit{è linearmente indipendente}\end{array}\right)\Longrightarrow\left(\begin{array}{c}\Sigma'\ \textit{è un sistema di}\\ \textit{ordine massimo}\end{array}\right)$$

Dimostrazione. $\forall\mathbf{v}\in E-\Sigma'$, $\Sigma'\cup\{\mathbf{v}\}$ è linearmente dipendente in forza della proposizione 62, $\mathbf{v}$ dipende linearmente da Σ' (proposizione 62). In forza dell'arbitrarietà di $\mathbf{v}\in E-\Sigma$, segue che Σ' è un sistema di ordine massimo. ■

2.5 Basi e dimensioni di uno spazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale sul campo K.

Definizione 66 *Ogni sistema di ordine massimo è una* **base** *di E.*

Definizione 67 *Se $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ è una base di E, l'intero naturale r è la* **dimensione** *di E e si indica con $\dim E$.*

Tipicamente una base di E è indicata con:

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_r\} \equiv \{\mathbf{e}_i\} \tag{2.38}$$

Per ogni $\mathbf{v} \in E$:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{e}_r \tag{2.39}$$

Gli scalari $(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_r)$ sono le **componenti** del vettore $\mathbf{v}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$, e si indicano con $(v_1, v_2, ..., v_r)$, per cui:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + ... + v_r \mathbf{e}_r \tag{2.40}$$

Esempio 68 *Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sul campo reale $\mathbb{R}$. I* **vettori unitari** *di $\mathbb{R}^n$:*

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)\,,\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0)\,, ...,\ \mathbf{e}_r = (0, 0, ..., 1)\,,$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$.
Infatti preso ad arbitrio un vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_1, 0, ..., 0) + (0, v_2, ..., 0) + ... (0, 0, ..., v_n) \\ &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + ... + v_n \mathbf{e}_n\end{aligned}$$

Esempio 69 *Consideriamo lo spazio vettoriale $P_n[x]$ su $\mathbb{R}$. Un qualunque vettore di $P_n[x]$:*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{2.41}$$

Il sistema di vettori:

$$\{e_0(x), e_1(x), e_2(x), ..., e_n(x)\}\,, \tag{2.42}$$

essendo:

$$e_0(x) = 1,\quad e_1(x) = x,\quad e_2(x) = x^2, ..., e_n(x) = x^n$$

è una base. Infatti, preso ad arbitrio il polinomio:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

vediamo che $p_n(x)$ è univocamente determinato dalla n+1-pla di scalari $(a_0, a_1, ..., a_n)$. Da ciò segue che $\{e_i(x)\}$ è una base di $\mathcal{P}_n[x]$ e $(a_0, a_1, ..., a_n)$ sono le componenti di $p_n(x)$ nella suddetta base. Inoltre:

$$\dim P_n[x] = n + 1$$

Per fissare le idee consideriamo $P_3[x]$, quindi:

$$e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x,\quad e_2(x) = x^2$$

Prendiamo il vettore:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 + 3x + 2x^2 \\ &= 3e_0(x) + 3e_1(x) + 2e_2(x) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Pertanto $p(x)$ ha componenti $(2,3,3)$ nella base $\{1, x, x^2\}$. Ora consideriamo il sistema di vettori$\{e_i'(x)\}$

$$e_0'(x) = 1 + x + x^2,\ e_1'(x) = 1 - x + x^2,\ e_2'(x) = 1 - x^2 \tag{2.44}$$

cioè

$$\begin{aligned} e_0'(x) &= e_0(x) + e_1(x) + e_2(x) \\ e_1'(x) &= e_0(x) - e_1(x) + e_2(x) \\ e_2'(x) &= e_0(x) - e_2(x) \end{aligned}$$

Verifichiamo che il sistema (2.44) è linearmente indipendente.
Abbiamo:

$$\mu_0 e_0' + \mu_1 e_1' + \mu_2 e_2' = 0$$

Cioè:

$$(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2)\, e_0 + (\mu_0 - \mu_1 + \mu_2)\, e_1 + (\mu_0 + \mu_1 - \mu_2)\, e_2 = 0$$

Ma il sistema di vettori $\{e_i\}$ è linearmente indipendente, donde:

$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = \mu_0 - \mu_1 + \mu_2 = \mu_0 + \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Abbiamo così ottenuto il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 &= 0 \\ \mu_0 - \mu_1 + \mu_2 &= 0 \\ \mu_0 + \mu_1 - \mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

il cui rango è $r(A) = 3$, donde il sistema ammette la sola soluzione banale $(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = (0,0,0)$. Il sistema (2.44) è manifestamente una base di $P_3[x]$, giacchè è del medesimo ordine di (2.42). Determiniamo quindi le componenti del vettore (2.43) nella base (2.44). A tale scopo scriviamo:

$$p(x) = a_0' e_0'(x) + a_1' e_1'(x) + a_2' e_2'(x),$$

equivalente al sistema di Cramer:

$$\begin{aligned} a_0' + a_1' + a_2' &= 3 \\ a_0' + a_1' + 0 &= 3 \\ a_0' + a_1' - a_2' &= 2, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è $(a_0', a_1', a_2') = \left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. *Pertanto le componenti di (2.43) nella base (2.44) sono:*

$$\left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi scriviamo:

$$p(x) = \frac{11}{4} e_0'(x) - \frac{1}{4} e_1'(x) + \frac{1}{2} e_2'(x)$$

2.6 Spazi infinito-dimensionali

Negli esempi visti nella sezione precedente, lo spazio vettoriale assegnato è tale che $\dim E = n < +\infty$. Ci si può chiedere se esistono spazi tali che $\dim E \to +\infty$. La risposta è affermativa e in tal caso di dice che lo spazio vettoriale è **infinito-dimensionale**[1]**.** Alcuni esempi:

Esempio 70 *Sia* $P_n[x]$ *lo spazio vettoriale dei polinomi di grado* $\leq n$*. Per quanto visto è* $\dim P_n[x] = n+1$*. Ora consideriamo l'insieme* $P_\infty[x]$ *di tutti i polinomi in* x *e a coefficienti in* $\mathbb{R}$*. È facile rendersi conto che si tratta di uno spazio vettoriale. Possiamo scrivere convenzionalmente:*

$$P_\infty[x] = \lim_{n \to +\infty} P_n[x]$$

donde:

$$\dim P_\infty[x] = \lim_{n \to +\infty} \dim P_n[x] = \lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$$

Esempio 71 *Sia*

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è ivi continua}\}$$

Come è noto, $C[a,b]$ *assume la struttura di spazio vettoriale quando si introducono le usali leggi di composizione. Osserviamo che:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \Lambda_n = \left\{1, x, x^2, ..., x^n, x^{n+1}, ...\right\}$$

è una base di $C[a,b]$*, donde* $\dim C[a,b] = +\infty$*.*

2.7 Cambiamento di base

Nell'esempio precedente abbiamo esaminato la possibilità di esprimere un vettore come combinazione lineare di due basi distinte. Ci proponiamo di formalizzare tale importante nozione che prende il nome di **cambiamento di base**. Siano $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}_i'\}$ due basi distinte del medesimo spazio vettoriale E su K. Evidentemente:

[1] La dimensione può essere infinita numerabile o infinita con la potenza del continuo.

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} \mathbf{e}_k \tag{2.45}$$

Qui α_{ik} compongono una matrice $R\,(r \times r)$ sul campo K. A loro volta i vettori $\mathbf{e}_i$ si esprimono come combinazione lineare dei vettori di $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{r} \beta_{ik} \mathbf{e}'_k \tag{2.46}$$

In maniera analoga, i coefficienti β_{ik} della combinazione lineare sono gli elementi di matrice di $R'\,(r \times r)$ sul campo K.
Sostituendo la (2.45) nella (2.46):

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{r} \beta_{ik} \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ik} \alpha_{kj} \mathbf{e}_j \tag{2.47}$$

Il vettore $\mathbf{e}_i$ si scrive:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{r} \delta_{ij} \mathbf{e}_j,$$

essendo $\delta_{ki} = \delta_{ik}$ il *simbolo di Kronecher*:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = k \\ 0, \text{ se } i \neq k \end{cases}$$

La (2.47) diventa:

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ik} \alpha_{kj} \mathbf{e}_j - \sum_{j=1}^{r} \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie nel primo termine:

$$\sum_{j=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{r} (\beta_{ik} \alpha_{kj}) - \delta_{ij} \right] \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \tag{2.48}$$

Per definizione di base, il sistema di vettori $\{\mathbf{e}_i\}$ è linearmente indipendente, donde la (2.48) è verificata se e solo se:

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_{ik} \alpha_{kj} = \delta_{ij},$$

che è manifestamente equivalente alla relazione seguente:

$$R'R = \overline{1}$$

Allo stesso modo si dimostra che $RR' = \overline{1}$. Si conclude che:

$$R' = R^{-1}$$

Si consideri ora un vettore $\mathbf{v} \in E$ che ha componenti $(v_1, v_2, ..., v_r)$ in $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{r} v_k \mathbf{e}_k \tag{2.49}$$

Il medesimo vettore ha componenti $(v'_1, v'_2, ..., v'_r)$ in $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{r} v'_k \mathbf{e}'_k \tag{2.50}$$

Confrontando le (2.49)-(2.50) e tenendo conto della (2.46):

$$\sum_{i=1}^{r} v'_i \mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} v_k \beta_{kj} \mathbf{e}'_j$$

Eseguendo negli indici muti la sostituzione $(k, j) \to (j, i)$ e dopo una serie di passaggi:

$$v'_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} v_j \tag{2.51}$$

Indichiamo con $\mathbf{V}$ la matrice $(r \times 1)$ i cui elementi sono le componenti di $\mathbf{v}$ in $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{V} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

Quindi:

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \dots \\ v'_r \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

Con le posizioni (2.52)-(2.53), la (2.51) si scrive:

$$\mathbf{V}' = \left(R^{-1}\right)^T \mathbf{V}, \tag{2.54}$$

Esempio 72 *Assegnato il vettore* $\mathbf{v} = (1, 2)$ *nella base* $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ *dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^2$ *(su* $\mathbb{R}$*), si determinino le componenti di* $\mathbf{v}$ *rispetto alla base* $\mathbf{e}'_1 = (1, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (1, -1)$.

Soluzione 73 *La matrice* R *è:*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det R = -1 - 1 = -2$$

la cui aggiunta è:

$$R^{(a)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'inversa [eq. (1.51)]:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(R^{-1}\right)^T,$$

Per la (2.54):

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

quindi:

$$v_1' = \frac{3}{2}, v_2' = -\frac{1}{2}$$

Esempio 74 *Assegnato il vettore* $\mathbf{v} = (3, 2, 2)$ *nella base* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$*,* $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$*,* $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ *dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$ *(su* $\mathbb{R}$*), si determinino le componenti di* $\mathbf{v}$ *rispetto alla base* $\mathbf{e}_1' = (1, 0, 1)$*,* $\mathbf{e}_2' = (2, 1, 0)$*,* $\mathbf{e}_3' = (0, 1, 1)$*.*

Soluzione 75 *La matrice* R *è:*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inversa è:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Quindi il vettore colonna nella nuova base:

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si conclude che le componenti di $\mathbf{v}$ *nella nuova base sono:*

$$v_1' = 1,\ v_2' = 0,\ \ v_3' = 2$$

2.8 Somma di due spazi vettoriali

Sia E uno spazio vettoriale sul campo K. Se V e W sono due sottospazi di E, sussiste la seguente

Definizione 76 *Dicesi* **somma** *di* V *e* W*, l'insieme di vettori:*

$$V + W \overset{def}{=} \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V,\, \mathbf{w} \in W\} \tag{2.55}$$

Teorema 77 *L'insieme (2.55) è un sottospazio vettoriale di* E*.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $\emptyset \neq V+W \subseteq E$. Inoltre:
$\forall (\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1), (\mathbf{v}_2+\mathbf{w}_2) \in V+W$
$(\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1)+(\mathbf{v}_2+\mathbf{w}_2) = \underbrace{(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)}_{\stackrel{def}{=}\mathbf{v}'\in V} + \underbrace{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)}_{\stackrel{def}{=}\mathbf{w}'\in W} = \mathbf{v}'+\mathbf{w}'$
$\Longrightarrow ((\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1)+(\mathbf{v}_2+\mathbf{w}_2)) \in V+W$
Inoltre: $\forall\lambda \in K,\ \forall (\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in V+W,\ \lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \underset{\in V}{(\lambda\mathbf{v})} + \underset{\in W}{(\lambda\mathbf{w})} \Longrightarrow (\lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w})) \in V+W$,
donde l'asserto. ■

Esempio 78 *Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2\times 2)$. Prendiamo i sottoinsiemi:*

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ W &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a,c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned} \tag{2.56}$$

È facile rendersi conto che V e W sono sottospazi di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2\times 2)$. La somma è:

$$V+W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Osserviamo che:

$$V \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

Proposizione 79 $V, W \subseteq V+W$

Dimostrazione. (W sottospazio di E) $\Longrightarrow \mathbf{0} \in W \Longrightarrow \forall\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}+\mathbf{0}) \in V+W \Longrightarrow V \subseteq V+W$
Allo stesso modo si dimostra che $W \subseteq V+W$ ■

Proposizione 80 $V+W = L[V,W]$, *essendo $L[V,W]$ il sottospazio generato da V e W:*

$$L[V,W] = \left\{ \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i \mid \lambda_i \in K\ ,\ \mathbf{v}_i \in V \cup W \right\}$$

Dimostrazione. $V+W$ sottospazio di E tale che $V+W \supseteq V,W \Longrightarrow V+W \supseteq L[V,W]$
Preso ad arbitrio $\mathbf{u} \in V+W \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}+\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}$, con $\lambda=\mu=1$ e $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w} \in W$, quindi $\mathbf{u} \in L[V,W]$
Cioè:

$$\forall\mathbf{u} \in V+W,\ \mathbf{u} \in L[V,W] \Longrightarrow V+W \subseteq L[V,W]$$

Quindi:

$$\begin{aligned} V+W &\supseteq L[V,W] \\ V+W &\subseteq L[V,W], \end{aligned}$$

da ciò segue $V+W = L[V,W]$. ■

Definizione 81 *Dicesi **somma diretta** dei sottospazi V, W di E, e si indica con $V \oplus W$, il sottospazio U tale che:*

$$\mathbf{u} \in U \Longrightarrow \exists! \mathbf{v} \in V,\ \exists! \mathbf{w} \in W \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

Teorema 82

$$U = V \oplus W \Longleftrightarrow \begin{cases} U = V + W \\ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases}$$

Dimostrazione. Implicazione diretta
$U = V \oplus W \Longrightarrow (\mathbf{u} \in U \Longrightarrow \exists! \mathbf{v} \in V,\ \exists! \mathbf{w} \in W \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}\ ) \Longrightarrow U = V + W$
Preso ad arbitrio $\mathbf{u} \in V \cap W$, $\left(\mathbf{u} = \underset{\in V}{\mathbf{u}} + \underset{\in W}{\mathbf{0}},\ \mathbf{u} = \underset{\in V}{\mathbf{0}} + \underset{\in W}{\mathbf{u}} \right) \Longrightarrow \mathbf{u} = 0$
L'ultima implicazione segue dalla unicità dell'espansione del vettore $\mathbf{u}$. Quindi:

$$(\forall \mathbf{u} \in V \cap W,\ \mathbf{u} = \mathbf{0}) \Longrightarrow V \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

Implicazione inversa
Supponiamo che $\mathbf{u}$ sia esprimibile attraverso due espansioni:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \ \mathbf{u} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$$

Quindi:

$$\underbrace{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}_{\in V} = \underbrace{\mathbf{w} - \mathbf{w}'}_{\in W} \underset{V \cap W = \{\mathbf{0}\}}{\Longrightarrow} \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}',\ \mathbf{w} = \mathbf{w}'$$

Si conclude che:

$$U = V \oplus W$$

■

Definizione 83

$$(V, W \ \textbf{supplementari}\ \mathit{in}\ E) \Longleftrightarrow (E = V \oplus W)$$

Teorema 84 *Comunque prendiamo un sottospazio U di E, esiste un sottospazio W tale che*[2]*:*

$$E = U \oplus W$$

Inoltre:

$$\dim W = \dim E - \dim U,$$

o ciò che è lo stesso:

$$\dim (U \oplus W) = \dim U + \dim W \tag{2.57}$$

[2]Non univocamente determinato.

Dimostrazione. Poniamo:

$$\dim E = n, \quad \dim U = m$$

Consideriamo una base di U:

$$\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_m\}$$

Presi $n-m$ vettori linearmente indipendenti $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_{n-m}\}$, una base di E è:

$$\{\mathbf{g}_i\} \cup \{\mathbf{e}_{k_i}\} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_m, \mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, ..., \mathbf{e}_{k_n}\},$$

$\mathbf{a} \in E \Longrightarrow \exists! \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \lambda_{e_{k_1}}, \lambda_{e_{k_2}}, ..., \lambda_{e_{k_n}}\right) \mid \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \mathbf{g}_2 + ... + \lambda_m \mathbf{g}_m + \lambda_{k_1} \mathbf{g}_{k_1} + ... + \lambda_{k_n} \mathbf{g}_{k_n}$
da ciò segue:

$$E = U \oplus W$$
$$\dim W = n - m = \dim E - \dim W$$

■

Teorema 85

$$\dim (V + W) = \dim V + \dim W - \dim (V \cap W) \tag{2.58}$$

Dimostrazione. omessa ■

Osservazione 86 *La (2.58) riproduce la (2.57) se $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.*

Esempio 87 *Consideriamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^2$. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori non paralleli. Riferiamoci ai sottospazi generati dal singolo vettore:*

$$U = \{\lambda \mathbf{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$V = \{\mu \mathbf{v} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

Il sistema

$$\Lambda = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

è manifestamente una base di $\mathbb{R}^2$, donde:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \; \mathbf{v} = v_1 \mathbf{u} + v_2 \mathbf{v},$$

essendo (v_1, v_2) le componenti di $\mathbf{v}$ nella base Λ. Assegnato il vettore $\mathbf{v}$, tali componenti sono univocamente determinate, donde:

$$\mathbb{R}^2 = U \oplus V$$

***

La definizione 81 si generalizza a N sottospazi:

$$U = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_N \tag{2.59}$$

2.9 Esercizi proposti

1. Assegnati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v}_1 = (2,4)\,,\ \mathbf{v}_2 = (1,2)\,,\ \mathbf{v}_3 = (-1,1)\,,\ \mathbf{v}_4 = (3,6)\,,\ \mathbf{v}_5 = (4,5)\,,\ \mathbf{v}_6 = (3,9)\,,$$

provare che: 1) $\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_4$ sono proporzionali a $\mathbf{v}_1$; 2) $\mathbf{v}_5$ dipende linearmente da $\Sigma_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$; 3) $\mathbf{v}_4$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$; 4) $\mathbf{v}_6$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$; 5) $\mathbf{v}_3$ non dipende linearmente da Σ_2.

2. Assegnati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = (1,2,1)\,,\ \mathbf{v}_2 = (1,1,0)\,,\ \mathbf{v}_3 = (0,1,1)\,,\ \mathbf{v}_4 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{v}_5 = (2,1,-2)\,,\ \mathbf{v}_6 = (1,5,4)\,,$$

provare che: 1) $\mathbf{v}_4$,$\mathbf{v}_5$ non dipendono linearmente $\Sigma_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$; 2) $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_6$ dipendono linearmente da Σ_1; 3) $\mathbf{v}_5$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$; 4) $\mathbf{v}_6$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

3. Provare che il seguente sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-1,1)$, è linearmente indipendente. Esprimere quindi il vettore $\mathbf{v} = (1,-2,5)$ come combinazione lineare dei vettori di Σ.

4. Assegnato il sistema i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-1,1)$, scrivere il vettore $\mathbf{v} = (2,-5,3)$ come combinazione lineare dei vettori di Σ.

5. Provare che il seguente sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (3,0,-2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,-1,-5)$, è linearmente indipendente. Determinare poi per quali valori del parametro reale k il vettore $\mathbf{v} = (1,-2,k)$ si esprime come combinazione lineare dei vettori di Σ.

6. Sia $\Sigma = \{u(x), v(x), w(x)\}$ un sistema di vettori di $\mathcal{P}_2[x]$ (spazio vettoriale i cui vettori sono i polinomi su $\mathbb{R}$ di grado ≤ 2).

$$u(x) = x^2 - 2x + 5,\ v(x) = 2x^2 - 3x,\ \ w(x) = x + 3$$

Dimostrare che Σ è linearmente indipendente ed esprimere il vettore $p(x) = x^2 + 4x - 3$ come combinazione lineare dei vettori di Σ.

7. Assegnati i vettori di $\mathcal{P}_2[x]$:

$$\begin{array}{lll} a(x) = x^2 - x + 1 & b(x) = x^2 + x - 1 & c(x) = x^2 \\ d(x) = -x + 1 & e(x) = 2x^2 - x + 2 & f(x) = x^2 + x - 2 \end{array},$$

mostare che: 1) $b(x)$ non è proporzionale a $a(x)$; 2) $c(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_1 = \{a(x), b(x)\}$; 3) $e(x)$ non dipende linearmente da Σ_1; 4) $e(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{a(x), b(x), c(x)\}$; 5) $d(x)$ dipende linearmente da Σ_2; 6) $f(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{a(x), b(x), e(x)\}$.

8. Provare che il sistema $\Sigma = \left\{e_1(x) = 1, e_2(x) = x - 1, e_3(x) = (x-1)^2\right\}$ è una base di $\mathcal{P}_2[x]$, e trovare le componenti di $p(x) = 4x^2 - x + 1$ in Σ.

9. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si considerino le basi:

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = (1,0,0), \ \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \ \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \\ \mathbf{e}'_1 = (1,1,1), \ \mathbf{e}'_2 = (1,1,0), \ \mathbf{e}'_3 = (1,0,0) \end{array}$$

Determinare le componenti dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nella base $\{\mathbf{e}'_i\}$, essendo note le loro componenti nella base $\{\mathbf{e}_i\}$: $\mathbf{v} = (4, -3, 2)$, $\mathbf{w} = (a, b, c)$.

10. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri l'insieme:

$$H = \left\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : 2v_1 + v_2 - v_3 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Dimostrare che H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, determinandone una base.

11. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathcal{P}_4[\cos x]$, i cui vettori sono i polinomi in $\cos x$, di grado non superiore a 4. Ad esempio, nella base:

$$\{e_i(\cos x)\} = \left\{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x\right\}$$

il generico vettore è:

$$p(\cos x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos^2 x + a_3 \cos^3 x + a_4 \cos^4 x$$

Assegnata la base:

$$\{e'_i(\cos x)\} = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\},$$

scrivere le equazioni di trasformazioni che permettono il cambiamento di base:

$$\begin{array}{l} \{e_i(\cos x)\} \to \{e'_i(\cos x)\} \\ \{e'_i(\cos x)\} \to \{e_i(\cos x)\} \end{array}$$

Soluzione

Abbiamo:

$$e'_i(\cos x) = \sum_{k=0}^{4} \alpha_{ik} e_k(\cos x) \tag{2.60}$$

Utilizziamo le seguenti formule trigonometriche:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \cos 4x &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Scrivendo la (2.60) componente per componente, si ottiene la matrice $R = (\alpha_{ik})$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Quindi l'inversa:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$p(\cos x) \doteq \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad \text{nella base } \{e_i\},$$

dove il simbolo $\doteq$ significa "rappresentato da. Similmente:

$$p'(\cos x) \doteq \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix} \quad \text{nella base } \{e'_i\}$$

Le componenti nelle rispettive basi sono legate da:

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Cioè:

$$
\begin{aligned}
a_0' &= a_0 \\
a_1' &= a_1 \\
a_2' &= \frac{1}{2}(a_0 + a_1) \\
a_3' &= \frac{1}{4}(3a_1 + a_3) \\
a_4' &= \frac{1}{2}(3a_0 + 4a_2 + a_4)
\end{aligned}
$$

Invertendo la (2.62):

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a_0' \\
a_1 &= a_1' \\
a_2 &= -a_0' + 2a_2' \\
a_3 &= -3a_1' + 4a_3' \\
a_4 &= a_0' - 8a_2' + 8a_4'
\end{aligned}
$$

2.9.1 Soluzioni

1. Il quesito 1 si risolve banalmente:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_4 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1$$

Quesito 2:

$$\mathbf{v}_5 = \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_3$$

cioè:

$$\lambda(2,4) + \mu(-1,1) = (4,5) \iff \begin{cases} 2\lambda - \mu = 4 \\ 4\lambda + \mu = 5 \end{cases},$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda, \mu) = (3/2, -1)$, quindi:

$$\mathbf{v}_5 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$$

Quesito 3:

$$\mathbf{v}_4 = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2,$$

cioè:

$$\alpha(2,4) + \beta(1,2) = (3,6) \iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + 2\beta = 6 \end{cases},$$

che ammette ∞^1soluzioni $(\alpha, \beta) = (\alpha, 3 - 2\alpha)$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, quindi:

$$\mathbf{v}_4 = 3\mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{v}_1, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

Quesito 4:

$$\mathbf{v}_6 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_3 + \nu \mathbf{v}_4,$$

cioè:

$$\lambda\,(2,4) + \mu\,(-1,1) + \nu\,(4,5) = (3,9) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu + 4\nu = 3 \\ 4\lambda + \mu + 5\nu = 9 \end{cases},$$

che ammette ∞^1soluzioni $(\lambda, \mu, \nu) = \left(2 - \frac{3}{2}\nu, 1 + \nu, \nu\right)$, $\forall \nu \in \mathbb{R}$, quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_6 &= \left(2 - \frac{3}{2}\nu\right) \mathbf{v}_1 + (1 + \nu)\, \mathbf{v}_3 + \nu \mathbf{v}_5 \\ &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \nu \left(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5 - \frac{3}{2}\mathbf{v}_1\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quesito 5:

$$\mathbf{v}_3 = \gamma \mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\gamma\,(2,4) + \delta\,(1,2) = (-1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\gamma + \delta = -1 \\ 4\gamma + 2\delta = 1 \end{cases}$$

Tale sistema è incompatibile $\Longrightarrow \nexists\,(\gamma, \delta) : \mathbf{v}_3 = \gamma \mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_2$.

2. Quesito 1:

$$\mathbf{v}_4 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda\,(1,2,1) + \mu\,(1,1,0) = (1,1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 0 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema lineare è incompatibile, quindi $\nexists\,(\lambda, \mu) : \mathbf{v}_4 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$.

$$\mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda\,(1,2,1) + \mu\,(1,1,0) = (2,1,-2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 0 = -2 \end{cases}$$

Tale sistema lineare è incompatibile, quindi $\nexists\,(\lambda, \mu) : \mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$.

Quesito 2:

$$\mathbf{v}_3 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda\,(1,2,1) + \mu\,(1,1,0) = (0,1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 0 = 1 \end{cases}$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Longrightarrow (\lambda, \mu) = (1, -1)$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Imponiamo che:

$$\mathbf{v}_6 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\alpha (1, 2, 1) + \beta (1, 1, 0) = (1, 5, 4) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 5 \\ \alpha + 0 = 4 \end{cases}$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{cases} \Longrightarrow (\alpha, \beta) = (4, -3) \, ,$$

quindi:

$$\mathbf{v}_6 = 4\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$$

Quesito 3:

$$\mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \nu \mathbf{v}_4,$$

cioè:

$$\lambda (1, 2, 1) + \mu (1, 1, 0) + \nu (1, 1, 1) = (2, 1, -2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 2 \\ 2\lambda + \mu + \nu = 1 \\ \lambda + 0 + \nu = -2 \end{cases}$$

Tale sistema è compatibile e determinato: $\exists! \, (\lambda, \mu, \nu) = (-1, 4 - 1)$, donde:

$$\mathbf{v}_5 = -\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4$$

Quesito 4:

$$\mathbf{v}_6 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \nu \mathbf{v}_3,$$

cioè:

$$\lambda (1, 2, 1) + \mu (1, 1, 0) + \nu (0, 1, 1) = (1, 5, 4) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 0 = 1 \\ 2\lambda + \mu + \nu = 5 \\ \lambda + 0 + \nu = 4 \end{cases}$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 0 = 1 \\ 2\lambda + \mu + \nu = 5 \end{cases}$$

Tale sistema è compatibile e indeterminato. Precisamente: $p = 2$, $n = 3 \Longrightarrow \exists \infty^1$soluzioni:

$$(\lambda, \mu, \nu) = (4 - \nu, \nu - 3, \nu), \forall \nu \in \mathbb{R}$$

Quindi il vettore $\mathbf{v}_6$ si esprime in ∞^1 modi distinti come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_6 = (4 - \nu)\,\mathbf{v}_1 + (\nu - 3)\,\mathbf{v}_2 + \nu \mathbf{v}_3$$

Osservazione 88 *Esistono ∞^1 combinazioni lineari, poiché il sistema $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è linearmente dipendente. Infatti il sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 0 = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 0 + \gamma = 0 \end{cases},$$

ha caratteristica $p = 2$, per cui ammette ∞^1 autosoluzioni $\Longrightarrow \exists\,(\alpha, \beta, \nu) \neq (0, 0, 0)$: $\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

3. Abbiamo l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1\,(1, 1, 1) + \lambda_2\,(1, 2, 3) + \lambda_3\,(2, -1, 1) = (0, 0, 0)$$

che scritta componente per componente conduce al sistema omogeneo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.63}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo: $\det A = 5 \Longrightarrow$ il sistema (2.63) ammette unicamente la soluzione banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, per cui il sistema Σ è linearmente indipendente.

Scriviamo la combinazione lineare:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

equivalente a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= -2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 5 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Tale sistema è compatibile e determinato. La soluzione è $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-6, 3, 2)$. Perciò: $\mathbf{v} = -6\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

4. Il sistema $\Sigma = \{(1,-3,2),(2,-4,-1),(1,-5,7)\}$ è linearmente dipendente se il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0, \end{aligned} \tag{2.65}$$

è banale. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Risulta: $\det A = 0 \Longrightarrow p < n$, essendo p la caratteristica del sistema e $n = 3$ il numero di incognite. Quindi il sistema (2.65) ammette ∞^{n-p} soluzioni non nulle, perciò $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$, da ciò segue che Σ è linearmente dipendente e che non è possibile esprimere il vettore $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori di Σ.

5. $\nexists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$, quindi per la proposizione 45 il sistema Σ è linearmente indipendente. Scriviamo:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

ottenendo il sistema lineare:

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ 0 - \lambda_2 &= -2 \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 &= k \end{aligned} \tag{2.66}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice dei coefficienti più termini noti:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; M(k) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & k \end{pmatrix};$$

Risulta: $p = r(A) = 2$. Affinchè il sistema sia compatibile, deve essere $r(A) = r(M)$. Poniamo:

$$F(k) \stackrel{def}{=} \det M(k) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & k \end{vmatrix} = -3(k+8)$$

È facile convincersi che $r(A) = r(M) = 2 \Longleftrightarrow F(k) = 0 \Longleftrightarrow k = -8 \stackrel{def}{=} k_*$. Ed è questo il valore di k tale che:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Per $k = k_*$, il sistema (2.66) ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 2)$, per cui:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$

6. Il sistema Σ è linearmente indipendente se:

$$\lambda u(x) + \mu v(x) + \nu w(x) = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

Sostituendo le espressioni analitiche di $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ e ordinando i vari termini:

$$(\lambda + 2\mu) x^2 + (-2\lambda - 3\mu + \nu) x + (5\lambda + 3\nu) = 0 \tag{2.67}$$

La (2.67) equivale al sistema:

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu + 0 &= 0 \\ -2\lambda - 3\mu + \nu &= 0 \\ 5\lambda + 0 + 3\nu &= 0, \end{aligned} \tag{2.68}$$

che è banale: $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$, per cui Σ è linearmente indipendente.
Scriviamo:

$$p(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x) + \lambda_3 \nu(x),$$

cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0 &= 1 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 4 \\ 5\lambda_1 + 0 + 3\lambda_3 &= -3, \end{aligned} \tag{2.69}$$

Il sistema lineare (2.69) è compatibile e determinato. La soluzione è $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-3, 2, 4)$; pertanto:

$$p(x) = -3u(x) + 2v(x) + 4\nu(x)$$

7. 1) $b(x)$ e $a(x)$ sono proporzionali se:

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R} : b(x) = \lambda a(x)) \Longleftrightarrow x^2 + x - 1 = \lambda \left(x^2 - x + 1\right)$$

equivalente a:

$$(\lambda - 1) x^2 + (-\lambda - 1) x + (\lambda + 1) = \mathbf{0}, \tag{2.70}$$

essendo $\mathbf{0}$ il polinomio nullo (vettore nullo). La (2.70) è vera se, e solo se:

$$\begin{aligned} \lambda - 1 &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tale sistema è manifestamente incompatibile, donde $\nexists \lambda : b(x) = \lambda(x)$.
2). Scriviamo:

$$c(x) = \lambda a(x) + \mu b(x)$$

equivalente a:

$$(\lambda + \mu - 1)\, x^2 + (-\lambda + \mu)\, x + (\lambda - \mu) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Longrightarrow (\lambda, \mu) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

quindi:

$$c\,(x) = \frac{1}{2}\,[a\,(x) + b\,(x)]$$

3). Scriviamo:

$$e\,(x) = \lambda a\,(x) + \mu b\,(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a\,(x)$, $b\,(x)$, $e\,(x)$:

$$(\lambda + \mu - 2)\, x^2 + (-\lambda + \mu + 1)\, x + (\lambda - \mu - 2) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases} \Longrightarrow \nexists\,(\lambda, \mu)\,,$$

per cui $e\,(x)$ non è combinazione lineare di Σ_1.

4). Scriviamo:

$$e\,(x) = \lambda a\,(x) + \mu b\,(x) + \nu c\,(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a\,(x)$, $b\,(x)$, $c\,(x)$, $e\,(x)$:

$$(\lambda + \mu + \nu - 2)\, x^2 + (-\lambda + \mu + 1)\, x + (\lambda - \mu - 2) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 2 \\ \lambda - \mu + 0 = 0 \\ \lambda - \mu + 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 2 \\ \lambda - \mu + 0 = 0 \end{cases},$$

che ammette ∞^1 soluzioni:

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(1 - \frac{\nu}{2}, 1 - \frac{\nu}{2}, \nu\right), \ \forall \nu \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$e\,(x) = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) a\,(x) + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) b\,(x) + \nu c\,(x)$$

Osservazione 89 *Il vettore $e(x)$ si esprime in infiniti modi come combinazione lineare dei vettori $\Sigma_2 = \{a(x), b(x), c(x)\}$, poiché tale sistema è linearmente dipendente. Infatti:*

$$\alpha a(x) + \beta b(x) + \gamma c(x) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 0 = 0 \\ \alpha - \beta + 0 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni non banali, quindi $\exists \infty^1$ $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$: $\alpha a(x) + \beta b(x) + \gamma c(x) = \mathbf{0}$

5). Scriviamo:

$$d(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) + \nu c(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$:

$$(\lambda + \mu + \nu) x^2 + (-\lambda + \mu + 1) x + (\lambda - \mu - 1) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + 0 = 1 \\ \lambda - \mu + 0 = 1 \end{cases},$$

cheè compatibile e indeterminato con ∞^1 soluzioni:

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right), -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu}{2}\right), \nu \right), \forall \nu \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$d(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) a(x) + \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) b(x)\right] + \nu c(x)$$

6). Esprimiamo il polinomio $f(x)$ come combinazione lineare di $\Sigma_2 = \{a(x), b(x), e(x)\}$:

$$f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) + \nu e(x)$$

cioè:

$$(\lambda + \mu + 2\nu - 1) x^2 + (-\lambda + \mu - \nu - 1) x + (\lambda - \mu + 2\nu + 2) = \mathbf{0},$$

quindi:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 1 \\ -\lambda + \mu - \nu = 1 \\ \lambda - \mu + 2\nu = -2 \end{cases}$$

Tale sistema è compatibile e determinato:

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right),$$

donde:

$$f(x) = \frac{3}{2}\left[a(x) + b(x)\right] - e(x)$$

8. Scriviamo:

$$\lambda_1 e_1 (x) + \lambda_2 e_2 (x) + \lambda_3 e_3 (x) = \mathbf{0}$$

Sostituendo le espressioni analitiche di $e_i (x)$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 (x-1) + \lambda_3 \left(x^2 - 2x + 1\right) = \mathbf{0},$$

equivalente al sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 0+0+\lambda_3 = 0 \\ 0+\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$, donde Σ è una base.

Scriviamo $p(x)$:

$$p(x) = \mu_1 e_1 (x) + \mu_2 e_2 (x) + \mu_3 e_3 (x)$$

Ottenendo:

$$\begin{cases} 0+0+\mu_3 = 4 \\ 0+\mu_2 - 2\mu_3 = -1 \\ \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (4,7,4)$$

Quindi:

$$p(x) = 4e_1 (x) + 7e_2 (x) + 4e_3 (x)$$

Si conclude che la terna $(4,7,4)$ sono le componenti del "vettore" $p(x)$ nella base Σ.

9. Passando ai vettori colonna:

$$\mathbf{V}' = R^{-1}\mathbf{V}, \ \ \mathbf{W}' = R^{-1}\mathbf{W},$$

R^{-1} è la matrice inversa di:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{W}' = \begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix},$$

da cui le componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nella nuova base:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (2,-5,7) \\ \mathbf{w} &= (c, b-c, a-b) \end{aligned}$$

10. $\forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{v}' = (v_1', v_2', v_3') \in H$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + \mathbf{v}' &= (v_1 + v_1', v_2 + v_2', v_3 + v_3') \\
2(v_1 + v_1') + (v_2 + v_2') - (v_3 + v_3') \\
&= (2v_1 + v_2 - v_3) + (2v_1' + v_2' - v_3') \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in H$,

$$2(\lambda v_1) + (\lambda v_2) - (\lambda v_3) = \lambda (2v_1 + v_2 - v_3) = 0$$

da cui H è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Per ricercare una sua base risolviamo l'equazione lineare omogenea:

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0,$$

nelle incognite v_1, v_2, v_3. Essa ammette ∞^2 soluzioni non banali:

$$\begin{aligned}
(v_1, v_2, v_3) &= (v_1, v_2, 2v_1 + v_2) \\
&= (v_1, 0, 2v_1) + (0, v_2, v_2) \\
&= v_1 (1, 0, 2) + v_2 (0, 1, 1)
\end{aligned}$$

Quindi $\dim H = 2$, e una base di H è $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$.

Parte II

Omomorfismi ed isomorfismi

Capitolo 3

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali

3.1 Definizione assiomatica di applicazione lineare

Siano E e F due spazi vettoriali sul medesimo campo K. Consideriamo l'applicazione:

$$\Omega : E \longmapsto F \tag{3.1}$$

La (3.1) applica a $\mathbf{x} \in E$, un vettore $\mathbf{y} \in F$:

$$\mathbf{x} \in E \longmapsto \mathbf{y} \in F$$

Scriviamo:

$$\mathbf{y} = \Omega(\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

Definizione 90 *L'applicazione Ω è* **lineare** *se è additiva ed omogenea:*

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \;\; \Omega(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \Omega(\mathbf{x}) + \Omega(\mathbf{y})$ *(additività)*
2. $\forall \mathbf{x} \in E, \forall \lambda \in K, \;\; \Omega(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \Omega(\mathbf{x})$ *(omogeneità)*

È facile rendersi conto che additività e omogeneità sono contenute nell'unica condizione:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \; \forall \lambda, \mu \in K, \;\; \Omega(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda \Omega(\mathbf{x}) + \mu \Omega(\mathbf{y}) \tag{3.3}$$

Nel caso $E = F$ l'applicazione lineare (3.2) si chiama **operatore lineare** e viene spesso utilizzata la seguente notazione:

$$\Omega \mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{3.4}$$

che si legge: *il vettore* $\mathbf{y}$ *è il risultato dell'applicazione dell'operatore* Ω *sul vettore* x. Equivalentemente: Ω *opera su* $\mathbf{x}$*, dando* $\mathbf{y}$ *come risultato.*
Due esempi immediati di operatori lineari sono dati rispettivamente dall'**operatore nullo** $\hat{0}$ e dall'**operatore identità** $\hat{1}$:

$$\hat{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \;\; \forall \mathbf{x} \in E$$
$$\hat{1}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \; \forall \mathbf{x} \in E$$

L'operatore nullo associa ad ogni vettore di E, il vettore nullo, mentre l'operatore identità applicato ad un qualunque vettore di E, fornisce il vettore medesimo.
Ulteriori esempi:

1. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{P}_n[x]$ su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado $\leq n$. L'operatore di derivazione $\frac{d}{dx}$ è un operatore lineare. Per mostrare ciò, osserviamo innanzitutto che:
$$\frac{d}{dx} : p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x] \longmapsto \frac{d}{dx} p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$$
essendo $p_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$, quindi $\frac{d}{dx} p_m(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + m a_{m-1} x^{m-1}$, per cui $\frac{d}{dx} p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$.

   La linearità segue immediatamente dalle regole di derivazione della somma di due funzioni e del prodotto di una costante per una funzione:
$$\forall p_m(x), q_r(x) \in \mathcal{P}_n[x], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \frac{d}{dx}[\lambda p_m(x) + \mu q_r(x)] = \lambda \frac{d}{dx} p_m(x) + \mu \frac{d}{dx} q_r(x)$$

2. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{F}(a,b)$ i cui elementi sono le funzioni reali di variabile reale definite nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ (§ 36). Se $\mathcal{C}(a,b)$ è l'insieme delle funzioni continue in $[a,b]$, proviamo che a) $C(a,b)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(a,b)$, b) l'applicazione:
$$S : C(a,b) \longmapsto C(a,b)$$
tale che:
$$f \in C(a,b) \longmapsto \int_a^x f(\xi)\, d\xi, \quad x \in (a,b)$$
$C(a,b) \subset \mathcal{F}(a,b)$ è un sottospazio di $\mathcal{F}(a,b)$, poiché la somma di due funzioni continue è a sua volta una funzione continua, e il prodotto di uno numero reale per una funzione continua è una funzione continua. In simboli:
$$\forall f, g \in C(a,b), \ (f+g) \in C(a,b)$$
$$\forall f \in C(a,b), \forall \lambda \in K, \ (\lambda f) \in C(a,b)$$
Da un punto di vista geometrico, l'applicazione S associa ad ogni funzione $f(x)$ continua in (a,b), l'area del rettangoloide $\mathcal{R}(x)$ sotteso dalla curva di equazione $y = f(x)$, dall'asse x e dalle rette parallele all'asse y e passanti per a e per il generico punto x. Senza perdita di generalità assumiamo $f(x) \geq 0$. Quindi:
$$\mathcal{R}(x) = \left\{ (\xi, y) \in \mathcal{R}^2 : a \leq \xi \leq x, \ 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$
Per i dettagli vedere figura 3.1.

   La linearità dell'operatore S segue immediatamente dalle proprietà di addività e omogeneità dell'integrale definito. Scriviamo:
$$S(f) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

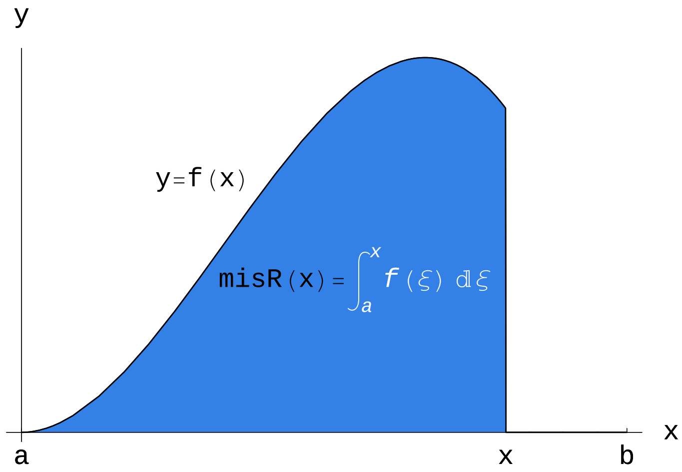

Figura 3.1: Rettangoloide individuato dal grafico $y = f(x)$.

Quindi $\forall f, g \in C(a, b)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S(\lambda f + \mu g) &= \int_a^x (\lambda f(\xi) + \mu g(\xi))\, d\xi \\ &= \lambda \int_a^x f(\xi)\, d\xi + \mu \int_a^x g(\xi)\, d\xi \\ &= \lambda S(f) + \mu S(g) \end{aligned}$$

3. Ricordiamo che:

$$C^k(a, b) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è dotata di derivata } k\text{-}esima \text{ continua}\}$$

Con le usuali leggi di composizione, $C^k(a, b)$ assume la struttura di spazio vettoriale. Ciò premesso, consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &: C^1(a, b) \to C(a, b) \\ f &\to \frac{df}{dx}, \quad \forall f \in C^1(a, b) \end{aligned}$$

Tale applicazione è lineare. infatti:

$\forall f, g \in C^1(a, b)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \frac{d}{dx} f(x) + \mu \frac{d}{dx} g(x)$$

Di seguito sono riportati casi speciali di applicazioni tra spazi vettoriali.
Sia E uno spazio vettoriale su un campo K. Consideriamo una base di E:

$$\{\mathbf{e}_i\}, \quad i = 1, 2, ..., r$$

Quindi $\dim E = r$. Sia E' il sottospazio di E generato da $\{\mathbf{e}_i\}$ per $i = 1, 2, ..., p < r$. Ciò premesso, si definisce **operatore di proiezione** di E su E', l'operatore lineare:

$$\pi : E \longmapsto E'$$
$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} v_i \mathbf{e}_i \longmapsto \mathbf{v}' = \sum_{i=1}^{p} v_i \mathbf{e}_i$$

Proviamo la linearità di π.

$$\pi \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} u_i \mathbf{e}_i, \tag{3.5}$$

essendo $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}$. Evidentemente:

$$u_i = \lambda v_i + \mu w_i$$

Quindi la (3.5) diventa:

$$\begin{aligned} \pi \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^{p} (\lambda v_i + \mu w_i) \mathbf{e}_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{p} v_i \mathbf{e}_i + \mu \sum_{i=1}^{p} w_i \mathbf{e}_i \\ &= \lambda \pi \mathbf{v} + \mu \pi \mathbf{u}, \end{aligned}$$

donde la linearità di π. Ad esempio, consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e l'operatore di proiezione π_x su $\mathbb{R}$:

$$\pi_x : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$$

Più precisamente, π_x proietta ogni vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sull'asse x:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \longmapsto v_x \mathbf{e}_x$$

essendo $\mathbf{e}_i$ $(i = x, y, z)$ i versori degli assi coordinati.

***

L'operatore così definito:

$$T \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

essendo $\mathbf{u}$ un vettore assegnato di E. Si osservi che tale operatore non è lineare:

$$T (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

D'altro canto:

$$\begin{aligned}\lambda T\mathbf{v}+\mu T\mathbf{w}&=\lambda\left(\mathbf{v}+\mathbf{u}\right)+\mu\left(\mathbf{w}+\mathbf{u}\right)\\&=\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}+\left(\lambda+\mu\right)\mathbf{u}\end{aligned}$$

Quindi:

$$T\left(\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}\right)=\lambda T\mathbf{v}+\mu T\mathbf{w}-\left(\lambda+\mu\right)\mathbf{w}$$

Cioè:

$$\forall\lambda,\mu\in K:\lambda+\mu\neq 0,\,\forall\mathbf{w}\in E-\{\mathbf{0}\}\,,\,T\left(\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}\right)\neq\lambda T\mathbf{v}+\mu T\mathbf{w}$$

***

L'**operatore costante** è così definito:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{a},$$

essendo $\mathbf{x},\mathbf{a}\in E$, con $\mathbf{a}$ vettore assegnato. Mostriamo che tale operatore è non lineare.

$$A\left(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\right)=\mathbf{a}$$

D'altro canto:

$$\lambda A\mathbf{x}+\mu A\mathbf{y}=\left(\lambda+\mu\right)\mathbf{a},$$

donde:

$$A\left(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\right)\neq\lambda A\mathbf{x}+\mu A\mathbf{y},$$

da cui la non linearità di A.

***

Sia E uno spazio vettoriale tridimensionale sul campo K. Consideriamo l'operatore A tale che:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y},\ \text{ con } \mathbf{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right),\ \ \mathbf{y}=\left(2x_1+x_2,x_2+x_3,x_1\right)\ \text{ in una base }\ \{e_i\}$$

Studiamo il comportamento di tale operatore. Poniamo:

$$\mathbf{w}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z},\,\forall\lambda,\mu\in K,\,\forall\mathbf{x},\mathbf{z}\in E \tag{3.6}$$

Il risultato dell'applicazione dell'operatore A sul vettore (3.6) è il vettore $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$:

$$A\mathbf{w}=\mathbf{y}$$

Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \lambda (x_1, x_2, x_3) + \mu (z_1, z_2, z_3) \\
&= (\lambda x_1 + \mu z_1, \lambda x_2 + \mu z_2, \lambda x_3 + \mu z_3)
\end{aligned}
$$

Pertanto il risultato dell'applicazione di A su $\mathbf{x}$ è:

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{w} &= (2 (\lambda x_1 + \mu z_1) + \lambda x_2 + \mu z_2, \lambda x_2 + \mu z_2 + \lambda x_3 + \mu z_3, \lambda x_1 + \mu z_1) \\
&= \lambda (2x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1) + \mu (2z_1 + z_2, z_2 + z_3, z_1) \\
&= \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{z},
\end{aligned}
$$

quindi la linearità di A.

***

Proposizione 91 *Sia $\Omega : E \to F$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali E e F.*

$$
\begin{aligned}
\Omega (\mathbf{0}_E) &= \mathbf{0}_F \qquad (3.7) \\
\Omega (-\mathbf{x}) &= -\Omega (\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. $\forall \mathbf{x} \in E, \;\; \Omega (\mathbf{x}) + \mathbf{0}_F = \Omega (\mathbf{x}) = \Omega (\mathbf{x} + \mathbf{0}_E) = \Omega (\mathbf{x}) + \Omega (\mathbf{0}_E) \Longrightarrow \mathbf{0}_F = \Omega (\mathbf{0}_E)$
Dimostriamo ora la seconda delle (3.7).
Dalla prima delle (3.7):

$$\mathbf{0}_F = \Omega (\mathbf{0}_E) = \Omega (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) = \Omega (-\mathbf{x}) + \Omega (\mathbf{x})$$

ma $\mathbf{0}_F = \Omega (\mathbf{x}) - \Omega (\mathbf{x})$, confrontando con la precedente:

$$-\Omega (\mathbf{x}) = \Omega (-\mathbf{x})$$

■

3.2 Esercizi proposti

1. Dimostrare la linearità dei seguenti operatori:

$$
\begin{cases} A : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longrightarrow (x + y, y) \end{cases} \qquad (3.8)
$$

$$
\begin{cases} B : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longrightarrow 2x - 3y + 4z \end{cases}
$$

2. Dimostrare la non linearità dei seguenti operatori:

$$
\begin{cases} A : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R} \\ (x, y) \longrightarrow xy \end{cases} \qquad (3.9)
$$

$$
\begin{cases} A : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longrightarrow (x + 1, 2y, x + y) \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} A : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longrightarrow (|x| , 0) \end{cases}
$$

3.2.1 Soluzioni

1. Poniamo $\mathbf{x}'' = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}'$, $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x} = (x, y, z)\,,\ \mathbf{x}' = (x', y', z')$$

Quindi:

$$\mathbf{x}'' = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \lambda z')$$

Il risultato dell'applicazione di A su $\mathbf{x}''$ è:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}'' &= ((\lambda x + \mu x' + \lambda y \mu y'), \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Da qui la linearità di A.

Poniamo $\mathbf{x}'' = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}'$, $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x} = (x, y, z)\,,\ \mathbf{x}' = (x', y', z')$$

Quindi:

$$\mathbf{x}'' = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \lambda z')$$

Il risultato dell'applicazione di B su $\mathbf{x}''$ è:

$$\begin{aligned} B\mathbf{x}'' &= 2(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y') + 4(\lambda z + \mu z') \\ &= \lambda(2x - 3y + 4z) + \mu(2x' - 3y' + 4z') \\ &= \lambda B\mathbf{x} + \mu B\mathbf{x}' \end{aligned}$$

donde la linearità di B.

2. Siano $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x} = (x', y')$ due vettori arbitrari di $\mathbb{R}^2$. Poniamo: $\mathbf{x}'' = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}'$, con λ, μ presi ad arbitrio in $\mathbb{R}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}'' &= (\lambda x + yx')(\lambda y + \mu y') \\ &= \lambda^2 xy + \lambda\mu xy' + \lambda\mu x'y + \mu^2 x'y' \end{aligned}$$

Mentre:

$$\lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{x}' = \lambda xy + \mu x'y'$$

Quindi:

$$A(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}') \neq \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{x}'$$

da qui la non linearità di A.

Il secondo operatore (seconda delle (3.9)) è tale che:

$$A(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}') = \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{x}' + (1, 0, 0) \neq \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{y}\mathbf{x}'$$

da qui la non linearità di A.

Il terzo operatore (terza delle (3.9)) è tale che:

$$A\mathbf{x}'' = \left(\left|\lambda x + \mu x'\right|, 0\right)$$

mentre:

$$\lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{x}' = \left(\lambda \left|x\right| + \mu \left|x'\right|, 0\right)$$

Quindi:

$$A\left(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}'\right) \neq \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{x}',$$

giacché:

$$\left|\lambda x + \mu x'\right| \leq \lambda \left|x\right| + \mu \left|x\right|; \tag{3.10}$$

da qui la non linearità di A.

Capitolo 4

Omomorfismi e isomorfismi

4.1 Introduzione

Ricordiamo che se $f : X \longmapsto Y$, l'**immagine** di f in Y è:

$$\operatorname{Im} f = f(X) \overset{def}{=} \{y \in Y \mid y = f(x)\} \subseteq Y$$

Ciò premesso, sussistono le seguenti:

Definizione 92 (f è suriettiva) $\Longleftrightarrow (f(X) = Y)$

Definizione 93 (f è iniettiva) $\Longleftrightarrow (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'))$

Definizione 94 (f è biiettiva) $\Longleftrightarrow$ (f *è iniettiva e suriettiva*)

Nel caso speciale $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, le definizioni suddette si prestano ad interpretazione geometrica. Nel caso di un'applicazione iniettiva, ogni retta parallela all'asse x interseca in uno ed un sol punto la curva di equazione $y = f(x)$. Ad esempio, la funzione esponenziale:

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto a^x \end{array}, \tag{4.1}$$

è un'applicazione iniettiva ma non suriettiva (figura 4.1). Infatti:

$$\begin{array}{c} x \neq x' \Longrightarrow a^x \neq a^{x'} \\ \forall y \in (-\infty, 0), \nexists x \in \mathbb{R} \mid a^x = y, \end{array}$$

da cui l'iniettività e la non suriettività dell'applicazione (4.1).
Nel caso di un'applicazione suriettiva, ogni retta parallela all'asse x interseca *almeno* in un punto la curva $y = f(x)$. Ciò implica (a differenza del caso precedente) che possono esserci intersezioni multiple, come nel caso della funzione $f(x) = x^3 - x^2 - x$ (figura 4.2).
Si consideri ora l'applicazione:

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \tag{4.2}$$

Tale applicazione non è né iniettiva e né suriettiva. Infatti, ogni x^2 è immagine di $-x$ e $+x$. Inoltre, $\forall y \in (-\infty, 0)$, $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$ (figura 4.3)

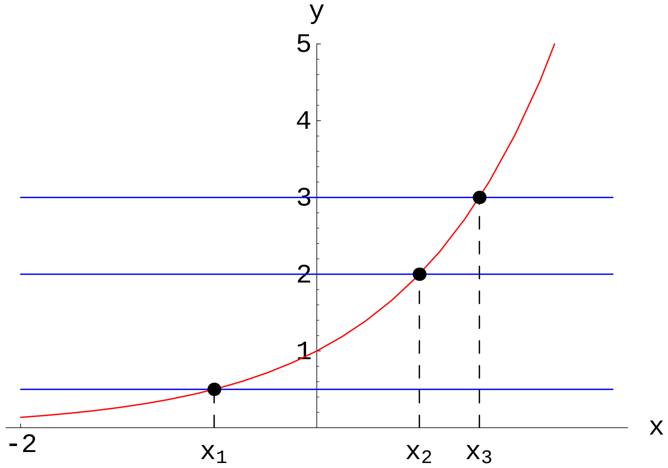

Figura 4.1: Grafico della funzione $f(x) = e^x$. Ogni retta $y = y_0 > 0$ interseca in uno e un sol punto il grafico di $f(x)$. Qui y_0 è una costante presa ad arbitrio. Per $y_0 < 0$ l'intersezione è vuota. Si tratta quindi di un'applicazione iniettiva ma non suriettiva.

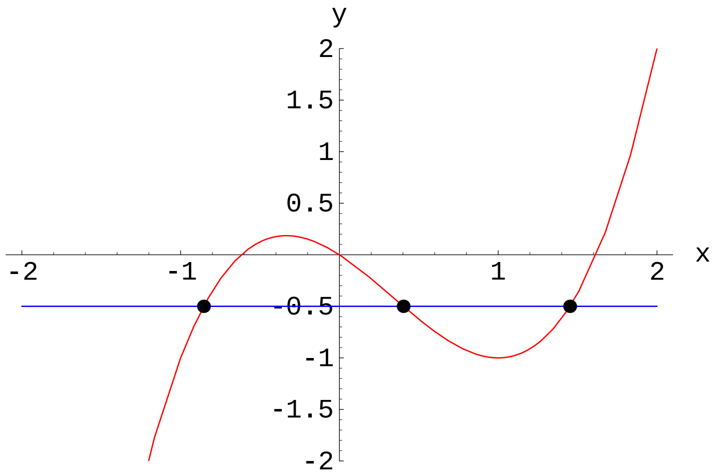

Figura 4.2: Grafico della funzione $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Esistono rette parallele all'asse x che intersecano in punti distinti il grafico della funzione. Ogni retta $y = y_0$ interseca comunque $y = f(x)$. Si tratta quindi di un'applicazione suriettiva ma non iniettiva.

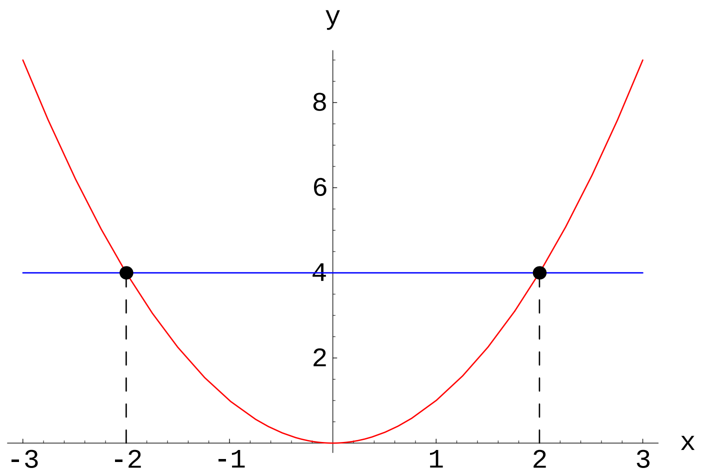

Figura 4.3: Grafico della funzione $f(x) = x^2$. Ogni retta $y = b > 0$ interseca in due punti distinti la curva $y = f(x)$. L'intersezione di una generica retta $y = c < 0$ con il grafico di $f(x)$, è l'insieme vuoto.

4.2 Definizione assiomatica e teoremi conseguenti

Definizione 95 *Siano E, F due spazi vettoriali sul campo K. Dicesi* **omomorfismo** *tra E ed F ogni applicazione lineare $\Omega : E \longmapsto F$.*

Definizione 96 *Due spazi vettoriali si dicono* **omomorfi** *se esiste un omorfismo tra essi.*

Definizione 97 *Siano E, F due spazi vettoriali sul campo K. Dicesi* **isomorfismo** *tra E ed F ogni applicazione lineare biiettiva $\Omega : E \longmapsto F$.*

Definizione 98 *Due spazi vettoriali si dicono* **isomorfi** *se esiste un isomorfismo tra essi.*

Esempi
Se E è un qualunque spazio vettoriale su un campo K, consideriamo l'applicazione:

$$\begin{array}{c} \Omega : E \longmapsto E \\ \mathbf{v} \longmapsto \lambda \mathbf{v} \end{array}, \tag{4.3}$$

essendo λ scalare assegnato non nullo.
Si dimostri che la (4.3) è biiettiva.
Soluzione.
Iniziamo a dimostrare la linearità:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \forall \mu, \nu \in K,\ \Omega(\mu \mathbf{v} + \nu \mathbf{w}) = \\ = \lambda(\mu \mathbf{v} + \nu \mathbf{w}) \\ = \mu(\lambda \mathbf{v}) + \nu(\lambda \mathbf{w}) \\ = \mu \Omega \mathbf{v} + \nu \Omega \mathbf{w} \end{aligned}$$

L'iniettività:

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{v}' \Longrightarrow \lambda\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{v}'$$

La suriettività:

$$\forall \mathbf{u} \in E, \exists \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{u}\right) \in E \mid \Omega\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \mathbf{u}$$

Da ciò segue la biiettività di Ω. Tale isomorfismo è noto come **omotetia** di rapporto λ e centro O: l'immagine di un generico vettore $\mathbf{v} \in E$ si identifica con $\mathbf{v}$ medesimo a meno di un fattore di scala λ.

***

Teorema 99 *Sia K un campo. Gli spazi vettoriali su K isodimensionali sono isomorfi.*

Dimostrazione. Siano E, F due arbitrari spazi vettoriali isodimensionali:

$$\dim E = n, \quad \dim F = n$$

Fissiamo due basi:

$$\begin{array}{lll} \{\mathbf{e}_i\}, & i = 1, 2, ..., n & \text{base di } E \\ \{\mathbf{e}'_i\}, & i = 1, 2, ..., n & \text{base di } F \end{array}$$

Si consideri l'applicazione lineare:

$$\psi : E \longmapsto F \tag{4.4}$$

tale che:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \longmapsto \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}'_i$$

L'applicazione (4.4) associa ad ogni vettore $\mathbf{x}$ di E il vettore $\mathbf{x}'$ di E' che ha per componenti le componenti di $\mathbf{x}$ in $\{\mathbf{e}_i\}$. Osserviamo che presi ad arbitrio $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in E:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i,$$

risulta:

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}'_i$$

$$\psi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}'_i$$

Tenendo conto della proposizione (60) (unicità delle componenti di un vettore in una assegnata base):

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Longrightarrow x_i \neq y_i,$$

donde:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Longrightarrow \psi(\mathbf{x}) \neq \psi(\mathbf{y})$$

Cioè ψ è iniettiva. Inoltre:

$$\forall \mathbf{x}' \in F, \quad \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}'_i \Longrightarrow \exists \mathbf{x} \in E \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

da cui la suriettività di ψ.
Si conclude che ψ è iniettiva e suriettiva, quindi biiettiva. Da qui la tesi. ■

Definizione 100 *Si chiama* **immagine** *dell'applicazione* $\Omega : E \longmapsto F$ *e si indica con* $\Omega(E)$ *il sottoinsieme di* F*:*

$$\Omega(E) = \{\mathbf{y} \in F \mid \Omega(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$

Teorema 101 $\Omega(E)$ *è un sottospazio vettoriale di* F*.*

Dimostrazione. $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega(E) \Longleftrightarrow \exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E \mid \mathbf{y}_1 = \Omega(\mathbf{x}_1), \mathbf{y}_2 = \Omega(\mathbf{x}_2)$. Quindi:

$$\forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega(E), \; \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \Omega(\mathbf{x}_1) + \Omega(\mathbf{x}_2) \underset{\Omega \text{ è lineare}}{=} \Omega(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in \Omega(E)$$
$$\forall \lambda \in K, \forall \mathbf{y} \in \Omega(E), \; \lambda \mathbf{y} = \lambda \Omega(\mathbf{x}) \underset{\Omega \text{ è lineare}}{=} \Omega(\lambda \mathbf{x}) \in \Omega(E),$$

donde l'asserto. ■

Definizione 102 *Dicesi* **rango** *di* $\Omega : E \longmapsto F$*, la dimensione del sottospazio* $\Omega(E)$*.*

Definizione 103 *Dicesi* **kernel** *o* **nucleo** *di* $\Omega : E \longmapsto F$*, il sottoinsieme di* E*:*

$$Ker\Omega = \{\mathbf{x} \in E \mid \Omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F\},$$

essendo $\mathbf{0}_F$ *il vettore nullo di* F*.*

Teorema 104 *Il kernel di* $\Omega : E \longmapsto F$ *è un sottospazio vettoriale di* E*.*

Dimostrazione. Prendiamo ad arbitrio $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Ker\Omega$, $\lambda \in K$. Quindi:

$$\Omega(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \Omega(\mathbf{x}) + \Omega(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_F + \mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F \Longrightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in Ker\Omega$$
$$\Omega(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \Omega(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F \Longrightarrow (\lambda \mathbf{x}) \in Ker\Omega,$$

donde l'asserto. ■

Definizione 105 *Dicesi* **nullità** *di* $\Omega : E \longmapsto F$*, e si indica con* $N(\Omega)$*, la dimensione di* $Ker\Omega$*:*

$$N(\Omega) = \dim Ker\Omega$$

Teorema 106 *Sia* $\Omega : E \longmapsto F$ *un omomorfismo suriettivo*

$$(\Omega \text{ è un isomorfismo}) \Longleftrightarrow (Ker\Omega = \{\mathbf{0}_E\})$$

Dimostrazione. La condizione è sufficiente
Hp: $Ker\Omega = \{\mathbf{0}_E\}$
Th: $\Omega : E \longmapsto F$ è un isomorfismo (basta dimostrare l'iniettività, poiché per ipotesi Ω è suriettiva).

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \mid \Omega(\mathbf{x}) = \Omega(\mathbf{y}) \Longrightarrow \Omega(\mathbf{x}) - \Omega(\mathbf{y}) = \Omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}_F \Longrightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in Ker\Omega$$

L'ultima definizione si giustifica ricordando la definizione di Kernel. Inoltre:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in Ker\Omega \underset{Ker\Omega = \{\mathbf{0}_E\}}{\Longrightarrow} \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}_E \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Si conclude

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \mid \Omega(\mathbf{x}) = \Omega(\mathbf{y}) \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Cioè l'iniettività di Ω.
La condizione è necessaria
Hp: $\Omega : E \longmapsto F$ è iniettiva e suriettiva
Th: $Ker\Omega = \{\mathbf{0}_E\}$
Osserviamo innanzitutto che:

$$\forall \mathbf{x} \in Ker\Omega, \ \exists \mathbf{z}, \mathbf{y} \in E \mid \mathbf{z} - \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

Inoltre per definizione di kernel:

$$\mathbf{x} \in Ker\Omega \Longrightarrow \mathbf{0}_F = \Omega(\mathbf{x}) = \Omega(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \underset{\Omega \text{ è lineare}}{=} \Omega(\mathbf{z}) - \Omega(\mathbf{y}) \Longrightarrow \Omega(\mathbf{z}) = \Omega(\mathbf{y})$$
$$\underset{\Omega \text{ è iniettiva}}{\Longrightarrow} \mathbf{z} = \mathbf{y} \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_E$$

Cioè:

$$(\forall \mathbf{x} \in Ker\Omega, \ \mathbf{x} = \mathbf{0}_E) \Longrightarrow Ker\Omega = \{\mathbf{0}_E\}$$

■

Teorema 107 *Sia K un campo. Gli spazi vettoriali su K isomorfi sono isodimensionali.*

Dimostrazione. Sia $\Omega : E \longmapsto F$ un isomorfismo. Consideriamo la base di E:

$$\{\mathbf{e}_i\}, \quad i = 1, 2, ..., n = \dim E$$

Quindi, preso ad arbitrio $\mathbf{x} \in E$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

Il risultato dell'applicazione di Ω sul vettore $\mathbf{x}$ è:

$$\Omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Omega(\mathbf{e}_i) \tag{4.5}$$

Fissiamo l'attenzione sul sistema di vettori:

$$\Lambda_n = \{\Omega(\mathbf{e}_1), \Omega(\mathbf{e}_2), ..., \Omega(\mathbf{e}_n)\} \tag{4.6}$$

Per ipotesi Ω è un isomorfismo e per il teorema 106 deve essere $Ker\Omega = \{\mathbf{0}_E\}$, quindi:

$$\Omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_E \Longrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

Tenendo conto della (4.5):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Omega(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}_F \Longrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

Cioè il sistema (4.6) è linearmente indipendente. Inoltre:

$$\forall \mathbf{y} \in F,\ \mathbf{y} = \Omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Omega(\mathbf{e}_i) \Longrightarrow F = L[\Lambda_n]$$

cioè Λ_n genera lo spazio vettoriale F. Si conclude che $\dim F = n = \dim E$. ■
Si osservi che se Ω non è un isomorfismo, il sistema Λ_n è linearmente dipendente, per cui $\dim \Omega(E) < n$. Infatti:

$$\ker \Omega \ni \mathbf{x} \neq \mathbf{0}_E \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \Omega(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}_F\,, \quad \text{con} \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0) \right)$$

Pertanto Λ_n non è una base di $\Omega(E)$. A titolo di esempio consideriamo l'omomorfismo:

$$\begin{aligned} \Omega &: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z) \end{aligned}$$

Consideriamo la base canonica:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)\,, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)\,, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Abbiamo:

$$\Omega(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 1)\,, \Omega(\mathbf{e}_2) = (2, 1, 1)\,, \Omega(\mathbf{e}_i) = (-1, 1, -2)$$

Il sistema

$$\Lambda_3 = \{\Omega(\mathbf{e}_1)\,, \Omega(\mathbf{e}_2)\,, \Omega(\mathbf{e}_3)\}$$

è linearmente dipendente. Una base di $\Omega(E)$ è:

$$\Lambda_2 = \{\Omega(\mathbf{e}_1)\,, \Omega(\mathbf{e}_2)\}\,,$$

donde il rango di Ω è

$$\dim \Omega(E) = 2$$

Il Kernel di Ω:

$$\ker \Omega = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \Omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 0 \\ 0+y+z &= 0 \\ x+y-2z &= 0 \end{aligned}$$

equivalente a:

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 0 \\ 0+y+z &= 0 \end{aligned}$$

che ammette le ∞^1 autosoluzioni:

$$(x,y,z) = z\,(3,-1,1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \ker\Omega &= L\left[\{(3,-1,1)\}\right] \\ N(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$

Evidentemente:

$$\dim\mathbb{R}^3 = \dim\Omega(E) + N(\Omega)$$

***

I teoremi 99 e 107 si riuniscono nell'unico teorema:

Teorema 108 *Gli spazi vettoriali su un assegnato campo K sono isomorfi se e solo se sono isodimensionali.*

Esempi
Consideriamo l'endomorfismo:

$$\Omega : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2,$$

definito da:

$$\Omega(x,y) = (2x-4y, -x+2y)$$

Determiniamo la matrice rappresentativa nella base canonica $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{e}_1) &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \Omega(\mathbf{e}_2) &= -4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

donde:

$$\Omega \doteq A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il sistema $\{\Omega(\mathbf{e}_1), \Omega(\mathbf{e}_2)\}$ è linearmente dipendente, per cui una base di $\Omega(\mathbb{R}^2)$ è $\{\Omega(\mathbf{e}_1)\} = \{(2,-1)\}$, per cui:

$$\begin{aligned} \Omega\left(\mathbb{R}^2\right) &= L\left[\{(2,-1)\}\right] \\ \dim\Omega\left(\mathbb{R}^2\right) &= 1, \end{aligned}$$

cioè:

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega\left(\mathbb{R}^2\right), \, \mathbf{y} = k(2,-1) = (2k,-k)$$

Determiniamo il kernel di Ω:

$$\Omega(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow -x + 2y = 0,$$

da cui l'insieme delle soluzioni:

$$(x,y) = y(2,1), \quad \text{con } y \in (-\infty,+\infty)$$

Cioè:

$$\begin{aligned} \ker\Omega &= L[S], \text{ con } S = \{2,1\} \\ N(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$

Determiniamo l'immagine di $\mathbf{y} \in \Omega(\mathbb{R}^2)$:

$$\Omega(\mathbf{y}) = \Omega(2k,-k) \doteq \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k \\ -4k \end{pmatrix},$$

da cui::

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega\left(\mathbb{R}^2\right), \quad \Omega(\mathbf{y}) = 8\mathbf{y}$$

Cioè l'immagine di $\mathbf{y}$ è l'omotetia di rapporto 8.
Determiniamo l'immagine inversa di $\bar{\mathbf{y}} = \left(2\bar{k}, -\bar{k}\right)$:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2\bar{k} \\ -x + 2y = -\bar{k} \end{cases}$$

Tale sistema lineare ammette ∞^1 soluzioni:

$$(x,y) = \left(\bar{k},0\right) + y(2,1), \text{ con } y \in (-\infty,+\infty)$$

Quindi:

$$\Omega^{-1}\left(2\bar{k},-\bar{k}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = \left(\bar{k},0\right) + y(2,1), \text{ con } y \in (-\infty,+\infty)\right\}$$

4.3 Esercizi proposti

1. Assegnata l'applicazione
$$\Omega : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2 \tag{4.7}$$
tale che:
$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbf{x}' = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
Si dimostri che Ω è un omomorfismo ma non un isomorfismo. Si determini inoltre l'immagine, il kernel e la nullità di Ω.

2. Se$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, con la notazione $C^n(a, b)$ si denota l'insieme delle funzioni continue in $[a, b]$ e ivi derivabili fino all'ordine n. Come è noto, introducendo le operazioni:
$$+ : C^n(a, b) \times C^n(a, b) \longmapsto C^n(a, b)$$
$$\cdot : \mathbb{R}\times C^n(a, b) \longmapsto C^n(a, b),$$
l'insieme $C^n(a, b)$ assume la struttura algebrica di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Ciò premesso, si consideri lo spazio vettoriale $C^\infty(a, b)$ e i cui vettori sono le funzioni reali di una variabile reale continue in $[a, b]$ e ivi infinitamente derivabili. Si consideri l'applicazione:
$$D : C^\infty(a, b) \longmapsto C^\infty(a, b),$$
essendo D l'operatore di derivazione, per cui:
$$D : f \longmapsto Df = \frac{d}{dx} f(x), \quad \forall f \in C^\infty(a, b)$$
Provare che D è un omomorfismo suriettivo ma non iniettivo. Determinare poi l'immagine e il kernel di D.

3. Sia $\mathcal{P}_n[x]$ lo spazio vettoriale i cui vettori sono i polinomi di grado $\leq n$ (§ 35). Si consideri l'operatore di derivazione D dell'esercizio precedente. Applicando tale operatore ai vettori di $\mathcal{P}_n[x]$, determinare l'immagine e il kernel di D. Definire inoltre l'operatore di derivazione *n-ma* D^n, determinando il suo nucleo.

4. Trovare tutte le applicazioni lineari $\Omega : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tali che $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$ sia una base di $\Omega(\mathbb{R}^3)$.

5. Si consideri l'applicazione:
$$\Omega : C^0(\mathbb{R}) \longmapsto C^0(\mathbb{R}) \tag{4.8}$$
$$f(x) \longmapsto \int_0^x f(\xi)\, d\xi$$
Dimostrare la linearità di Ω, determinando poi la sua immagine e il suo nucleo.

4.3.1 Soluzioni

1. Risulta:

$$\begin{aligned}\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in&\mathbb{R}^3,\ \Omega\left(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\right)\\ =\Omega\left(\left(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z'\right)\right)\\ =\left(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y'\right)\\ =\lambda\left(x,y\right)+\mu\left(x'.y'\right)\\ =\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y},\end{aligned}$$

   donde il carattere omomorfo di Ω. Inoltre, tale applicazione è suriettiva, poichè:

$$\forall\mathbf{x}'=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists\mathbf{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\Omega\mathbf{x}=\mathbf{x}'$$

   Per il teorema (108) l'applicazione (4.7) non è un isomorfismo.

   L'immagine di Ω è:

$$\begin{aligned}\Omega\left(E\right)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\right\}\\ =\text{piano cartesiano } xy\end{aligned}$$

   Per il kernel di Ω osserviamo che:

$$\left(\forall z\in\left(-\infty,+\infty\right),\ \ \mathbf{x}=(0,0,z)\in\mathbb{R}^3\right)\Longrightarrow\Omega\mathbf{x}=(0,0)=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},$$

   quindi:

$$\begin{aligned}Ker\Omega=\left\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3:-\infty<z<+\infty\right\}\\ =\text{asse } z\end{aligned}$$

   La nullità di Ω è:

$$N\left(\Omega\right)=\dim Ker\Omega=1$$

2. La linearità di D discende immediatamente dalle regole di derivazione della somma di due funzioni e del prodotto di uno costante per una funzione. Quindi:

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall f,g\in C^\infty\left(a,b\right),\ D\left(\lambda f+\mu g\right)=\lambda Df+\mu Dg,$$

   donde D è un omorfismo. La suriettività è evidente:

$$\forall f\in C^\infty\left(a,b\right),\ \exists F\left(x\right)=\int f\left(x\right)dx\in C^\infty\left(a,b\right)\mid DF=f$$

   Inoltre:

$$\left(\forall c\in\mathbb{R},\forall f\in C^\infty\left(a,b\right),\ g\left(x\right)=f\left(x\right)+c\neq f\left(x\right)\right)\Longrightarrow Df=Dg$$

Cioè:

$$f \neq g \nRightarrow Df \neq Dg,$$

per cui D non è iniettiva. Quindi D non è un isomorfismo.

Il kernel di D è composto dalle funzioni costanti in $[a,b]$:

$$Ker D = \{f(x) = \text{const}, \forall x \in [a,b]\},$$

in quanto è tale che:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0$$

3. Evidentemente:

$$D : p_n(x) \in \mathcal{P}_n[x] \longmapsto \frac{dp_n}{dx} \in \mathcal{P}_{n-1}[x]$$

Pertanto l'immagine di D è:

$$\operatorname{Im} D = \mathcal{P}_{n-1}[x]$$

Per definizione di kernel:

$$\ker D = \{p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x] : Dp_m(x) \equiv 0\},$$

cioè:

$$\ker D = \{p_0(x)\} \tag{4.9}$$

Si conclude che:

$$\ker D = \mathcal{P}_0[x]$$

Osserviamo che $\mathcal{P}_0[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{P}_n[x]$.

L'operatore D^n è così definito:

$$\begin{aligned} D^n p_m(x) &= \frac{d^n}{dx^n} p_m(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} ... \left(\frac{d}{dx} p_m(x)\right)\right) \end{aligned}$$

Per $m = n$:

$$\begin{aligned} Dp_n(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + ... + na_n x^{n-1} \\ D^2 p_n(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + ... + n(n-1)x^{n-2} \\ &... \\ D^n p_n(x) &= n! a_n \end{aligned}$$

Per $m < n$:

$$D^n p_m(x) \equiv 0 \tag{4.10}$$

La (4.10) implica:

$$\ker D^n = \{p_{m<n}(x)\}, \tag{4.11}$$

cioè il kernel di D^n è

$$\ker D^n = \mathcal{P}_{m<n}[x]$$

4. Per ipotesi:

$$\Sigma_2 = \{(1,2,3),(4,5,6)\}$$

è una base di $\Omega(\mathbb{R}^3)$. Assegnata la base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \ \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \ \mathbf{e}_3 = (0,0,1),$$

deve essere:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{e}_1) &= (1,2,3) \\ \Omega(\mathbf{e}_2) &= (4,5,6) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Inoltre:

$$\Omega(x,y,z) = (x',y',z')$$

Dalla linearità di Ω segue:

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x,y,z) = ax + by + cz \\ y' &= f_2(x,y,z) = dx + ey + fz \\ z' &= f_3(x,y,z) = gx + hy + lz \end{aligned}$$

Imponendo le (4.12):

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x + 4y + cz \\ f_2(x,y,z) &= 2x + 5y + fz \\ f_3(x,y,z) &= 3x + 6y + lz, \end{aligned}$$

donde:

$$\Omega(x,y,z) = (x + 4y + cz, 2x + 5y + fz, 3x + 6y + lz)$$

Ora dobbiamo imporre $\dim \Omega(\mathbb{R}^3) = 2$. A tale scopo determiniamo le immagini dei vettori della base canonica:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{e}_1) &= (1,2,3) \\ \Omega(\mathbf{e}_2) &= (4,5,6) \\ \Omega(\mathbf{e}_3) &= (a,b,c) \end{aligned}$$

Affinchè $\dim \Omega(\mathbb{R}^3) = 2$, il sistema

$$\Lambda_3 = \{\Omega(\mathbf{e}_1), \Omega(\mathbf{e}_2), \Omega(\mathbf{e}_3)\}$$

Cioè la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 3 & 5 & b \\ 3 & 6 & c \end{pmatrix},$$

deve avere rango 2, quindi:

$$\det A = 0 \Longrightarrow a = 2b + c$$

Ciò implica:

$$\exists \infty^2 \ \Omega : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \{(1,2,3), (4,5,6)\} \text{ base di } \Omega\left(\mathbb{R}^3\right)$$

5. La linearità della (4.8) segue immediatamente dalle proprietà di additività e omogeneità dell'integrale definito di una funzione reale di variabile reale.

   Se indichiamo con $F(x)$ la primitiva di $f \in C^0(\mathbb{R})$, deve essere:

$$\Omega(f) = F(x) - F(0),$$

6. per cui:

$$\Omega : f(x) \mapsto F(x) - F(0)$$

   donde l'immagine di Ω :

$$\Omega\left(C^0(\mathbb{R})\right) = C^0(\mathbb{R})$$

   Per definizione di kernel:

$$Ker\Omega = \left\{ f(x) \in C^0(\mathbb{R}) : \Omega(f) = \mathbf{0}_{C^0(\mathbb{R})} \right\},$$

   essendo $\mathbf{0}_{C^0(\mathbb{R})}$ il vettore nullo di $C^0(\mathbb{R})$, cioè la funzione identicamente nulla su $\mathbb{R}$. Dobbiamo perciò risolvere l'equazione operatoriale:

$$\Omega(f) = \mathbf{0}_{C^0(\mathbb{R})},$$

   equivalente alla:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(\xi)\, d\xi = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = F(0) \Longleftrightarrow F(x) \equiv \text{const} \Longleftrightarrow f(x) \equiv 0$$

   Quindi:

$$Ker\Omega = \left\{ \mathbf{0}_{C^0(\mathbb{R})} \right\}$$

4.4 Lo spazio vettoriale $Hom(E, F)$

Siano E, F due spazi vettoriali su K. Poniamo per definizione:

$$Hom(E, F) \stackrel{def}{=} \{\Omega \mid \Omega \text{ omomorfismo tra } E \text{ e } F\} \tag{4.13}$$

In altri termini, $Hom(E, F)$ è la totalità delle applicazioni lineari tra i due spazi vettoriali E, F.

Introduciamo l'operazione di somma tra omomorfismi:

$$\begin{aligned} + : Hom\,(E,F) \times Hom\,(E,F) &\longmapsto Hom\,(E,F) \\ (\Omega_1,\Omega_2) \in Hom\,(E,F) \times Hom\,(E,F) &\longmapsto (\Omega_1+\Omega_2) \in Hom\,(E,F) \end{aligned} \tag{4.14}$$

La (4.14) è così definita:

$$\begin{aligned} &\Omega_1+\Omega_2 : E \longmapsto F \\ &\mathbf{v} \in E \longmapsto \mathbf{v}' = (\Omega_1+\Omega_2)\,\mathbf{v} \overset{def}{=} (\Omega_1\mathbf{v}+\Omega_2\mathbf{v}) \in F \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dimostriamo che $(\Omega_1+\Omega_2) \in Hom\,(E,F)$, cioè la linearità dell'applicazione $\Omega_1+\Omega_2$ definita dalla (4.15). Posto $\tilde{\Omega} = \Omega_1+\Omega_2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \forall\alpha,\beta \in K, \forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in E,\ \ \tilde{\Omega}\,(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}) &\overset{def}{=} \Omega_1\,(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}) + \Omega_2\,(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}) \\ &\overset{\Omega_k\in Hom(E,F)}{=} \alpha\Omega_1\mathbf{v}+\beta\Omega_1\mathbf{w}+\alpha\Omega_2\mathbf{v}+\beta\Omega_2\mathbf{w} \\ &= \alpha\,(\Omega_1+\Omega_2)\,\mathbf{v} + \beta\,(\Omega_1+\Omega_2)\,\mathbf{w} \\ &= \alpha\tilde{\Omega}\mathbf{v}+\beta\tilde{\Omega}\mathbf{w} \end{aligned}$$

Introduciamo ora l'operazione di prodotto di uno scalare per un elemento di $Hom\,(E,F)$:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times Hom\,(E,F) &\longmapsto Hom\,(E,F) \\ (\lambda,\Omega) \in K \times Hom\,(E,F) &\longmapsto (\lambda\Omega) \in Hom\,(E,F) \end{aligned} \tag{4.16}$$

La (4.16) è così definita:

$$\begin{aligned} &\lambda\Omega : E \longmapsto F \\ &\mathbf{v} \in E \longmapsto \mathbf{v}' = (\lambda\Omega)\,\mathbf{v} \overset{def}{=} \lambda\,(\Omega\mathbf{v}) \in F \end{aligned} \tag{4.17}$$

Dimostriamo che $(\lambda\Omega) \in Hom\,(E,F)$, cioè la linearità dell'applicazione $\lambda\Omega$ definita dalla (4.17). Posto $\Phi = \lambda\Omega$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \forall\alpha,\beta \in K, \forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in E,\ \ \Phi\,(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}) &\overset{def}{=} \lambda\Omega\,(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}) \\ &\overset{\Omega\in Hom(E,F)}{=} \lambda\,(\alpha\Omega\mathbf{v}+\beta\Omega\mathbf{w}) \\ &= \alpha\lambda\Omega\mathbf{v}+\beta\lambda\Omega\mathbf{w} \\ &= \alpha\Phi\mathbf{v}+\beta\Phi\mathbf{w} \end{aligned}$$

Con l'introduzione delle operazioni (4.14)-(4.16), l'insieme $Hom\,(E,F)$ assume la struttura di spazio vettoriale su K.

Osservazione 109 *L'elemento neutro in* $Hom(E,F)$ *è l'applicazione:*

$$\hat{O} : \mathbf{v} \in E \longmapsto \mathbf{0}_F \tag{4.18}$$

L'elemento opposto ad un elemento $\Omega \in Hom(E,F)$ *è l'applicazione:*

$$(-\Omega) \in Hom(E,F) : \mathbf{v} \in E \longmapsto (-\Omega\mathbf{v}) \in F$$

Nel caso speciale in cui $E = F$, la generica applicazione lineare $\Omega : E \longmapsto F$ è un operatore lineare spesso denominato **endomorfismo** o **trasformazione lineare** di E. In tal caso l'insieme (4.13) si indica con il simbolo $End(E)$.

4.5 Matrice rappresentativa

Siano E e F due spazi vettoriali sul medesimo campo K. Consideriamo due basi di E ed F rispettivamente:

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{e}_i\}, \quad i = 1, 2, ..., n = \dim E \\ &\{\mathbf{f}_j\}, \quad j = 1, 2, ..., m = \dim F \end{aligned}$$

Evidentemente:

$$\forall \Omega \in Hom(E,F), \quad \Omega\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbf{f}_j, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{4.19}$$

Esplicitiamo la (4.19):

$$\begin{aligned} \Omega\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{12}\mathbf{f}_2 + ... + a_{1m}\mathbf{f}_m \\ \Omega\mathbf{e}_2 &= a_{21}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + ... + a_{2m}\mathbf{f}_m \\ &... \\ \Omega\mathbf{e}_n &= a_{n1}\mathbf{f}_1 + a_{n2}\mathbf{f}_2 + ... + a_{nm}\mathbf{f}_m \end{aligned} \tag{4.20}$$

Definizione 110 *Si definisce* **matrice rappresentativa dell'omomorfismo** Ω **relativamente alle basi** $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{f}_j\}$, *la matrice* $n \times m$*:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1m} & a_{2m} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Scriviamo:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Si noti che la colonna *i-esima* della matrice rappresentativa di Ω è composta dalle componenti del vettore $\Omega\mathbf{e}_i$ nella base $\{\mathbf{f}_j\}$.
Nel caso speciale in cui $\Omega \in End\,(E)$, assumiamo $\{\mathbf{f}_i\} = \{\mathbf{e}_i\}$. La matrice (4.21) è la ***matrice rappresentativa dell'endomorfismo*** Ω ***relativamente alla base*** $\{\mathbf{e}_i\}$ o semplicemente ***matrice rappresentativa nella base*** $\{\mathbf{e}_i\}$.
Ad esempio consideriamo $\Omega \in End\,(\mathbb{R}^2)$:

$$\Omega : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (4x - 2y, 2x + y)$$

Determiniamo la matrice rappresentativa di Ω nei due casi seguenti:

1. nella base canonica $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.
2. Nella base $\mathbf{e}'_1 = (1, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (-1, 0)$.

Soluzione
Nella base canonica:

$$\Omega\mathbf{e}_1 = (4, 2) = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$
$$\Omega\mathbf{e}_2 = (-2, 1) = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

quindi

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nella base $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\Omega\mathbf{e}'_1 = (2, 3)$$
$$\Omega\mathbf{e}'_2 = (-4, -2)$$

Eseguiamo il cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}'_i\}$. La matrice è:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$\Omega\mathbf{e}'_1 = 3\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2$$
$$\Omega\mathbf{e}'_1 = -2\mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2,$$

quindi la matrice rappresentativa nella base $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.5.1 Prodotto di endomorfismi

Siano $\Omega, \Phi \in End\,(E)$. Dicesi **prodotto dell'endomorfismo Ω per l'endomorfismo Φ**, l'endomorfismo $\Psi = \Phi \circ \Omega$ così definito:

$$\forall \mathbf{v} \in E,\, \Psi \mathbf{v} = \Phi\,(\Omega \mathbf{v})$$

È facile mostrare che $\Psi \in End\,(E)$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\forall \lambda, \mu \in K,\ \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\, \Psi\,(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) &\overset{def}{=} \Phi\,(\Omega\,(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w})) \\
&\overset{\Omega \in End(E)}{=} \Phi\,(\lambda \Omega \mathbf{v} + \mu \Omega \mathbf{w}) \\
&\overset{\Phi \in End(E)}{=} \lambda \Phi\,(\Omega \mathbf{v}) + \mu \Phi\,(\Omega \mathbf{w}) \\
&\overset{def}{=} \lambda \Psi \mathbf{v} + \mu \Psi \mathbf{w}
\end{aligned}$$

Proposizione 111 *Se A e B sono le matrici rappresentative di Ω e Φ relativamente alla base $\{\mathbf{e}_i\}$, la matrice rappresentativa di $\Phi \circ \Omega$ relativamente alla medesima base è $B \cdot A$, dove $\cdot$ denota il prodotto righe per colonne.*

Dimostrazione. Sia $\Omega \doteq A = (a_{ij})$, $\Phi \doteq B = (b_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n = \dim E$. Quindi:

$$\forall \mathbf{x} \in E,\, \Omega \mathbf{x} \doteq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{x} \in E,\, \Psi \mathbf{x} = \Phi\,(\Omega \mathbf{x}) &\doteq \sum_{l=1}^{n} b_{kl} \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{kl} a_{lj} x_j \Longrightarrow \Psi \doteq (c_{kj})\,,
\end{aligned}$$

essendo:

$$c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{kl} a_{lj},$$

donde:

$$C \overset{def}{=} (c_{kj}) = B \cdot A$$

■

Definizione 112 *L'operatore $\Omega \in End\,(E)$ è* **nilpotente**, *se risulta: $\Omega^2 = \Omega \circ \Omega = \hat{0}$, essendo $\hat{0} : \mathbf{x} \in E \longmapsto \mathbf{0}$.*
Più in generale, se $\exists p \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\} : \Omega^p = \hat{0}$, diremo che Ω è **nilpotente con indice di nilpotenza** *p.*

Definizione 113 *L'operatore $\Omega \in End\,(E)$ è* **idempotente**, *se risulta: $\Omega^2 = \Omega$.*

Ad esempio, gli operatori:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \Lambda \doteq \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$$

Sono rispettivamente nilpotente e idempotente:

$$\Omega^2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Omega^2 = \hat{0}$$
$$\Lambda^2 \doteq \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Lambda^2 = \Lambda$$

Esempi.
Consideriamo l'operatore lineare:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, y) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Costruiamo la matrice rappresentativa di (4.22) relativamente alle basi:

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$$
$$\{\mathbf{f}_1 = (2, 1), \mathbf{f}_2 = (1, 2)\}$$

Abbiamo:

$$\Omega\mathbf{e}_1 = (1, 0) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2$$
$$\Omega\mathbf{e}_2 = (1, 1) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2,$$

donde:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passiamo alla base $\{\mathbf{f}_i\}$:

$$\Omega\mathbf{f}_1 = (3, 1)$$
$$\Omega\mathbf{f}_2 = (3, 2)$$

Dobbiamo esprimere i suddetti vettori nella base $\{\mathbf{f}_i\}$, ovvero eseguire il cambiamento di base.

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow R^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde:

$$\Omega \mathbf{f}_1 = \frac{5}{3}\mathbf{f}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{f}_2$$
$$\Omega \mathbf{f}_2 = \frac{4}{3}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{f}_2$$

Quindi:

$$\Omega \doteq \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

***

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{P}_n[x]$ dei polinomi di grado $\leq n$, quindi l'operatore di derivazione $D \equiv \frac{d}{dx}$:

$$D : \mathcal{P}_n[x] \longmapsto \mathcal{P}_{n-1}[x]$$
$$p_m(x) \longmapsto \frac{d}{dx}p_m(x)$$

Determiniamo la matrice rappresentativa di D relativamente alle basi:

$$\{e_i(x)\}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$
$$\{f_j(x)\}, \quad (j = 1, 2, ..., n-1)$$

essendo:

$$e_0(x) = 1$$
$$e_1(x) = x$$
$$e_2(x) = x^2$$
$$...$$
$$e_n(x) = x^n$$

mentre $\{f_j(x)\}$ è una base dello spazio $\mathcal{P}_{n-1}[x]$:

$$f_0(x) = 1$$
$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = x^2$$
$$...$$
$$f_{n-1}(x) = x^{n-1}$$

A tale scopo determiniamo i vettori $e_i'(x) = De_i(x)$. Risulta:

$$
\begin{aligned}
e_0'(x) &= De_0(x) = 0\\
e_1'(x) &= De_1(x) = 1\\
e_3'(x) &= De_2(x) = 2x\\
&...\\
e_n'(x) &= De_n(x) = nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

Scriviamo i vettori $e_i'(x)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\{f_i(x)\}$:

$$
\begin{aligned}
e_0'(x) &= 0\cdot f_0(x) + 0\cdot f_1(x) + 0\cdot f_2(x) + ... + 0\cdot f_{n-1}(x)\\
e_1'(x) &= 1\cdot f_0(x) + 0\cdot f_1(x) + 0\cdot f_2(x) + ... + 0\cdot f_{n-1}(x)\\
e_2'(x) &= 0\cdot f_0(x) + 2\cdot f_1(x) + 0\cdot f_2(x) + ... + 0\cdot f_{n-1}(x)\\
e_3'(x) &= 0\cdot f_0(x) + 0\cdot f_1(x) + 3\cdot f_2(x) + ... + 0\cdot f_{n-1}(x)\\
&...\\
e_n'(x) &= 0\cdot f_0(x) + 0\cdot f_1(x) + 0\cdot f_2(x) + ... + n\cdot f_{n-1}(x),
\end{aligned}
$$

da cui la matrice rappresentativa:

$$
D \doteq \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & n \end{pmatrix}\right\}}_{n+1 \text{ colonne}} n \text{ righe}
$$

4.5.2 Endomorfismo inverso

Definizione 114 *Se* $\Omega \in End(E)$*, diremo che esso è* **invertibile** *se esiste* $\Omega^{-1} \in End(E)$ *denomoninato* **inverso dell'operatore** Ω *tale che:*

$$
\Omega\Omega^{-1} = \Omega^{-1}\Omega = \hat{1}
$$

Un endomorfismo invertibile è spesso denominato **automorfismo.**

Proposizione 115

$$
\begin{pmatrix} \Omega \in End(E) \\ \text{è invertibile} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (A \text{ è non singolare}),
$$

essendo A *la matrice rappresentativa di* Ω *in una base assegnata.*

Dimostrazione. In una base assegnata, indichiamo con $\tilde{A}$ la matrice rappresentativa di Ω^{-1}. Deve essere:

$$
A\tilde{A} = \tilde{A}A = \overline{I}_n \tag{4.23}
$$

Dall'algebra delle matrici segue che la (4.23) è vera se e solo se $\tilde{A} = A^{-1}$. ■

4.5.3 Esercizi

1. Determinare la matrice rappresentativa dell'operatore omotetia (es. 4.2)

2. Assegnata l'applicazione:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, x + y, x) \,, \end{aligned}$$

   mostrare che $\Omega \in Hom\,(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, determinando poi la sua matrice rappresentativa relativamente alle basi:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_1 = (1, 0) \,, \mathbf{e}_2 = (0, 1)\} \\ \{\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0) \,, \mathbf{f}_2 = (0, 1, 0) \,, \mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

3. Sia E uno spazio vettoriale su K con $\dim E = 3$. Si consideri l'operatore lineare $\Omega : E \longmapsto E$ tale che la sua applicazione sulla base $\{\mathbf{e}_i\}$ è:

$$\mathbf{e}_i \longmapsto \begin{cases} \mathbf{e}_{i-1}, & \text{se } i > 1 \\ \mathbf{0}, & \text{se } i = 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

   Determinare: a) il risultato dell'applicazione di Ω su un qualunque vettore di E; b) la matrice rappresentativa di Ω nella base $\{\mathbf{e}_i\}$.

4. Si determini la nullità del seguente operatore lineare:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - 4y, -x + 2y) \end{aligned}$$

4.5.3.1 Soluzioni

1. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Omega : E &\longmapsto E \\ \mathbf{v} &\longmapsto \lambda \mathbf{v} \end{aligned}$$

   essendo $\lambda \in K - \{0\}$ il rapporto di omotetia. Consideriamo una base di E:

$$\{\mathbf{e}_i\} \,, \; i = 1, 2, ..., n = \dim E \tag{4.25}$$

   Applichiamo Ω ai vettori di base:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \lambda \mathbf{e}_1 = \lambda \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 &= \lambda \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda \cdot \mathbf{e}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{e}_n \\ &... \\ \mathbf{e}'_n &= \lambda \mathbf{e}_n = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + ... + \lambda \cdot \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Quindi la matrice rappresentativa di Ω è la matrice diagonale:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ciò si esprime dicendo che Ω *è diagonale* nella base (4.25).

Nel caso speciale $\lambda = 1$, l'operatore omotetia si identifica con l'operatore identità: $\hat{1} : \mathbf{v} \longmapsto \mathbf{v}$, la cui matrice rappresentativa è la matrice identità di ordine n:

$$\hat{1} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

2. Iniziamo a dimostrare la linearità.

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \mathbf{w} = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ \Omega \mathbf{u} = (\lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x') \\ = (\lambda (x - y) + \mu (x' - y'), \lambda (x + y) + \mu (x' + y'), \lambda x + \mu x') \\ = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} \Longrightarrow \Omega \in Hom\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right) \end{aligned}$$

Determiniamo ora il risultato dell'applicazione di Ω sui vettori di base:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= \Omega \mathbf{e}_1 = (1, 1, 1) \\ \mathbf{e}_2' &= \Omega \mathbf{e}_2 = (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

Quindi esprimiamo tali vettori nella base $\{\mathbf{f}_j\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= 1 \cdot \mathbf{f}_1 + 1 \cdot \mathbf{f}_2 + 1 \cdot \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{e}_2' &= -1 \cdot \mathbf{f}_1 + 1 \cdot \mathbf{f}_2 + 0 \cdot \mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

da cui la matrice rappresentativa:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sia $\mathbf{x} \in E$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i$$

Applichiamo Ω:

$$\begin{aligned} \Omega \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{3} x_i \Omega \mathbf{e}_i \\ &= x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

donde:

$$\Omega : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \mathbf{x}' = (x_2, x_3, 0) \tag{4.27}$$

Per determinare la matrice rappresentativa, esplicitiamo le (4.24):

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= \Omega \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_2' &= \Omega \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_3' &= \Omega \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

per cui:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che al risultato (4.27) si perviene attraverso la moltiplicazione righe x colonne delle matrici rappresentative di Ω e $\mathbf{x}$ rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

4. Come è noto:

$$N(\Omega) = \dim Ker(\Omega)$$

Determiniamo il kernel dell'operatore:

$$\begin{aligned}
Ker\Omega &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \Omega \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x - 4y, -x + 2y) = (0, 0) \right\}
\end{aligned}$$

Gli elementi di $Ker\Omega$ sono i vettori $\mathbf{x} = (x, y)$ le cui componenti sono soluzioni del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned}
2x - 4y &= 0 \\
-x + 2y &= 0,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

equivalente all'equazione lineare omogenea:

$$x - 2y = 0,$$

per cui il sistema (2.23) ammette ∞^1 autosoluzioni:

$$(x, y) = (2y, y)$$

Quindi il kernel di Ω è:

$$Ker\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y, \ -\infty < y < +\infty \right\}$$

La nullità:

$$N(\Omega) = 1$$

4.6 Autovalori e autovettori di un endomorfismo

4.6.1 Definizioni

Da qui in poi indichiamo con un simbolo del tipo $\hat{X}$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale e con X la matrice rappresentativa relativamente ad una base assegnata. Ciò premesso, sia $\hat{A} \in End\,(E)$:

$$\begin{aligned} \hat{A} : E &\longmapsto E \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{v}' \quad \forall \mathbf{v} \in E \end{aligned}$$

In generale il vettore $\mathbf{v}'$ - risultato dell'applicazione dell'operatore $\hat{A}$ sul vettore $\mathbf{v}$ - non è proporzionale a $\mathbf{v}$. Ci si può chiedere se esistono vettori che verifichino tale proprietà. Più precisamente, sussiste la seguente definizione:

Definizione 116 *Il vettore* $\mathbf{v} \in E - \{\mathbf{0}\}$ *dicesi* **autovettore** *dell'operatore* $\hat{A}$ *se esiste uno scalare* $\lambda \in K$ *tale che:*

$$\hat{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Lo scalare λ *si chiama* **autovalore** *di* $\hat{A}$*, e diremo che* $\mathbf{v}$ *è un autovettore appartenente (o associato) all'autovalore* λ*.*

Si osservi che se $\mathbf{v}$ è autovettore di $\hat{A}$ con autovalore λ, per ogni $\alpha \in K - \{0\}$:

$$\hat{A}\,(\alpha \mathbf{v}) = \alpha \hat{A}\mathbf{v} = \lambda\,(\alpha \mathbf{v})\,, \tag{4.30}$$

cioè $\alpha \mathbf{v}$ è ancora autovettore di $\hat{A}$ con autovalore λ. Sia $V\,[\mathbf{v}]$ il sottospazio di E generato da $\mathbf{v}$:

$$V\,[\mathbf{v}] = \left\{ (\alpha \mathbf{v}) \in E \mid \hat{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},\, \alpha \in K - \{0\} \right\} \tag{4.31}$$

Chiamiamo (4.31) **sottospazio invariante** per l'operatore $\hat{A}$.

***

Assegnato $\lambda \in K$, consideriamo l'insieme:

$$E\,(\lambda) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{v} \in E - \{\mathbf{0}\} \mid \hat{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \right\} \tag{4.32}$$

In altri termini consideriamo la totalità dei vettori di E che sono autovettori di $\hat{A}$ appartenenti al medesimo autovalore λ.

Proposizione 117 $E'\,(\lambda) = E\,(\lambda) \cup \{\mathbf{0}\}$ *è un sottospazio di* E*.*

Dimostrazione. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E'\,(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \hat{A}\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &\stackrel{\hat{A} \in End(E)}{=} \hat{A}\mathbf{v} + \hat{A}\mathbf{w} \\ &= \lambda\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in E'\,(\lambda) \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in K$, $\forall \mathbf{v} \in E'\,(\lambda)$, per la (4.30) il vettore $(\alpha \mathbf{v}) \in E'\,(\lambda)$. $\blacksquare$

Definizione 118 *Il sottospazio $E'(\lambda)$ dicesi* **autospazio** *di $\hat{A}$ associato all'autovalore λ.*

Teorema 119 *Autovettori appartenenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia $\hat{A} \in End(E)$ tale che:

$$\begin{gathered}\hat{A}\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k, \quad k = 1, 2, ..., n \\ \lambda_k \neq \lambda_{k'}, \; k, k' \in \underset{k \neq k'}{\{1, 2, ..., n\}}\end{gathered} \tag{4.33}$$

Si osservi che nel caso speciale $n = 1$, l'asserto è banalmente vero:

$$\hat{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$$

Per definizione di autovettore deve essere $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e come tale $\mathbf{v}_1$ è linearmente indipendente. Per dimostrare l'asserto per ogni n, procediamo per induzione:

$$\left(\begin{array}{c} \text{la proposizione è vera} \\ \text{per } r = n - 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{la proposizione è vera} \\ \text{per } r = n \end{array} \right) \tag{4.34}$$

Per dimostrare l'implicazione induttiva (4.34) procediamo per assurdo. La negazione della tesi è:

$$\left(\begin{array}{c} \text{la proposizione è falsa} \\ \text{per } r = n \end{array} \right),$$

ovvero:

$$\left(\begin{array}{c} \text{il sistema } \Sigma_n = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} \\ \text{è linearmente dipendente} \end{array} \right)$$

Quindi:

$$\exists \left(a_1, a_2, ..., a_n\right) \neq (0, 0, ..., 0) \mid a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{4.35}$$

Senza perdita di generalità supponiamo che:

$$a_1 \neq 0 \tag{4.36}$$

Applichiamo l'operatore $\hat{A}$ ad ambo i membri della combinazione lineare (4.35), osservando che il vettore nullo è invariante rispetto all'azione di un qualunque operatore lineare:

$$\hat{A}\left(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n\right) = \mathbf{0}$$

Per la (4.33):

$$a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{4.37}$$

Moltiplichiamo la (4.35) per λ_n, per poi scrivere il sistema di equazioni:

$$\begin{gathered}a_1\lambda_n\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_n\mathbf{v}_2 + ... + a_n\lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \\ a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\end{gathered}$$

Sottraendo membro a membro:

$$a_1\left(\lambda_1 - \lambda_n\right)\mathbf{v}_1 + a_2\left(\lambda_2 - \lambda_n\right)\mathbf{v}_2 + ... + a_{n-1}\left(\lambda_{n-1} - \lambda_n\right)\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$$

Per la (4.36) e la seconda delle (4.33):

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_n) \neq 0,$$

cioè il sistema $\Sigma_{n-1} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n-1}\}$ è linearmente dipendente. Inoltre:

$$\Sigma_{n-1} \subset \Sigma_n \Longrightarrow \Sigma_n \text{ è linearmente dipendente},$$

che è una negazione dell'ipotesi (4.34).
La negazione della tesi implica la negazione dell'ipotesi, da cui l'asserto. ■

4.6.2 Polinomio caratteristico

Sia $\hat{A} \in End(E)$ rappresentato dalla matrice (in una base assegnata):

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, ..., n = \dim E < +\infty$$

Proposizione 120

$$\hat{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Longleftrightarrow \det\left(A - \lambda \overline{1}_n\right) = 0,$$

essendo $\overline{1}_n$ la matrice identità di ordine n.

Dimostrazione. L'equazione agli autovalori:

$$\hat{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

è equivalente alla:

$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{1}\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{4.38}$$

essendo $\hat{1} \in End(E)$ l'operatore identità: $\hat{1}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in E$. Per quanto detto, la matrice rappresentativa di $\hat{A}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

mentre la matrice rappresentativa di $\mathbf{u}$ è il vettore colonna:

$$\mathbf{u} \doteq \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{pmatrix}$$

Ovviamente la matrice rappresentativa del vettore nullo è il vettore colonna:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da ciò segue:

$$\hat{A} - \lambda\hat{1} \doteq A - \lambda\bar{1}_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{1}\right)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

La (4.39) è equivalente al sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n &= 0 \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - \lambda) u_2 + \dots + a_{2n}u_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) u_n &= 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Come è noto, il sistema (4.40) ammette autosoluzioni se e solo se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

cioè:

$$\det\left(A - \lambda\bar{1}_n\right) = 0$$

■

Si osservi che $\det\left(A - \lambda\bar{1}_n\right)$ è un polinomio di grado n, quindi poniamo per definizione:

$$p_A(\lambda) \overset{def}{=} \det\left(A - \lambda\bar{1}_n\right) \tag{4.41}$$

Chiamiamo $p_A(\lambda)$ **polinomio caratteristico** dell'endomorfismo $\hat{A}$.

Esempi.

Esplicitare il polinomio caratteristico degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, rappresentati dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Per l'operatore $\hat{A}$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{21} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 + (-a_{11} - a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} \end{aligned}$$

Per l'operatore $\hat{B}$:

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 (b_{11}+b_{22}+b_{33}) + \lambda (b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} + b_{13}b_{31} + b_{23}b_{32} - b_{11}b_{33} - b_{22}b_{33}) +$$
$$- b_{13}b_{22}b_{31} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{11}b_{22}b_{33}$$

Da tali esempi si evince che nel caso $n \times n$:

$$p_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{ij}) \lambda^k,$$

essendo $\alpha_k (a_{ij})$ funzioni degli elementi di matrice.

***

Per quanto detto, gli autovalori di un endomorfismo $\hat{A}$ sono le radici (in K) del polinomio caratteristico. Dalla conoscenza di tali radici, risolvendo il sistema lineare (4.40) si ottengono i corrispondenti autovettori.

Esempio.

Determinare autovalori e autovettori dell'operatore $\hat{A} : \mathbb{C}^2 \longmapsto \mathbb{C}^2$ rappresentato dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 + 1$$

Da ciò segue che gli autovalori di $\hat{A}$ sono le radici dell'equazione:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -i, \; \lambda_2 = +i$$

Le componenti degli autovettori corrispondenti sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} (1-\lambda_k) u_1 - u_2 &= 0 \\ 2u_1 - (1+\lambda_k) u_2 &= 0, \end{aligned} \tag{4.42}$$

ottenendo:

$$\mathbf{u}^{(1)} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, \; \mathbf{u}^{(2)} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Si osservi che gli autovettori $\mathbf{u}^{(k)}$ sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, poiché il sistema (4.42) ammette ∞^1 autosoluzioni.

***

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti in K:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{4.43}$$

Se $\hat{A} \in End(E)$, essendo E uno spazio vettoriale *n-dimensionale* sul campo K, eseguiamo nella (4.43) la sostituzione:

$$x \to \hat{A},\ a_0 \to a_0 \hat{1}$$

ottenendo l'operatore

$$p\left(\hat{A}\right) = a_0 \hat{1} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + ... + a_n \hat{A}^n \tag{4.44}$$

Se A è la matrice rappresentativa di $\hat{A}$:

$$p\left(\hat{A}\right) \doteq p(A) = a_0 \overline{1}_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$$

Esempio.

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 7; q(x) = x^2 - 5x - 2;\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 7 \cdot \overline{1}_2 = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 27 & 27 \end{pmatrix};\ \ q(A) = A^2 - 5A - 2\overline{1}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$$

Definizione 121 *Se risulta $p(A) = 0$, diremo che $p(x)$ è un* **polinomio annullatore di** *A.*

Teorema (di Cayley-Hamilton) 122 *Il polinomio caratteristico di una qualunque matrice A è un polinomio annullatore di A.*

4.6.3 Endomorfismi diagonalizzabili

Consideriamo uno spazio vettoriale E *n-dimensionale* sul campo K.

Definizione 123 *$\hat{A} \in End(E)$ è* **diagonalizzabile** *se esiste una base di E tale che: $\hat{A} \doteq A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.*

Proposizione 124 *$\hat{A} \in End(E)$ è diagonalizzabile se e solo se $\hat{A}$ ammette n autovettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. La condizione è necessaria.
Per ipotesi:

$$\hat{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

Il sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_i\}$ è una base di E, in quanto sistema di ordine massimo. Scriviamo la matrice rappresentativa dell'operatore $\hat{A}$ nella base Σ. A tale scopo determiniamo il risultato dell'applicazione di $\hat{A}$ sui vettori di Σ:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\mathbf{v}_1 &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{v}_n \\
\hat{A}\mathbf{v}_2 &= 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{v}_n \\
&... \\
\hat{A}\mathbf{v}_n &= 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\hat{A} \doteq A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

donde l'asserto.

La condizione è sufficiente.

Per ipotesi $\hat{A}$ è diagonalizzabile, per cui esiste una base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E tale che

$$\hat{A} \doteq A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Per definizione di matrice rappresentativa deve essere:

$$\hat{A}\mathbf{e}_i = a_{ii}\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

cioè $\hat{A}$ ammette n autovettori linearmente indipendenti. ■

***

Consideriamo l'autospazio $E'(\lambda_i)$ corrispondente all'autovalore λ_i di $\hat{A} \in End(E)$.

Definizione 125 *Dicesi* **molteplicità geometrica**[1] **di** λ_i *l'intero naturale* $r_i = \dim E'(\lambda_i) \geq 1$.

Supponiamo che $\{\mathbf{u}_{i,1}, \mathbf{u}_{i,2}, ..., \mathbf{u}_{i,r_i}\}$ sia una base di $E'(\lambda_i)$ con $r_i > 1$. Siccome $\mathbf{u}_{i,j} \in E(\lambda_i)$, deve essere:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\mathbf{u}_{i,1} &= \lambda_i \mathbf{u}_{i,1} \\
\hat{A}\mathbf{u}_{i,2} &= \lambda_i \mathbf{u}_{i,2} \\
&... \\
\hat{A}\mathbf{u}_{i,r_i} &= \lambda_i \mathbf{u}_{i,r_i}
\end{aligned}$$

[1] In alcune teorie fisiche (Meccanica Quantistica) la molteplicità geometrica è denominata *grado di degenerazione*, e il corrispondente autovalore si dice *degenere*.

In altri termini al medesimo autovalore λ_i corrispondono più autovettori linearmente indipendenti. In simboli:

$$\lambda_i \longrightarrow \{\mathbf{u}_{i,1}, \mathbf{u}_{i,2}, ..., \mathbf{u}_{i,r_i}\}$$

D'altro canto, λ_i è una radice del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ e come tale avrà una **molteplicità algebrica** $\nu_i \geq 1$.

Teorema 126 *Se λ_i è autovalore di $\hat{A} \in End(E)$, allora $r_i \leq \nu_i$.*

Dimostrazione. Omessa ■

Proposizione 127 *Sia E uno spazio vettoriale finito-dimensionale. $\hat{A} \in End(E)$ dotato di q autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q$, è diagonalizzabile se e solo se:*

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = n,$$

essendo $n = \dim E$.

Dimostrazione. Omessa ■
Esempi
Consideriamo gli operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in End(\mathbb{R}^3)$ che nella base canonica $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ sono rappresentati dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si diagonalizzino (quando è possibile) i suddetti operatori.
Soluzione.
Polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right),$$

le cui radici - autovalori di A - sono:

$$\lambda_1 = 2, \ \nu_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 3, \ \nu_2 = 1$$

Da ciò segue immediatamente che $r_2 = 1$, $r_1 \leq 2$.

$$\lambda_1 \longrightarrow \mathbf{u}_1 = (1,0,0),$$

donde:

$$E(\lambda_1) = \{\alpha \mathbf{u}_1 : \alpha \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow r_1 = 1$$

All'autovalore λ_2:

$$\lambda_2 = 3 \longrightarrow \mathbf{u}_2 = (-1, -1, 2)$$

Si conclude che l'operatore $\hat{A}$ possiede solo due autovettori indipendenti, e come tale non è diagonalizzabile. Alternativamente, osserviamo che:

$$\sum_{i=1}^{2} r_i = 2 < n = \dim E,$$

quindi per la proposizione 127 l'endomorfismo $\hat{A}$ non è diagonalizzabile.
Polinomio caratteristico di $\hat{B}$:

$$p_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \, \nu_1 = 1 \Longrightarrow r_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3, \, \nu_2 = 2 \Longrightarrow r_2 \leq 2 \end{aligned}$$

Iniziamo con λ_1:

$$\begin{aligned} 0 + 2u_2 + 2u_3 &= 0 \\ u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ -u_1 + u_2 + 3u_2 &= 0, \end{aligned}$$

che ammette ∞^1 soluzioni proprie:

$$(u_1, u_2, u_3) = u_3 (2, -1, 1)$$

Quindi

$$\lambda_1 \longrightarrow \mathbf{u}_1 = (2, -1, 1)$$

Passiamo all'autovalore λ_2:

$$\begin{aligned} -2u_1 + 2u_2 + 2u_3 &= 0 \\ u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ -u_1 + u_2 + u_3 &= 0, \end{aligned}$$

che ammette ∞^2 soluzioni proprie:

$$(u_1, u_2, u_3) = u_2 (-1, 1, 0) + u_3 (1, 0, 1)$$

Quindi

$$\lambda_2 = 3 \longrightarrow \mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0), \, \mathbf{u}_{2,2} = (1, 0, 1)$$

Ciò implica:

$$r_2 = \dim E(\lambda_2) = 2$$

Il sistema $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{2,1}, \mathbf{u}_{2,2}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e in essa la matrice rappresentativa di $\hat{B}$ è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Operatore $\hat{C}$
La risposta è banale: $\hat{C}$ è diagonale nella base canonica.

***

Consideriamo due sistemi di assi cartesiani del piano $R(0xy)$ e $R'(0x'y')$, aventi in comune l'origine. Quindi gli assi cartesiani x', y' sono ruotati rispetto a x, y di un angolo θ. Le equazioni di trasformazione sono:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{4.45}$$

Le (4.45) possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

Nel formalismo operatoriale le (4.46) possono essere interpretate come l'azione di un operatore $\hat{\mathcal{R}}(\theta)$ su un generico vettore posizione $\mathbf{x} = (x, y)$:

$$\hat{\mathcal{R}}(\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{x}'$$

essendo $\mathbf{x}' = (x', y')$ il vettore posizione rispetto al sistema di coordinate ruotato di θ attorno all'origine. Evidentemente:

$$\hat{\mathcal{R}}(\theta) \in End\left(\mathbb{R}^2\right) \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

La matrice rappresentativa di $\hat{\mathcal{R}}(\theta)$ nella base $\{(1,0), (0,1)\}$ è:

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico:

$$p_{\mathcal{R}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1,$$

le cui radici sono:

$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} \tag{4.47}$$

Abbiamo:

$$
\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \sin^2\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = k\pi, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}
$$

$$
\theta \in \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\} \Longrightarrow \lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta
$$

Pertanto gli autovalori reali sono:

$$
\lambda_k = \cos(k\pi) = (-1)^k, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}
$$

Le corrispondenti equazioni agli autovalori sono:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}(0)\,\mathbf{x} &= \lambda_0\mathbf{x} \\
\hat{\mathcal{R}}(\pi)\,\mathbf{x} &= \lambda_1\mathbf{x} \\
\hat{\mathcal{R}}(2\pi)\,\mathbf{x} &= \lambda_2\mathbf{x} \\
&.......... \\
\hat{\mathcal{R}}(k\pi)\,\mathbf{x} &= \lambda_k\mathbf{x} \\
&..........
\end{aligned}
$$

Passiamo agli autovalori complessi, nel senso che consideriamo $\hat{\mathcal{R}}(\theta)$ quale operatore lineare:

$$
\hat{\mathcal{R}}(\theta) : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2
$$

Qui $\mathbb{R}^2$ è inteso come spazio vettoriale sul campo complesso $\mathbb{C}$, anzichè sul campo reale $\mathbb{R}$. Innanzitutto deve essere $\theta \neq k\pi$:

$$
\lambda_k = \cos\theta \pm i\sin\theta
$$

Le relative molteplicità (algebrica e geometrica):

$$
\begin{aligned}
\nu_1 = 1, \ \ r_1 = 1 \\
\nu_2 = 1, \ \ r_2 = 1
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\sum_{1}^{q=2} r_i = 2 = n \Longrightarrow \hat{\mathcal{R}}(\theta) \ \text{ è diagonalizzabile}
$$

Le componenti (u_1, u_2) del generico autovettore sono le autosoluzioni del sistema omogeneo:

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta - \lambda)\,u_1 + (\sin\theta)\,u_2 &= 0 \\
(-\sin\theta)\,u_1 + (\cos\theta - \lambda)\,u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Per $\lambda = \lambda_1$, una delle infinite soluzioni è:

$$\mathbf{u}_1 = (1, -i)$$

Per $\lambda = \lambda_2$, una delle infinite soluzioni è:

$$\mathbf{u}_2 = (1, i)$$

I corrispondenti autospazi sono:

$$\begin{aligned} E'(\lambda_1) &= \{\alpha \mathbf{u}_1 \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ E'(\lambda_2) &= \{\beta \mathbf{u}_2 \mid \beta \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Nella base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ la matrice rappresentativa di $\hat{\mathcal{R}}(\theta)$ è:

$$\mathcal{R}_{diag}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta - i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta \end{pmatrix}$$

4.6.4 Proiettori

Sia E uno spazio vettoriale su K. Supponiamo che E ammetta una decomposizione in somma diretta di N sottospazi:

$$E = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_N$$

In tal modo un qualunque $\mathbf{x} \in E$ si esprime in uno ed un solo modo come somma di vettori appartenenti a U_1,U_2, ..., U_N:

$$\mathbf{x} \in E \Longrightarrow \exists \mathbf{x}_k \in U_k \quad (k = 1, 2, ..., N) \mid \; \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{x}_N \tag{4.48}$$

Per quanto detto, la (4.48) è univocamente determinata dal vettore $\mathbf{x}$, per cui possiamo definire N applicazioni:

$$\begin{aligned} \hat{P}_k : E &\longmapsto E \qquad k = 1, 2, ..., N \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}_k \in U_k \qquad \forall \mathbf{x} \in E \end{aligned} \tag{4.49}$$

Dimostriamo la linearità della (4.49).

$$\begin{aligned} &\forall \lambda, \mu \in K, \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E \\ \hat{P}_k(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}') &= \lambda \mathbf{x}_k + \mu \mathbf{x}'_k \\ &= \lambda \hat{P}_k \mathbf{x} + \mu \hat{P}_k \mathbf{x}' \end{aligned}$$

per cui $\hat{P}_k \in End(E)$.

Definizione 128 *Gli operatori* $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$,...,$\hat{P}_N$ *si dicono* **proiettori per** E

L'immagine di $\hat{P}_k$ è:

$$\hat{P}_k(E) = U_k$$

Determiniamo il kernel di $\hat{P}_k$:

$$\ker \hat{P}_k = \left\{ \mathbf{x} \in E \mid \hat{P}_k \mathbf{x} = \mathbf{0}_E \right\}$$

Dobbiamo risolvere l'equazione operatoriale:

$$\hat{P}_k \mathbf{x} = \mathbf{0}_E$$

Le soluzioni sono:

$$\mathbf{x} \in U_{h \neq k},$$

donde:

$$\ker \hat{P}_k = U_1 + U_2 + ... + U_{k-1} + U_{k+1} + ... + U_N$$

I proiettori sono operatori idempotenti:

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \hat{P}_k^2 \mathbf{x} = \hat{P}_k \left(\hat{P}_k \mathbf{x} \right) = \hat{P}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k \Longrightarrow \hat{P}_k^2 = \hat{P}_k$$

Altre proprietà:

$$\left(\hat{P}_h \hat{P}_k \right) \mathbf{x} = \hat{P}_h \left(\hat{P}_k \mathbf{x} \right) = \hat{P}_h \mathbf{x}_k = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } h \neq k \\ \mathbf{x}_h, & \text{se } h = k \end{cases}$$

Cioè:

$$\hat{P}_h \hat{P}_k = \delta_{hk} \mathbf{x}_k,$$

essendo δ_{hk} il simbolo di Kronecker.

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + ... + \hat{P}_N \right) \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} \hat{P}_k = \hat{1}$$

Supponiamo che $\dim E = n$. Assegnata la base canonica $\{\mathbf{e}_k\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, ..., 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, ..., 0) \\ &... \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

resta definita la decomposizione di E:

$$E = U_1 \oplus U_2 \oplus +... + U_n,$$

essendo U_k il sottospazio di E generato da $\mathbf{e}_k$. Assegnato $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\hat{P}_k\mathbf{x} = \mathbf{x}_k = (0, ..., x_k, ..., 0)$$

Restano così definiti n proiettori, le cui matrici rappresentative nella base canonica sono:

$$\hat{P}_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$...$$

$$\hat{P}_n \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Esempi

Consideriamo il piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Assegnato un sistema di assi cartesiani $0xy$, siano $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi cartesiani. Evidentemente essi compongono una base di $\mathbb{R}^2$. Assegnato un qualunque vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = (x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Indichiamo con U_x, U_y i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ generati da $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ rispettivamente. Evidentemente:

$$\mathbb{R}^2 = U_x \oplus U_y$$

Resta così definita la coppia di proiettori:

$$\hat{P}_x\mathbf{v} = \mathbf{v}_x$$
$$\hat{P}_y\mathbf{v} = \mathbf{v}_y,$$

essendo $\mathbf{v}_x = (x, 0)$, $\mathbf{v}_y = (0, y)$.
La matrice rappresentativa di $\hat{P}_x$ nella base $\Sigma = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ è:

$$\hat{P}_x \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cioè $\hat{P}_x$ è diagonale in Σ. Gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

I corrispondenti autovettori sono i vettori di base, quindi abbiamo le equazioni agli autovalori:

$$\hat{P}_x \mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i}$$
$$\hat{P}_x \mathbf{j} = 0 \cdot \mathbf{j}$$

Passiamo al proiettore $\hat{P}_y$:

$$\hat{P}_y \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori:

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$$

I corrispondenti autovettori sono i vettori di base, quindi abbiamo le equazioni agli autovalori:

$$\hat{P}_y \mathbf{i} = 0 \cdot \mathbf{i}$$
$$\hat{P}_y \mathbf{j} = 1 \cdot \mathbf{j} \tag{4.50}$$

4.6.5 Esercizi

1. Assegnati gli operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in End\,(\mathbb{C})$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

   si determinino autovalori e autovettori, diagonalizzando (dove è possibile) il singolo operatore.

2. Assegnati gli operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in End\,(\mathbb{R}^3)$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

   si determinino autovalori e autovettori, diagonalizzando (dove è possibile) il singolo operatore.

3. Assegnati gli operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in End\,(\mathbb{R}^3)$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   si determinino autovalori e autovettori, diagonalizzando (dove è possibile) il singolo operatore.

4. Assegnati gli operatori $\hat{A}, \hat{B} \in \mathit{End}(\mathbb{R}^3)$ e $\hat{C} \in \mathit{End}(\mathbb{R}^4)$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

si determinino autovalori e autovettori, valutando la possibilità di diagonalizzazione di singolo operatore.

5. Assegnati gli operatori $\hat{A} \in \mathit{End}(\mathbb{R}^4)$, $\hat{B} \in \mathit{End}(\mathbb{R}^3)$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

si determinino autovalori e autovettori, valutando la possibilità di diagonalizzazione di singolo operatore.

6. Diagonalizzare l'operatore $\hat{A} \in \mathit{End}(\mathbb{R}^4)$ rappresentato nella base canonica dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Diagonalizzare l'operatore $\hat{A} \in \mathit{End}(\mathbb{R}^4)$ rappresentato nella base canonica dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

8. Diagonalizzare l'operatore $\hat{A} \in \mathit{End}(\mathbb{R}^4)$ rappresentato nella base canonica dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Determinare gli autovalori di $\hat{A}^{-1}$ essendo $\hat{A} \in \mathit{End}(E)$, supponendo noti gli autovalori λ di $\hat{A}$ e nell'ipotesi $\lambda \neq 0$.

10. Sia $\hat{A} \in \mathit{End}(E)$ con E spazio vettoriale *n-dimensionale* sul campo K, la cui equazione agli autovalori è:

$$\hat{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Per semplicità consideriamo il caso non degenere: $\nu_i = r_i = 1$. Si consideri il polinomio su K:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{m} (x - x_i),$$

Determinare: a) l'espressione analitica di $f\left(\hat{A}\right)$; b) $\det f(A)$ in funzione degli autovalori di $\hat{A}$; c) autovettori e autovalori di $f\left(\hat{A}\right)$.

11. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathcal{P}_n[x]$ i cui vettori sono i polinomi di grado $\leq n \geq 1$ con coefficienti in $\mathbb{R}$, consideriamo l'operatore di derivazione:

$$D : \mathcal{P}_n[x] \longmapsto \mathcal{P}_n[x]$$
$$p(x) \longmapsto Dp(x) = \frac{d}{dx} p(x), \quad \forall p(x) \in \mathcal{P}_n[x]$$

Determinare autovalori e autovettori di D.

4.6.5.1 Soluzioni

1. Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ è:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1,$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 1, \ \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \ \ i = 1, 2 = q$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2 = \dim \mathbb{C},$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{A}$. Le componenti dell'autovettore appartenente a λ_1 sono le soluzioni (x, y) dell'equazione lineare omogenea:

$$x + y = 0,$$

quindi:

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1)$$

In maniera analoga si determinano le componenti dell'autovettore appartenente all'autovalore λ_2, ottenendo:

$$\mathbf{u}_2 = (1, 1)$$

Nella base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ l'operatore $\hat{A}$ è rappresentato dalla matrice:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{B}$ è:

$$p_B(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 14$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 7$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \ \ i = 1, 2 = q$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2 = \dim \mathbb{C},$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{B}$. Le componenti dell'autovettore appartenente a λ_1 sono le soluzioni (x, y) dell'equazione lineare omogenea:

$$5x + 4y = 0,$$

quindi:

$$\mathbf{u}_1 = (4, -5)$$

In maniera analoga si determinano le componenti dell'autovettore appartenente all'autovalore λ_2, ottenendo:

$$\mathbf{u}_2 = (1, 1)$$

Nella base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ l'operatore $\hat{B}$ è rappresentato dalla matrice:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{C}$ è:

$$p_C(\lambda) = \lambda^2 + a^2,$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -ia, \ \lambda_2 = ia$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 1, \ \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \ \ i = 1, 2 = q$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2 = \dim \mathbb{C},$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{C}$. Le componenti dell'autovettore appartenente a λ_1 sono le soluzioni (x, y) dell'equazione lineare omogenea:

$$ix + y = 0,$$

quindi:

$$\mathbf{u}_1 = (1, -i)$$

In maniera analoga si determinano le componenti dell'autovettore appartenente all'autovalore λ_2, ottenendo:

$$\mathbf{u}_2 = (1, i)$$

Nella base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ l'operatore $\hat{C}$ è rappresentato dalla matrice:

$$C_{diag} = \begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}$$

2. Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ è:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_i = 1, \ \ i = 1, 2, 3$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \ \ i = 1, 2, 3,$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 3,$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{A}$.

Gli autovettori sono:

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)\,,\ \mathbf{u}_2 = (-2, 1, 2)\,, \mathbf{u}_3 = (-1, 1, 2)$$

Essi compongono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto la matrice rappresentativa in tale base è:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{B}$ è:

$$p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_i = 1, \;\; i = 1, 2, 3$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \;\; i = 1, 2, 3,$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 3,$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{B}$ (prop. 127).

Gli autovettori sono:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)\,,\ \mathbf{u}_2 = (3, 2, 1)\,, \mathbf{u}_3 = (1, 3, 1)$$

Essi compongono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto la matrice rappresentativa in tale base è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{C}$ è:

$$p_C(\lambda) = -(\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 2, \ \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_1 \leq 2, \ \ r_2 = 1$$

Determiniamo gli autovettori.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \longrightarrow \mathbf{u}_1 = (2,1,0) \Longrightarrow r_1 = 1 \\ \lambda_2 \longrightarrow \mathbf{u}_2 = (-1,-1,1) \Longrightarrow r_2 = 1 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Dalle (4.51):

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2,$$

donde la non diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{C}$.

3. Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ è:

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$$

la cui radice è:

$$\lambda_1 = 1$$

La molteplicità algebrica:

$$\nu_1 = 3$$

λ_1 ammette un solo autovettore:

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$$

Evidentemente:

$$r_1 = 1,$$

per cui $\hat{A}$ non è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico di $\hat{B}$ è:

$$p_B(\lambda) = -\lambda \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_i = 1, \ \ i = 1, 2, 3$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \ \ i = 1, 2, 3,$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 3,$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{B}$ (prop. 127).
Gli autovettori sono:

$$\mathbf{u}_1 = (-4, 1, 0)\,, \mathbf{u}_2 = (-4, 0, 1)\,, \mathbf{u}_3 = (-2, 1, 0)$$

Essi compongono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto la matrice rappresentativa in tale base è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{C}$ è:

$$p_C(\lambda) = \lambda^2 (1 - \lambda)^2$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 2, \, \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_1 \leq 2, \ \ r_2 = 1$$

Determiniamo gli autovettori.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\longrightarrow \mathbf{u}_1 = (-3, 1, 0) \Longrightarrow r_1 = 1 \\ \lambda_2 &\longrightarrow \mathbf{u}_2 = (-12, 4, 1) \Longrightarrow r_2 = 1 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Dalle (4.51):

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2,$$

donde la non diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{C}$.

4. Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ è:

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-1)^2$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3,$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 2, \ \ \nu_2 = 3$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_1 \leq 2, \, r_2 = 1$$

All'autovalore λ_1 corrispondono gli autovettori:

$$\mathbf{u}_{1,1} = (-1,0,1)\,, \ \mathbf{u}_{1,2} = (-1,1,0)$$

Cioè la molteplicità geometrica di λ_1 è $r_1 \overset{def}{=} \dim E(\lambda_1) = 2$.
All'autovalore λ_2 corrisponde l'autovettore:

$$\mathbf{u}_2 = (1,1,0)$$

Abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2+1 = 3$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{A}$. La matrice rappresentativa in tale base è:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{B}$ è:

$$p_B(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right)$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_i = 1, \ \ i = 1,2,3$$

In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \ \ i = 1,2,3,$$

per cui:
$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 3,$$
donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{B}$ (prop. 127).
Gli autovettori sono:
$$\mathbf{u}_1 = (-1,1,0)\,,\, \mathbf{u}_2 = (0,0,1)\,, \mathbf{u}_3 = (1,1,0)$$
Essi compongono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto la matrice rappresentativa in tale base è:
$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
Il polinomio caratteristico di $\hat{C}$ è:
$$p_C(\lambda) = (\lambda-1)^2 \left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right)$$
le cui radici sono:
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$
La molteplicità algebrica di singola radice è:
$$\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 1\ , \nu_3 = 1$$
In forza del teorema 126 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:
$$r_1 \leq 2,\ \ r_2 = 1,\ r_3 = 1$$
Determiniamo gli autovettori.
$$\lambda_1 \longrightarrow \{\mathbf{u}_{1,1} = (-1,0,1,0)\,,\, \mathbf{u}_{1,2} = (-1,1,0,0)\} \Longrightarrow r_1 = 2 \tag{4.53}$$
$$\lambda_2 \longrightarrow \mathbf{u}_2 = (-2,4,1,2) \Longrightarrow r_2 = 1$$
$$\lambda_3 \longrightarrow \mathbf{u}_3 = (0,3,1,2) \Longrightarrow r_3 = 1 \tag{4.54}$$
Dalle (4.51):
$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 4,$$
donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{C}$.
Il sistema di autovettori:
$$\{\mathbf{u}_{1,1}, \mathbf{u}_{1,2}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}\,,$$
è una base di $\mathbb{R}^4$, e la matrice rappresentativa di $\hat{C}$ in tale base è:
$$C_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3 (\lambda + 2)$$

Quindi gli autovalori:

$$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 2$$

le cui molteplicità algebriche sono:

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = 3$$

Le molteplicità geometriche:

$$r_1 = 1, \ r_2 \leq 3$$

Gli autovettori appartenenti all'autovalore λ_1 hanno per componenti nella base canonica, le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} 3x + y + z + t &= 0 \\ x + 3y - z - t &= 0 \\ x - y + 3z - t &= 0 \\ x - y - z + 3t &= 0, \end{aligned}$$

che ammette ∞^1 autosoluzioni. Quindi a meno di una costante moltiplicativa:

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 1, 1)$$

Per l'autovalore λ_2 occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{aligned} -x + y + z + t &= 0 \\ x - y - z - t &= 0 \\ x - y - z - t &= 0 \\ x - y - z - t &= 0, \end{aligned}$$

equivalente a:

$$x - y - z - t = 0$$

Pertanto esistono ∞^3 autosoluzioni $(\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma)$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in (-\infty, +\infty)$. Quindi il più generale autovettore di $\hat{A}$ appartenente all'autovalore λ_2 è:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma) \\ &= \alpha (1, 1, 0, 0) + \beta (1, 0, 1, 0) + \gamma (1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Posto:

$$\mathbf{u}_{2,1} = (1, 1, 0, 0), \ \ \mathbf{u}_{2,2} = (1, 0, 1, 0), \ \ \mathbf{u}_{2,3} = (1, 0, 0, 1)$$

risulta che i suddetti vettori compongono una base dell'autospazio $E'(\lambda_2)$:

$$\hat{A}\mathbf{u}_{2,i} = \lambda_2 \mathbf{u}_{2,i}, \ \ i = 1, 2, 3 = r_2$$

Pertanto all'autovalore λ_2 corrispondono tre autovettori lineramente indipendenti:

$$\lambda_2 \longrightarrow \{\mathbf{u}_{2,1}, \mathbf{u}_{2,2}, \mathbf{u}_{2,3}\}$$

Infine

$$\sum_{i=1}^{4} r_i = 1 + 3 = 4$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{A}$. La matrice rappresentativa in tale base è:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di B è:

$$p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 4,$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}, \ \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$$

Gli autovettori sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (-2, 1, 0) \\ \mathbf{u}_2 &= \left(\frac{3\left(-1+\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}}, \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, 1 \right) \\ \mathbf{u}_3 &= \left(\frac{3\left(1+\sqrt{3}\right)}{-1+\sqrt{3}}, \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}, 1 \right) \end{aligned}$$

Nella base $\{\mathbf{u}_i\}$ la matrice rappresentativa di $\hat{B}$ è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

6. Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\left|A - \lambda \hat{1}_4\right| \\ &= (\lambda - 1)^3 (\lambda - 2) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori:

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$$

le cui molteplicità algebriche sono:

$$\nu_1 = 3, \nu_2 = 1$$

Le molteplicità geometriche:

$$r_1 \leq 3, \ r_2 = 1$$

Gli autovettori appartenenti all'autovalore λ_1 hanno per componenti nella base canonica, le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

che ammette ∞^1 autosoluzioni. Quindi a meno di una costante moltiplicativa:

$$\mathbf{u}_1 = (-3, -6, 4, 5)$$

Per l'autovalore λ_2 troviamo:

$$\mathbf{u}_2 = (-2, -3, 2, 3)$$

Si conclude che l'operatore lineare $\hat{A}$ possiede solo due autovettori indipendenti, pertanto non è diagonalizzabile.

7. Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \left| A - \lambda \bar{1}_4 \right| \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 1)^3 \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori:

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$$

le cui molteplicità algebriche sono:

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = 3$$

Le molteplicità geometriche:

$$r_1 = 1, \ r_2 \leq 3$$

Gli autovettori appartenenti all'autovalore λ_1 hanno per componenti nella base canonica, le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

che ammette ∞^1 autosoluzioni. Quindi a meno di una costante moltiplicativa:

$$\mathbf{u}_1 = (-3, 0, 1, 4)$$

Per l'autovalore λ_2 troviamo:

$$\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3, 2)$$

Si conclude che l'operatore lineare $\hat{A}$ possiede solo due autovettori indipendenti, pertanto non è diagonalizzabile.

8. Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \left| A - \lambda \bar{1}_4 \right| \\ &= \lambda^2 \left(\lambda^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$$

le cui molteplicità algebriche sono:

$$\nu_1 = 2, \nu_2 = \nu_3 = 1,$$

Le molteplicità geometriche:

$$r_1 \leq 2, \ r_2 = r_3 = 1$$

Gli autovettori appartenenti all'autovalore λ_1 hanno per componenti nella base canonica, le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che ammette ∞^1 autosoluzioni. Quindi a meno di una costante moltiplicativa:

$$\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, 1)$$

Per gli autovalori λ_2, λ_3 troviamo:

$$\mathbf{u}_2 = (3, 0, 1, 2), \ \mathbf{u}_3 = (3, 0, 1, 4)$$

Si conclude che l'operatore lineare $\hat{A}$ possiede solo tre autovettori indipendenti, pertanto non è diagonalizzabile.

9. Scriviamo l'equazione agli autovalori per gli operatori $\hat{A}$, $\hat{A}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{A}\mathbf{u} &= \lambda \mathbf{u} \\ \hat{A}^{-1}\mathbf{w} &= \lambda' \mathbf{w} \end{aligned} \tag{4.55}$$

Dalla seconda delle (4.55):

$$p_{A^{-1}}(\lambda') = \det \left(A^{-1} - \lambda' \bar{I} \right) = 0$$

Da ciò segue:

$$0 = \det\left(AA^{-1} - \lambda' A\right) = \det\left(\bar{I} - \lambda' A\right) = -\lambda' \det\left[A - (\lambda')^{-1}\bar{I}\right]$$

Supponiamo che $\lambda' \neq 0$:

Cioè:

$$\det\left[A - (\lambda')^{-1}\bar{I}\right] = 0 \Longleftrightarrow p_A\left[(\lambda')^{-1}\right] = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{\lambda'}$$

Si conclude che gli autovalori di $\hat{A}^{-1}$ sono[2]:

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

10. L'operatore $f\left(\hat{A}\right)$ si ottiene dall'espressione $f(x)$ eseguendo la sostituzione $x \to \hat{A}$, $x_i \to x_i\hat{1}$, $a_0 \to a_0\hat{1}$:

$$f\left(\hat{A}\right) = a_0\hat{1}\prod_{i=1}^{m,}\left(\hat{A} - x_i\hat{1}\right) \tag{4.56}$$

Dalla (4.56) passiamo alla matrice rappresentativa:

$$f\left(\hat{A}\right) \doteq f(A) = a_0\bar{1}_n\prod_{i=1}^{m,}\left(A - x_i\bar{1}_n\right),$$

e per una nota proprietà dei determinanti:

$$\det\left[f(A)\right] = a_0^m\prod_{i=1}^{m,}\det\left(A - x_i\bar{1}_n\right)$$

Cioè:

$$\det\left[f(A)\right] = a_0^m\prod_{i=1}^{m}p_A(x_i), \tag{4.57}$$

essendo $p_A(\lambda)$ il polinomio caratteristico della matrice A: $p_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda\bar{1}_n\right)$, le cui radici sono gli autovalori λ_i, donde:

$$p_A(x_i) = \prod_{j=1}^{n}\left(x_i - \lambda_j\right) \tag{4.58}$$

Sostituendo la (4.58) nella (4.57):

$$\begin{aligned}\det\left[f(A)\right] &= a_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left(x_i - \lambda_j\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\left[a_0\left(x_i - \lambda_j\right)\right],\end{aligned}$$

[2]Nell'ipotesi $\lambda, \lambda' \in K - \{0\}$.

donde:

$$\det\left[f\left(A\right)\right]=\prod_{j=1}^{n}f\left(\lambda_j\right)$$

Per determinare gli autovettori dell'operatore $f\left(\hat{A}\right)$ si osservi che $f\left(\hat{A}\right)$ si esprime come:

$$f\left(\hat{A}\right)=\sum_{i=1}^{m}c_i\hat{A}^i, \tag{4.59}$$

con $c_i\in K$. Applichiamo l'operatore $\hat{A}$ ad ambo i membri della (4.59):

$$\begin{aligned}f\left(\hat{A}\right)\mathbf{u}_i&=\sum_{j=1}^{m}c_j\hat{A}^j\mathbf{u}_i\\&=\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_i^j\right)\mathbf{u}_i\\&=f\left(\lambda_i\right)\mathbf{u}_i\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che se $A\mathbf{u}_i=\lambda_i\mathbf{u}_i$, allora $A^n\mathbf{u}_i=\lambda_i^n\mathbf{u}_i$. Si conclude che $f\left(\hat{A}\right)$ ammette gli stessi autovettori di $\hat{A}$, con autovalori $f\left(\lambda_i\right)$.

Osservazione. Si può dimostrare che $f\left(\lambda_i\right)$ sono gli autovalori di $f\left(\hat{A}\right)$ nel seguente modo: si consideri la funzione:

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\lambda$$

Posto $\hat{B}=f\left(\hat{A}\right)$, il polinomio caratteristico della matrice B è:

$$p_B\left(\mu\right)=\det\left(B-\mu\bar{1}_n\right)$$

Scriviamo l'equazione agli autovalori per $\hat{B}$:

$$\hat{B}\mathbf{v}_i=\mu_i\mathbf{v}_i$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}p_B\left(\mu\right)=\det g\left(A\right)=\det\left(f\left(A\right)-\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}g\left(\lambda_i\right)\\=\prod_{i=1}^{n}\left[f\left(\lambda_j\right)-\lambda\right]\Longrightarrow\mu_i=f\left(\lambda_i\right)\end{aligned}$$

11. $\mathcal{P}_n\left[x\right]$ è uno spazio vettoriale con $\dim\mathcal{P}_n\left[x\right]=n+1$. La base canonica è:

$$\left\{e_k\left(x\right)=x^k\right\},\quad\text{con}\quad k=0,1,2,...,n$$

Esplicitando il risultato dell'azione di D sui vettori di base si perviene alla matrice rappresentava:

$$D \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} p_D(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \lambda^{n+1} \end{aligned}$$

Le radici di $p_D(\lambda)$ sono:

$$\lambda_1 = 0, \ \ \text{con molteplicità } \nu_1 = n+1 \Longrightarrow r_1 \leq n+1$$

Le componenti $(u_0, u_1, ..., u_n)$ del generico autovettore sono le soluzioni del sistema di $n+1$ equazioni lineari ed omogenee:

$$\begin{aligned} -\lambda u_0 + u_1 + 0 + 0 + ... + 0 &= 0 \\ 0 - \lambda u_1 + 2u_2 + 0 + ... + 0 &= 0 \\ 0 + 0 - \lambda u_2 + 3u_3 + ... + 0 &= 0 \\ ... \\ 0 + 0 + 0 + 0 + ... - \lambda u_n &= 0 \end{aligned}$$

Per $\lambda = \lambda_1$, il sistema amette ∞^1 autosoluzioni $(u_0, 0, 0, ..., 0)$, essendo u_0 un parametro arbitrario. Quindi:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$$

Da ciò segue che $r_1 = \dim E'(\lambda_1) = 1$, cioè l'operatore D non è diagonalizzabile.

4.7 Similitudine

4.7.1 Matrici simili

Sia $\hat{A}$ un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale finito-dimensionale ($\dim E = n$) sul campo K. Supponiamo che in una base assegnata $\{\mathbf{e}_i\}$, $\hat{A}$ sia rappresentato dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

Per ipotesi $\hat{A}$ è diagonalizzabile, per cui se $\{\mathbf{u}_i\}$ è il suo sistema di autovettori e λ_i i relativi autovalori[3], nella base $\{\mathbf{u}_i\}$ l'operatore è rappresentato dalla matrice diagonale:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

Proposizione 129 *Le matrici (4.60)-(4.61) sono legate dalla relazione:*

$$A_{diag} = R^{-1}AR, \tag{4.62}$$

essendo R la matrice del cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{u}_i\}$ (§ 2.5).

Dimostrazione. Omessa ■

***

Definizione 130 *Le matrici A e B sono simili se esiste una matrice C non singolare tale che:*

$$B = C^{-1}AC \tag{4.63}$$

Quindi nel caso di un operatore A e A_{diag} sono simili. Più in generale, sia $\hat{A} \in End\,(E)$, rappresentato nella base $\{\mathbf{e}_i\}$ dalla matrice $A = (a_{ij})$. Assegnata una seconda base $\{\mathbf{e}'_i\}$ dello spazio vettoriale E, abbiamo

$$\hat{A} \doteq \tilde{A} \;\; \text{nella base } \{\mathbf{e}'_i\}$$

Risulta:

$$\tilde{A} = R^{-1}AR,$$

essendo R la matrice del cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}'_i\}$.
Si noti che la relazione di similutidine è una relazione di equivalenza nell'insieme delle matrici simili. Infatti, consideriamo il generico operatore $\hat{A} \in End\,(E)$, rappresentato nella base $\{\mathbf{e}_i\}$ dalla matrice $A = (a_{ij})$. Tale matrice appartiene a $\mathbb{M}_k\,(n \times n)$. Consideriamo l'insieme delle matrici simili di ordine n:

$$\tilde{\mathbb{M}}_k\,(n \times n) \subset \mathbb{M}_k\,(n \times n) \mid \forall A, B \in \tilde{\mathbb{M}}_k\,(n \times n)\,,\; A \text{ e } B \text{ sono simili}$$

Indichiamo con ρ la relazione di similitudine:

$$A\rho B \Longleftrightarrow A \text{ e } B \text{ sono simili}$$

Tale relazione verifica le proprietà:

1. $\forall A \in \tilde{\mathbb{M}}_k\,(n \times n),\; A\rho A$ (proprietà riflessiva)

2. $\forall A, B \in \tilde{\mathbb{M}}_k\,(n \times n),\; A\rho B \Longrightarrow B\rho A$ (proprietà simmetrica)

[3]Per semplicità stiamo considerando il caso $r_i = \nu_i = 1$, $i = 1, ..., n$.

3. $\forall A, B, C \in \tilde{\mathbb{M}}_k(n \times n)$, $(A\rho B, B\rho C) \Longrightarrow A\rho C$ (proprietà transitiva)

Quindi ρ è una relazione di equivalenza in $\tilde{\mathbb{M}}_k(n \times n)$. Una classe di equivalenza è

$$[A] = \left\{ B \in \tilde{\mathbb{M}}_k(n \times n) \mid B\rho A \right\}$$

È evidente che la classe di equivalenza $[A]$ rappresenta lo stesso operatore appartenente a $End(E)$.

Proposizione 131

$$A\rho B \Longrightarrow p_A(\lambda) \equiv p_B(\lambda) \tag{4.64}$$

Dimostrazione. Il polinomio caratteristico di B è:

$$p_B(\lambda) = \det\left(B - \lambda \overline{I}\right) = \det\left(C^{-1}AC - \lambda \overline{I}\right), \tag{4.65}$$

giacchè la matrice B è legata alla matrice A dalla (4.63). D'altro canto:

$$\lambda \overline{I} \underset{C^{-1}C=\overline{I}}{=} \lambda \overline{I} C^{-1} C \underset{\overline{I}C^{-1}=C^{-1}\overline{I}}{=} \lambda C^{-1} \overline{I} C = C^{-1}\left(\lambda \overline{I}\right) C,$$

che sostituita nella (4.65) porge:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det\left[C^{-1}AC - C^{-1}\left(\lambda \overline{I}\right) C\right] \\ &= \det\left[C^{-1}\left(A - \lambda \overline{I}\right) C\right] \\ &= \left(\det C^{-1}\right) \det\left(A - \lambda \overline{I}\right) (\det C) \\ &= \det\left(A - \lambda \overline{I}\right) \\ &= p_A(\lambda), \end{aligned}$$

cioè A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico, da cui l'asserto. ■

Osservazione 132 *L'implicazione 4.64 non è invertibile, nel senso che esistono matrici con lo stesso polinomio caratteristico, che non sono simili. Ciò si giustifica osservando che matrici simili rappresentando il medesimo operatore devono avere gli stessi autovettori. E quest'ultima è una condizione più forte dell'identità dei polinomi caratteristici. Si conclude che l'identità dei polinomi caratteristici di A e B, è condizione necessaria ma non sufficiente affinché A e B siano simili.*

Capitolo 5

Spazio duale

5.1 Funzionali lineari

Nel capitolo 4.4 abbiamo definito l'insieme $Hom\,(E, F)$ (eq. 4.13) che assume la struttura di spazio vettoriale su K.
Siccome K è uno spazio vettoriale su stesso, possiamo considerare l'insieme degli omomorfismi $\omega : E \longmapsto K$:

$$Hom\,(E, K) = \{\omega \mid \ \omega \text{ è un omomorfismo tra } E \text{ e } K\}$$

Definizione 133 *Un omomorfismo* $\omega \in Hom\,(E, K)$ *si dice* **funzionale lineare.**

In altri termini, se E è uno spazio vettoriale sul campo K, un funzionale lineare è l'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} \omega &: E \longmapsto K \\ \mathbf{x} &\longmapsto k, \qquad \forall \mathbf{x} \in E \end{aligned}$$

Poniamo per definizione:

$$\omega\,(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \langle \mathbf{x}, \omega \rangle\,, \ \ \mathbf{x} \in E$$

Per determinare la matrice rappresentativa di ω, scriviamo il risultato dell'applicazione di ω sui vettori di base $\mathbf{e}_i$ (eq. 4.20):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1, \omega \rangle &= a_{11} \\ \langle \mathbf{e}_2, \omega \rangle &= a_{21} \\ &\ldots \\ \langle \mathbf{e}_n, \omega \rangle &= a_{n1} \end{aligned}$$

Quindi

$$\omega \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \end{pmatrix}$$

Ridefinendo i coefficienti:

$$\omega \doteq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

D'altro canto:

$$\forall \mathbf{x} \in E, \, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i,$$

donde:

$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \omega \right\rangle$$

Tenendo conto della linearità di ω:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \omega \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \mathbf{e}_i, \omega \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{aligned}$$

Se rappresentiamo il vettore $\mathbf{x}$ attraverso il vettore colonna:

$$\mathbf{x} \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \omega \rangle &\doteq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \Longleftrightarrow \langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{aligned}$$

Poniamo per definizione:

$$E^* \overset{def}{=} Hom\,(E, K)$$

Introduciamo in E^* l'operazione di somma tra funzionali lineari:

$$\begin{aligned} + : E^* \times E^* &\longmapsto E^* \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto (\omega_1 + \omega_2)\,, \quad \forall\,(\omega_1, \omega_2) \in E^* \times E^* \end{aligned} \tag{5.1}$$

La (5.1) è così definita:

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 : E &\longmapsto K \\ \mathbf{x} \in E &\longmapsto \langle \mathbf{x}, \omega_1 + \omega_2 \rangle \overset{def}{=} (\langle \mathbf{x}, \omega_1 \rangle + \langle \mathbf{x}, \omega_2 \rangle) \in K \end{aligned} \tag{5.2}$$

Introduciamo ora l'operazione di prodotto di uno scalare per un elemento di $Hom\,(E, K)$:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times E^* &\longmapsto E^* \\ (\lambda, \omega) &\longmapsto \lambda\omega, \ \ \forall\, (\lambda, \omega) \in K \times E^* \end{aligned} \tag{5.3}$$

La (5.3) è così definita:

$$\begin{aligned} \lambda\omega : E &\longmapsto K \\ \mathbf{x} &\longmapsto \langle \mathbf{x}, \lambda\omega \rangle \overset{def}{=} \lambda \langle \mathbf{x}, \omega \rangle \in K \end{aligned} \tag{5.4}$$

Con l'introduzione delle operazioni (5.1)-(5.3), l'insieme E^* assume la struttura di spazio vettoriale su K, giacché $Hom\,(E, K)$ è un caso particolare di $Hom\,(E, F)$ che per quanto visto in § 4.4 è uno spazio vettoriale. Chiamiamo E^* **spazio duale** dello spazio vettoriale E.

Osservazione 134 *L'elemento neutro in E^* è il funzionale lineare:*

$$\hat{0} : \mathbf{x} \in E \longmapsto 0 \in K$$

Cioè:

$$\left\langle \mathbf{x}, \hat{0} \right\rangle = 0, \ \ \forall \mathbf{x} \in E$$

L'elemento opposto ad un elemento $\omega \in E^*$ è il funzionale lineare $-\omega$ tale che:

$$\langle \mathbf{x}, -\omega \rangle = -\langle \mathbf{x}, \omega \rangle\,, \ \ \forall \mathbf{x} \in E$$

***

Lemma 135 *Sia E uno spazio vettoriale su K e $\{\mathbf{e}_i\}$ una sua base ($i = 1, 2, ..., n = \dim E$).*

$$\forall b_1, b_2, ..., b_n \in K, \ \ \exists!\ \omega \in E^* \mid \langle \mathbf{e}_i, \omega \rangle = b_i \ \ \ (i = 1, 2, ..., n)$$

Dimostrazione. Esistenza di ω
Preso ad arbitrio un vettore $\mathbf{x} \in E$, siano x_i le sue componenti nella base $\{\mathbf{e}_i\}$.
Consideriamo il funzionale lineare:

$$\begin{aligned} \omega : E &\longmapsto K \\ \mathbf{x} &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \end{aligned} \tag{5.5}$$

Cioè
$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$
Senza perdita di generalità, assumiamo che la base $\{\mathbf{e}_i\}$ sia la base canonica[1]:
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, ..., 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, ..., 0) \\ &... \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$
Applichiamo ω ai vettori di base:
$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_j \Longrightarrow \langle \mathbf{e}_j, \omega \rangle = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} b_i = b_j,$$
da cui l'esistenza di $\omega \in E^* \mid \langle \mathbf{e}_j, \omega \rangle = b_j$ per $j = 1, 2, ..., n$.
Unicità di ω
Neghiamo la tesi:
$$\exists \omega, \omega' \in E^* \mid \langle \mathbf{e}_i, \omega \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \omega' \rangle = b_i \Longrightarrow \langle \mathbf{e}_i, \omega - \omega' \rangle = 0$$
Poniamo:
$$\tilde{\omega} \overset{def}{=} \omega - \omega',$$
donde:
$$\langle \mathbf{e}_i, \tilde{\omega} \rangle = 0$$
Quindi:
$$\left(\forall \mathbf{x} \in E,\ \langle \mathbf{x}, \tilde{\omega} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \tilde{\omega} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \mathbf{e}_i, \tilde{\omega} \rangle = 0 \right) \Longrightarrow \tilde{\omega} = \hat{0} \Longrightarrow \omega = \omega'$$
■

Nota 136 *Da qui in avanti utilizziamo la convenzione (di Einstein) di somma sugli indici ripetuti due volte. Ad esempio, la sommatoria:*
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$
andrebbe scritta omettendo il simbolo di sommatoria:
$$a_i b_i$$
Per una ragione che apparirà chiara in seguito, uno dei due indici è scritto in alto, per cui ogni espressione del tipo:
$$a_i b^i$$
significa:
$$\sum_i a_i b^i$$

[1] Nel caso contrario è comunque possibile eseguire un cambiamento di base.

Prendiamo la *n-pla*:

$$(b_1, b_2, ..., b_n) = (1, 0, ..., 0)$$

Per il lemma precedente esiste ed è unico il funzionale lineare $\theta^1 \in E^*$ tale che:

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \theta^1 \right\rangle = b_i = \delta_i^1$$

Si ricordi che δ_i^j è la delta di Kronecher:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Similmente possiamo costruire un funzionale θ^2:

$$(b_1, b_2, ..., b_n) = (0, 1, ..., 0) \Longrightarrow \exists! \theta^2 \in E^* : \left\langle \mathbf{e}_i, \theta^2 \right\rangle = \delta_i^2$$

Da ciò segue che in corrispondenza delle *n-ple*:

$$(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)$$

esiste ed è unica la *n-pla* di funzionali lineari $(\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n)$ tali che:

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle = \delta_i^j$$

Ciò premesso, dimostriamo il:

Teorema 137 *Il sistema* $\{\theta^j\}$ *è una base dello spazio duale* E^**.*

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che $\{\theta^j\}$ è un sistema massimo linearmente indipendente. Abbiamo:

$$\lambda_j \theta^j = \hat{0}$$

Quindi:

$$\left\langle \mathbf{x}, \lambda_j \theta^j \right\rangle = 0, \ \ \forall \mathbf{x} \in E$$

Se $\mathbf{x}$ è un vettore di base:

$$0 = \left\langle \mathbf{e}_i, \lambda_j \theta^j \right\rangle = \lambda_j \left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle = \lambda_j \delta_i^j = \lambda_i \tag{5.6}$$

La (5.6) implica che il sistema $\{\theta^j\}$ è linearmente indipendente. Dimostriamo che tale sistema è di ordine massimo. A tale scopo prendiamo ad arbitrio $\omega \in E^*$, quindi occorre far vedere che $\{\omega, \theta^i\}$ è linearmente dipendente o, ciò che è lo stesso:

$$\exists \omega_i \in K \mid \omega = \omega_i \theta^i$$

Osserviamo che:

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \omega \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}_i, \omega_j \theta^j \right\rangle = \omega_j \left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle = \omega_j \delta_i^j = \omega_i \tag{5.7}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \omega \in E^* \Longrightarrow \exists \omega_i \in K \mid \omega = \omega_i \theta^i) &\Longrightarrow \left(\left\{ \omega, \theta^i \right\} \text{ è linearmente dipendente} \right) \\ &\Longrightarrow \left(\left\{ \theta^i \right\} \text{ è un sistema di ordine massimo} \right) \\ &\Longrightarrow \left(\left\{ \theta^i \right\} \text{ è una base di } E^* \right) \end{aligned}$$

■

Il teorema appena dimostrato garantisce l'esistenza di una base $\{\theta^j\}$ dello spazio duale E^*, denominata **base duale** associata alla base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E. Le grandezze ω_i sono le componenti di $\omega \in E^*$ nella base $\{\theta^j\}$.

Dal teorema appena dimostrato si deduce che $\dim E^* = \dim E$.

5.2 Cambiamento di base nello spazio duale.

Riprendiamo le equazioni relative al cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}'_i\}$ (§ 2.5):

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\mathbf{e}_k \tag{5.8}$$
$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\mathbf{e}'_k,$$

che individuano la matrice $R = (\alpha_{ik})$ e la sua inversa $R^{-1} = (\beta_{ik})$. Se $\mathbf{x}$ è un arbitrario vettore di E:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i \quad \text{nella base } \{\mathbf{e}_i\}$$
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i\mathbf{e}'_i \quad \text{nella base } \{\mathbf{e}'_i\}$$

Le componenti x_i si trasformano secondo la legge:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}x_j \tag{5.9}$$

Utilizzando la convenzione di Einstein possiamo ridefinire gli indici degli elementi di matrice che compaiono nelle equazioni appena scritte:

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_i^k\mathbf{e}_k \tag{5.10}$$
$$\mathbf{e}_i = \beta_i^k\mathbf{e}'_k,$$

Con tale notazione, la (5.9) si riscrive:

$$x'^i = \beta_j^i x^j \tag{5.11}$$

La (5.11) esprime la legge di trasformazione dei cosiddetti **vettori controvarianti** che per definizione hanno le componenti con gli indici scritti in alto. Inoltre la legge di trasformazione è individuata dalla trasposta dell'inversa della matrice R. Infatti la (5.11) in forma matriciale è:

$$x'^i = \beta^i_j x^j \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \dots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^1_1 & \beta^1_2 & \dots & \beta^1_n \\ \beta^2_1 & \beta^2_2 & \dots & \beta^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta^n_1 & \beta^n_2 & \dots & \beta^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix},$$

equivalente a:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \dots \\ x'^n \end{pmatrix} = \left(R^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Al cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \rightarrow \{\mathbf{e}'_i\}$ nello spazio vettoriale E, corrisponde nello spazio duale E^* il cambiamento di base $\{\theta^j\} \rightarrow \{\theta'^j\}$. Si ricordi che:

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle = \delta^j_i$$
$$\left\langle \mathbf{e}'_i, \theta'^j \right\rangle = \delta^j_i$$

Determiniamo le equazioni di trasformazione che connettono le basi $\{\theta^j\}$, $\{\theta'^j\}$. A tale scopo esprimiamo θ'^j come combinazione lineare delle θ^i:

$$\theta'^j = \gamma^j_i \theta^i \tag{5.12}$$

Per la (5.7):

$$\gamma^j_i = \left\langle \mathbf{e}_i, \theta'^j \right\rangle,$$

donde:

$$\theta'^j = \left\langle \mathbf{e}_i, \theta'^j \right\rangle \theta^i$$

Per la seconda delle (5.10):

$$\theta'^j = \left\langle \beta^k_i \mathbf{e}'_k, \theta'^j \right\rangle \theta^i = \beta^k_i \left\langle \mathbf{e}'_k, \theta'^j \right\rangle \theta^i = \beta^k_i \delta^j_k \theta^i = \beta^j_i \theta^i$$

In maniera simile si ottengono le $\theta^j = f^j\left(\theta'^i\right)$. Quindi:

$$\begin{aligned} \theta'^j &= \beta^j_i \theta^i \\ \theta^j &= \alpha^j_i \theta'^i \end{aligned} \tag{5.13}$$

Determiniamo la legge di trasformazione delle forme lineari in corrispondenza di un cambiamento di base $\{\theta^i\} \rightarrow \{\theta'^i\}$. Abbiamo:

$$\omega = \omega_i \theta^i \quad \text{nella base } \left\{\theta^i\right\}$$
$$\omega = \omega'_i \theta'^i \quad \text{nella base } \left\{\theta'^i\right\}$$

Evidentemente:

$$\omega_i\theta^i = \omega'_i\theta'^i = \omega'_i\beta^i_k\theta^k$$

Scrivendo θ^i come $\theta^i = \theta^k\delta^i_k$ e sostituendo nell'equazione precedente:

$$\omega_i\theta^k\delta^i_k - \omega'_i\beta^i_k\theta^k = 0 \Longleftrightarrow \left(\omega_i\delta^i_k - \omega'_i\beta^i_k\right)\theta^k = 0$$

Il sistema di vettori $\{\theta^i\}$ è linearmente indipendente, per cui:

$$\left(\omega_k - \omega'_i\beta^i_k\right)\theta^k = 0 \Longrightarrow \omega_k - \omega'_i\beta^i_k = 0, \quad \text{per } k = 1, 2, ..., n$$

Cioè:

$$\omega_k = \beta^i_k\omega'_i \tag{5.14}$$

Allo stesso modo si giunge a:

$$\omega'_k = \alpha^i_k\omega_i \tag{5.15}$$

Le (5.14) o ciò che è lo stesso le (5.14) compongono le equazioni di trasformazione che connetteno le due basi $\{\theta^i\}$, $\{\theta'^i\}$ dello spazio duale E^*.
Per chiarezza riscriviamo tutte le equazioni ottenute:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i &= \alpha^k_i\mathbf{e}_k, \quad \theta'^j = \beta^j_i\theta^i \\ \mathbf{e}_i &= \beta^k_i\mathbf{e}'_k, \quad \theta^j = \alpha^j_i\theta'^i \end{aligned} \tag{5.16}$$

Per quanto riguarda i vettori dello spazio E e del suo spazio duale E^*:

$$\begin{aligned} x'^i &= \beta^i_j x^j, \;\; \omega_i = \beta^k_i\omega'_k \\ x^i &= \alpha^i_j x'^j, \;\; \omega'_i = \alpha^k_i\omega_k \end{aligned} \tag{5.17}$$

Si noti che le equazioni relative al cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \rightarrow \{\mathbf{e}'_i\}$ esibiscono una forma per così dire, speculare rispetto alle equazioni che connettono le basi $\{\theta^i\}$, $\{\theta'^i\}$. Più precisamente, i vettori di E^* hanno componenti scritte in basso, e ciò si esprime dicendo che sono **vettori covarianti**.

Esempio 1

Assumiamo $E = \mathbb{R}^2$, per cui $E^* = \mathbb{R}^{2*}$. Consideriamo il funzionale lineare:

$$\langle\mathbf{x}, \omega\rangle = 7x^1 + 4x^2, \quad \forall\mathbf{x} = \left(x^1, x^2\right) \in \mathbb{R}^2$$

Per esplicitare la matrice rappresentativa di ω nella base canonica $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$, determiniamo il risultato dell'applicazione di ω sui vettori di base:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{e}_1, \omega\rangle &= 7 \\ \langle\mathbf{e}_2, \omega\rangle &= 4, \end{aligned}$$

donde:

$$\omega \doteq \begin{pmatrix} 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Ciò significa:

$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle \doteq \begin{pmatrix} 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x^1 + 4x^2 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

La base duale è $\{\theta^j\}$ tale che:

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle = \delta_i^j$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{e}_1, \theta^1 \right\rangle &= 1 \\ \left\langle \mathbf{e}_2, \theta^1 \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

cioè:

$$\theta^1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathbf{x}, \theta^1 \right\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \end{pmatrix} \\ &\left\langle \mathbf{x}, \theta^1 \right\rangle = x^1 \end{aligned}$$

Procedendo in maniera analoga per θ^2:

$$\begin{aligned} \theta^2 &\doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \left\langle \mathbf{x}, \theta^2 \right\rangle &\doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \end{pmatrix} \\ \left\langle \mathbf{x}, \theta^2 \right\rangle &= x^2 \end{aligned}$$

La (5.18) può essere scritta come:

$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = 7 \left\langle \mathbf{x}, \theta^1 \right\rangle + 4 \left\langle \mathbf{x}, \theta^2 \right\rangle$$

L'espansione di ω nei vettori della base duale è:

$$\omega = \omega_i \theta^i = \omega_1 \theta^1 + \omega_2 \theta^2,$$

essendo ω_i le componenti di ω nella base duale. Evidentemente:

$$\omega_1 = 7, \;\; \omega_2 = 4$$

Ora eseguiamo in E il cambiamento di base:

$$\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}'_i\},$$

essendo:

$$\mathbf{e}'_1 = (2,3)$$
$$\mathbf{e}'_2 = (1,2)$$

Deve essere:

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_i^k \mathbf{e}_k \tag{5.19}$$

Quindi la matrice che connette le due basi:

$$R = \left(\alpha_i^k\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La relazione inversa della (5.19) è:

$$\mathbf{e}_i = \beta_i^k \mathbf{e}'_k$$

Come è noto:

$$R^{-1} = \left(\beta_i^k\right) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una volta determinate le matrici che connettono le due basi, possiamo scrivere la legge di trasformazione dei vettori controvarianti quando si passa da una base all'altra. Precisamente:

$$x'^i = \beta_k^i x^k,$$

che in forma matriciale si scrive:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x^1 - x^2 \\ -3x^1 + 2x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} x'^1 &= 2x^1 - x^2 \\ x'^2 &= -3x^1 + 2x^2 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Passiamo ora alla base duale e alla legge di trasformazione dei vettori covarianti quando si passa da una base duale all'altra. I vettori della base duale si trasformano secondo la legge:

$$\theta'^j = \beta_i^j \theta^i$$

Qui non occorre esplicitare, poiché è la legge di trasformazione dei vettori controvarianti fissata dalla (5.20), quindi

$$\begin{aligned} \theta'^1 &= 2\theta^1 - \theta^2 \\ \theta'^2 &= -3\theta^1 + 2\theta^2 \end{aligned}$$

Nella base duale $\{\theta'^j\}$:

$$\omega = \omega'_i \theta'^i \tag{5.21}$$

I vettori covarianti seguono la legge di trasformazione:

$$\begin{aligned} \omega'_i = \alpha_i^k \omega_k \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= 26 \\ \omega'_2 &= 15 \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = 26x'^1 + 15x'^2, \quad \forall \mathbf{x} = x'^i \mathbf{e}'_i$$

Osservazione 138 *Non c'era bisogno di esplicitare la (5.21) poiché tale legge è quella secondo cui si trasformano i vettori di base:* $\mathbf{e}'_i = \alpha_i^k \mathbf{e}_k$, *per cui:*

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= 2\omega_1 + 3\omega_2 \\ \omega'_2 &= \omega_1 + 2\omega_2 \end{aligned}$$

Esempio 2
Supponendo di passare in $\mathbb{R}^3$ dalla base canonica $\{\mathbf{e}_i\}$ alla base $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= (1, -1, 0) \\ \mathbf{e}'_2 &= (2, -3, 0) \\ \mathbf{e}'_3 &= (-3, 1, -1), \end{aligned}$$

determinare la legge di trasformazione della corrispondente base duale.
Scriviamo le matrici che connettono le due basi:

$$\begin{aligned} R = \left(\alpha_i^k\right) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ R^{-1} = \left(\beta_i^k\right) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi la legge di trasformazione dei vettori controvarianti è:

$$x'^i = \beta^i_k x^k \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3x^1 + 2x^2 - 7x^3 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 \\ -x^3 \end{pmatrix}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} x'^1 &= 3x^1 + 2x^2 - 7x^3 \\ x'^2 &= -x^1 + x^2 + 2x^3 \\ x'^3 &= -x^3 \end{aligned}$$

Nel caso particolare dei vettori che compongono la base duale:

$$\begin{aligned} \theta'^1 &= 3\theta^1 + 2\theta^2 - 7\theta^3 \\ \theta'^2 &= -\theta^1 + \theta^2 + 2\theta^3 \\ \theta'^3 &= \theta^3 \end{aligned}$$

Esempio 3
Sia $Q_n[x]$ l'insieme dei polinomi omogenei di grado $\leq n$ e a coefficienti reali.

$$p_m(x) \in Q_n[x] \Longrightarrow p_m(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k, \text{ con } a_k \in \mathbb{R},\ m \leq n$$

È facile convincersi che $Q_n[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con $\dim Q_n[x] = n$. Una base è:

$$\{e_k(x)\}, \text{ con } e_k(x) = x^k \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Lo spazio duale è $Q^*_n[x] = Hom(Q_n[x], \mathbb{R})$. Consideriamo i funzionali lineari:

$$\begin{aligned} \theta^h : Q_n[x] &\longmapsto \mathbb{R} \\ p_n(x) &\longmapsto \frac{1}{h!}\left(\frac{d^h p_n}{dx^h}\right)_{x=0}, \quad h = 1, 2..., n \end{aligned}$$

Dimostriamo che $\{\theta^h\}$ è una base duale. A tale scopo, esplicitiamo la derivata di ordine h di $p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_n}{dx} &= \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \\
\frac{d^2 p_n}{dx^2} &= \sum_{k=2}^{n} k\left(k-1\right) a_k x^{k-2} \\
\frac{d^3 p_n}{dx^3} &= \sum_{k=3}^{n} k\left(k-1\right)\left(k-2\right) a_k x^{k-3} \\
&\dots \\
\frac{d^n p}{dx^n} &= n! a_n
\end{aligned}
$$

Cioè:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^h p}{dx^h} &= \sum_{k=h}^{n} k\left(k-1\right)\left(k-2\right)\cdot\ldots\cdot\left[k-\left(n-1\right)\right] a_k x^{k-h} \\
&= h! a_h + \sum_{k=h+1}^{n} k\left(k-1\right)\left(k-2\right)\cdot\ldots\cdot\left[k-\left(n-1\right)\right] a_k x^{k-h}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\left(\frac{d^h p}{dx^h}\right)_{x=0} = h! a_h \Longrightarrow \left\langle p_n\left(x\right), \theta^h\right\rangle = a_h \tag{5.22}
$$

Determiniamo il risultato dell'applicazione di θ^h sui vettori di base:

$$
\left\langle e_k\left(x\right), \theta^h\right\rangle = \frac{1}{h!}\left(\frac{d^h e_k}{dx^h}\right)_{x=0} \tag{5.23}
$$

Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^h e_k}{dx^h} &= 0, \text{ se } h > k \\
\frac{d^h e_k}{dx^h} &= k\left(k-1\right)\left(k-2\right)\ldots\left[k-\left(h-1\right)\right] x^{k-h}, \text{ se } h < k \\
\frac{d^h e_k}{dx^h} &= h!, \text{ se } h = k,
\end{aligned}
$$

donde:

$$
\left(\frac{d^h e_k}{dx^h}\right)_{x=0} = h! \delta_k^h
$$

Sostituendo nella (5.23):

$$
\left\langle e_k\left(x\right), \theta^h\right\rangle = \delta_k^h,
$$

da cui l'asserto.

Capitolo 6

Spazi vettoriali euclidei

6.1 Introduzione

Gli spazi vettoriali euclidei nascono dall'esigenza di introdurre in uno spazio vettoriale nozioni primitive del tipo distanza tra punti, angolo tra direzioni.

6.2 Prodotto scalare

Assegnato un qualunque spazio vettoriale E sul campo reale $\mathbb{R}$, si definisce **prodotto scalare** l'applicazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\cdot : E \times E &\longmapsto \mathbb{R} \\
(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \qquad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E
\end{aligned}
$$

che verifica le proprietà seguenti:

1. Commutatività:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$$

2. Associatività rispetto alla moltiplicazione di uno scalare per un vettore:
$$\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{v} = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$$

3. Proprietà distributiva rispetto alla somma tra vettori:
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$$

4. $\forall \mathbf{u} \in E, \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

In $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare è così definito:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \tag{6.1}$$

essendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si consideri lo spazio vettoriale $C(a,b)$ (§ 2), i cui elementi sono le funzioni reali e continue in $[a,b]$. Il prodotto scalare tra i "vettori" di $C(a,b)$ è definito da:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{6.2}$$

Infatti:

1.
$$(g,f) = \int_a^b g(x)\,f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = (f,g)$$

2.
$$((\lambda f), g) = \int_a^b \lambda f(x)\,g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \lambda (f,g)$$

3.
$$\begin{aligned}(f,(g+h)) &= \int_a^b f(x)\,[g(x)+h(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,h(x)\,dx \\ &= (f,g)+(f,h)\end{aligned}$$

4.
$$\forall f \in C(a,b), (f,g) = 0 \Longrightarrow g(x) \equiv 0$$

Esempi numerici
Consideriamo lo spazio vettoriale $C(0,\pi)$.

$$f(x) = x; \;\; g(x) = \sin x$$

Il prodotto scalare è:

$$(f,g) = \int_0^\pi x \sin x dx$$

Integriamo per parti:

$$(f,g) = \int_0^\pi x \sin x dx = \int_0^\pi x d(-\cos x) = -x \cos x|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \cos x dx = \pi$$

***

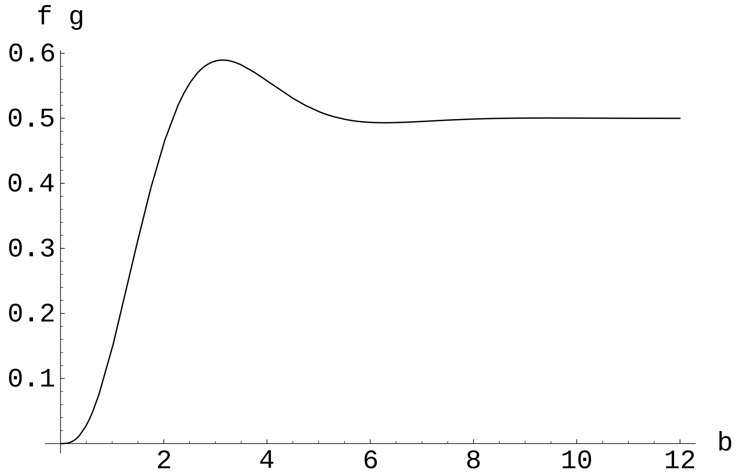

Figura 6.1: Grafico di $(f,g)(b)$.

Consideriamo lo spazio vettoriale $C(0,b)$ essendo b numero reale positivo preso ad arbitrio. Siano:

$$f(x) = xe^{-x}; \;\; g(x) = \sin x \tag{6.3}$$

Il prodotto scalare è una funzione di b:

$$\begin{aligned}(f,g)(b) &= \int_0^b xe^{-x} \sin x dx \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - e^{-b}\left((1+b)\cos b + b \sin b\right)\right]\end{aligned}$$

Il prodotto scalare di f e g date dalla (6.3) ha l'andamento riportato in figura 6.1.

Osservazione 139 *In $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare tra due vettori è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omonime dei vettori medesimi [eq. (6.1)]. In $C(a,b)$ il prodotto scalare tra i "vettori" $f,g \in C(a,b)$ è dato dalla (6.2), che è la generalizzazione al continuo della (6.1). Infatti si passa dalla (6.1) alla (6.2) attraverso la sostituzione $\sum \to \int$. Quindi gli elementi di $C(a,b)$ sono vettori con un numero infinito non numerabile di componenti (in quanto funzioni della variabile continua x).*

6.3 Tensore metrico

Sia E uno spazio euclideo. Presi ad arbitrio $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, consideriamone le componenti nella base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i, \;\; \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \;\; (i = 1, 2, ..., n = \dim E)$$

Per la proprietà associativa rispetto alla moltiplicazione di uno scalare per un vettore:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\left(u^i\mathbf{e}_i\right)\cdot\left(v^k\mathbf{e}_k\right)=u^iv^k\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k \tag{6.4}$$

Poniamo:

$$g_{ik}\overset{def}{=}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k \tag{6.5}$$

g_{ik} è un "oggetto" a $2n$ componenti, denominato **tensore metrico**. La ragione di tale definizione apparirà chiara in un prossimo capitolo. Il numero delle componenti distinte è $n\left(n+1\right)/2$ in forza della simmetria di g_{ik} rispetto alla permutazione degli indici:

$$g_{ki}=\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_i\underset{\text{commutatività del p.s.}}{=}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k=g_{ik}$$

Il prodotto scalare (6.4) si scrive:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=g_{ik}u^iv^k \tag{6.6}$$

Per la proprietà 4 del prodotto scalare:

$$\forall\mathbf{u}\in E,\ \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0\Longrightarrow\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

In termini del tensore metrico:

$$\forall\mathbf{u}\in E,\ g_{ik}u^iv^k=0\Longrightarrow v^k=0$$

Cioè:

$$\left(g_{ik}v^k=0,\quad i=1,2,...,n\right)\Longrightarrow v^k=0,\ \ k=1,2,...,n \tag{6.7}$$

La (6.7) è il sistema omogeneo:

$$\begin{aligned} g_{11}v^1+g_{12}v^2+...+g_{1n}v^n&=0\\ g_{21}v^1+g_{22}v^2+...+g_{2n}v^n&=0\\ &..\\ g_{n1}v^1+g_{n2}v^2+...+g_{nn}v^n&=0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

La nostra richiesta si traduce nell'esistenza della sola soluzione banale (o impropria):

$$\left(v^1,v^2,...,v^n\right)=(0,0,...,0)$$

Come è noto, condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (6.8) ammetta la sola soluzione impropria è che sia diverso da zero il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots\\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{6.9}$$

Poniamo per definizione:

$$g \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = \det(g_{ik})$$

Quindi la (6.9) si riscrive:

$$g \neq 0 \tag{6.10}$$

***

L'introduzione del prodotto scalare in uno spazio vettoriale E ci consente di introdurre le nozioni di ortogonalità, unitarietà e norma di un vettore.

Definizione 140 *Due vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *si dicono* **ortogonali** *se* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Osservazione 141 *Il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore di* E*. Infatti,* $\forall \mathbf{v} \in E, \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Definizione 142 *Dicesi* **quadrato** *del vettore* $\mathbf{v}$*, la grandezza:*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = g_{ik} v^i v^k \tag{6.11}$$

Si noti che la (6.11) è una forma quadratica nelle v^i i cui coefficienti sono le componenti del tensore metrico g_{ik}.

Definizione 143 *Un vettore* $\mathbf{u}$ *dicesi* **vettore unitario** *o* **versore** *se* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$.

6.4 Spazi vettoriali propriamente euclidei e pseudoeuclidei

Sia E uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

Definizione 144 *Lo spazio vettoriale* E *è* **propriamente euclideo (o euclideo)** *se per ogni* $\mathbf{v} \in E$ *la forma quadratica* $g_{ik} v^i v^k$ *è definita positiva qualunque sia la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*. Nel caso contrario, lo spazio vettoriale* E *dicesi* **pseudoeuclideo***.*

La suddetta definizione può essere formulata in termini di prodotto scalare tra i vettori di E. Precisamente, abbiamo visto in 6.2 che una delle proprietà del prodotto scalare è:

$$\forall \mathbf{u} \in E, \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

In uno spazio vettoriale propriamente euclideo tale proprietà si specializza nella seguente:

$$\forall \mathbf{v} \in E, \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} > 0, & \text{se } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ = 0, & \text{se } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

6.5 Norma di un vettore

Sia E uno spazio vettoriale propriamente euclideo. Dicesi **norma** del vettore $\mathbf{v} \in E$ il numero reale non negativo:

$$||\mathbf{v}|| \stackrel{def}{=} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Qui la radice è presa con il segno positivo, quindi $||\mathbf{v}|| \in [0, +\infty)$, poiché $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \in [0, +\infty)$. Sussiste la seguente

Proposizione (disuguaglianza di Schwarz) 145

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \quad |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||$$

Dimostrazione. Omessa. ■
La definizione di norma si estende al caso di uno spazio pseudoeuclideo. Qui è possibile imbatteri in vettori tali che:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} < 0$$

In tal caso si assume:

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

Quindi, in generale:

$$||\mathbf{u}|| \stackrel{def}{=} \sqrt{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}|}$$

6.6 Spazi metrici

Uno **spazio metrico** è un qualunque insieme non vuoto S tale che esiste una funzione reale $d(a, b)$ definita in $S \times S$ che verifica le seguenti proprietà:

1. $d(a, b)$ è non negativa:

   $$d(a, b) : S \times S \longmapsto [0, +\infty)$$

   Inoltre $d(a, b) = 0$ se e solo se $a = b$.

2. $d(a, b)$ è simmetrica rispetto alla permutazione delle variabili indipendenti:

   $$d(a, b) = d(b, a), \quad \forall a, b \in S$$

3. $d(a, b)$ verifica la *disuguaglianza triangolare*:

   $$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c), \quad \forall a, b, c \in S$$

Chiamiamo $d(a, b)$ **distanza** tra gli elementi di S.
Consideriamo il caso speciale $S = E$ spazio propriamente euclideo. Una possibile definizione di distanza è:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \tag{6.12}$$

È facile rendersi conto che la (6.12) verifica gli assiomi precedenti.

6.7 Base ortonormale

Definizione 146 *Un sistema* $\Sigma = \{\mathbf{w}_i\}$ *con* $i = 1, 2, ..., r \leq n = \dim E$*, dicesi* **ortonormale** *se:*

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = \delta_{ij}, \tag{6.13}$$

cioè se i suoi vettori sono versori e sono mutuamente ortogonali.

L'ortonormalità di un sistema di vettori implica l'indipendenza lineare dello stesso. Invero, sussiste la seguente:

Proposizione 147

$$(\Sigma = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_r\} \text{ è ortonormale}) \Longrightarrow (\Sigma \text{ è linearmente indipendente})$$

Dimostrazione. Studiamo le soluzioni rispetto a λ^i dell'equazione:

$$\lambda^i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \tag{6.14}$$

A tale scopo moltiplichiamo scalarmente per $\mathbf{w}_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ primo e secondo membro della (6.14):

$$\lambda^i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_k = \mathbf{0} \cdot \mathbf{w}_k = 0$$

Tenendo conto della (6.13):

$$\lambda^i \delta_{ik} = 0 \Longrightarrow \lambda^k = 0, \text{ per } k = 1, 2, ..., r$$

da cui segue che Σ è linearmente indipendente. ■

Definizione 148 *Per* $r = n$ *si ha che* Σ *è un sistema massimo linearmente indipendente, cioè una base. Si conclude che ogni sistema ortonormale di ordine* $r = n$ *è una base di* E*, denominata* **base ortonormale**

***

L'algoritmo che implementa l'ortonormalizzazione di una base generica $\{\mathbf{e}_i\}$ è noto come **procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt**:

$$\{\mathbf{e}_i\} \longmapsto \{\hat{\mathbf{e}}_i\} \mid \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{||\mathbf{a}_i||},$$

essendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 \\
\mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{a}_n &= \mathbf{e}_n - \frac{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{a}_{n-1}}{\mathbf{a}_{n-1} \cdot \mathbf{a}_{n-1}}\mathbf{a}_{n-1} - ... - \frac{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Esempio 149 *Assegnati i vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathbf{e}_1 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{e}_2 = (1,-2,1)\,,\ \mathbf{e}_3 = (1,2,3)\,,$$

provare che $\{\mathbf{e}_i\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$*, determinando poi la base ortonormale* $\{\mathbf{e}'_i\}$ *attraverso il procedimento di Gram-Schimidt*

Soluzione 150 *Studiamo l'equazione vettoriale:*

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

equivalente al sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0\\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0,\end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0)$*, donde* $\{\mathbf{e}_i\}$ *è manifestamente una base di* $\mathbb{R}^3$*. Per ortonormalizzare* $\{\mathbf{e}_i\}$*, applichiamo le (6.15) che in questo caso si scrivono:*

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1\\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{e}_2}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{e}_3}{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{e}_3}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1\end{aligned}$$

da cui:

$$\mathbf{a}_1 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{a}_2 = (1,-2,1)\,,\ \mathbf{a}_3 = (-1,0,1)$$

La norma di singolo vettore:

$$||\mathbf{a}_1|| = \sqrt{3},\ \ ||\mathbf{a}_2|| = \sqrt{6},\ \ ||\mathbf{a}_3|| = \sqrt{2},$$

quindi:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

***

Sia $\{\mathbf{e}_i\}$ una base ortonormale di uno spazio propriamente euclideo E (*n-dimensionale*). Preso ad arbitrio $\mathbf{x}\in E$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i \tag{6.16}$$

moltiplichiamo scalarmente per $\mathbf{e}_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ primo e secondo membro della (6.16):

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ik},$$

da cui:

$$x_k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k, \quad \text{per } k = 1, 2, ..., n \tag{6.17}$$

La (6.17) esprime le componenti del vettore $\mathbf{x}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$. Quindi le componenti di $\mathbf{x}$ nella base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ sono:

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$$

Spesso le x_i si indicano con c_i noti come **coefficienti di Fourier** del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{e}_i \tag{6.18}$$

6.8 Segnatura della metrica

Sia E_n uno spazio euclideo (propriamente o pseudoeuclideo). In una base assegnata $\{\mathbf{e}_i\}$ il tensore metrico è:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots. & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

È facile convincersi che

$$\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \mid g_{ii} < 0) \Longrightarrow E_n \text{ è pseudoeuclideo}$$

giacchè $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i < 0$.
Nel caso speciale in cui $\{\mathbf{e}_i\}$ è ortonormale, la (6.19) è la matrice diagonale:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots. & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ... & g_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Definizione 151 *Si chiama* **segnatura della metrica** g_{ik} *la successione dei segni algebrici degli elementi diagonali della (6.20). Ad esempio, se* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $g_{ii} > 0$, *si scrive* $(+ + ...+)$

Proposizione 152 *In una qualunque base ortonormale la segnatura di uno spazio vettoriale euclideo è* $(+ + ...+)$.

Consideriamo il seguente esempio numerico. Nella base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E_2:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -1$, cioè $||\mathbf{e}_2||^2 = -1$, per cui lo spazio è pseudoeuclideo. Applichiamo il procedimento di ortonormalizzazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{||\mathbf{e}_1||} = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_2 &= \frac{\mathbf{a}_2}{||\mathbf{a}_2||} \end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a}_2||^2 &= (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1) \\ &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \\ &= +1 \end{aligned}$$

In tal caso assumiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Nella base o.n. $\{\mathbf{e}'_i\}$ la metrica è:

$$(g'_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la segnatura è $(+-)$.

6.9 Polinomi ortonormali

Definizione 153 *Dicesi* **polinomio trigonometrico di ordine** n*, la funzione reale di variabile reale:*

$$\tau_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

Indichiamo con $T_n(-\pi,\pi)$ l'insieme dei polinomi trigonometrici di ordine n, per $x \in [-\pi,\pi]$. Tale insieme assume la struttura di spazio vettoriale reale, e la $(2n+1)$-*pla* di scalari $(a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ sono le componenti del "vettore" $\tau_n(x)$ nella base:

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos(nx), \sin(nx)\right\} \tag{6.21}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} e_0(x) &= \frac{1}{2} \\ e_1(x) &= \cos x \\ e_2(x) &= \sin x \\ &... \\ e_{2n-1}(x) &= \cos(nx) \\ e_{2n}(x) &= \sin(nx) \end{aligned} \tag{6.22}$$

Da ciò segue che $\dim T_n(-\pi,\pi) = 2n+1$. Definiamo il prodotto scalare:

$$(\tau_n, \tau_n') = \int_{-\pi}^{\pi} \tau_n(x)\, \tau_n'(x)\, dx,$$

in forza del quale lo spazio vettoriale $T_n(-\pi,\pi)$ risulta essere euclideo.
Inoltre la base (6.21) è ortogonale in forza delle seguenti identità:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(k'x) = 0, \quad \forall k, k' \in \mathbb{N}$$

Cioè:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x)\, e_{k'}(x)\, dx = 0, \quad \text{se } k \neq k'$$

Tale base non è però ortonormale, in quanto i suoi vettori non sono unitari:

$$||e_0(x)||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e_0(x)\, e_0(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) = \pi$$

Un vettore $\mathbf{v}$ non unitario è legato al suo versore da:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \tag{6.23}$$

La (6.23) ci consente di passare dal vettore $\mathbf{v}$ al corrispondente vettore normalizzato $\hat{\mathbf{v}}$. Quindi:

$$\hat{e}_0(x) = \frac{e_1(x)}{||e_1(x)||} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\hat{e}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad k > 0$$

Da cui otteniamo la base ortonormale dello spazio $T_n(-\pi, \pi)$.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\} \tag{6.24}$$

***

La nozione di polinomi ortonormali si generalizza nel modo seguente. Consideriamo lo spazio vettoriale $C(a,b)$ munito di prodotto scalare:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx, \quad f, g \in C(a,b)$$

Sia:

$$\Sigma = \{q_1(x), q_2(x), ..., q_r(x)\}$$

un sistema di polinomi ortonormali:

$$(q_i, q_j) = \delta_{ij}$$

Cioè:

$$\int_a^b q_i(x)\, q_j(x)\, dx = \delta_{ij}$$

Sia $V = L[\Sigma]$, per cui preso un qualunque vettore $p(x) \in V$, si ha:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k q_k(x)$$

Ci proponiamo di determinare la *r-pla* $(a_1, a_2, ..., a_r)$ tale che $p(x)$ sia la migliore approssimazione di una funzione $f \in C(a,b)$. A tale scopo, minimizziamo la norma del vettore $f - p$:

$$
\begin{aligned}
&F(a_1,a_2,...,a_r) \overset{def}{=} ||f-p||^2 \\
&= (f-p, f-p) \\
&= \left(f - \sum_{k=1}^{r} a_k q_k, f - \sum_{k'=1}^{r} a_{k'} q_{k'}\right) \\
&= ||f||^2 - \sum_{k'=1}^{r} a_{k'} (q_{k'}, f) - \sum_{k=1}^{r} a_k (q_k, f) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{k'=1}^{r} a_k a_{k'} \delta_{kk'} \\
&= ||f||^2 - 2\sum_{k=1}^{r} a_k (q_k, f) + \sum_{k=1}^{r} a_k^2
\end{aligned}
$$

Ma (f, q_k) sono i coefficienti di Fourier c_k relativamente al sistema ortonormale $\{q_k\}$:

$$
\begin{aligned}
F(a_1,a_2,...,a_r) &= ||f||^2 - 2\sum_{k=1}^{r} a_k c_k + \sum_{k=1}^{r} a_k^2 \\
&= ||f||^2 + \sum_{k=1}^{r} \left(a_k^2 - 2a_k c_k + c_k^2 - c_k^2\right) \\
&= ||f||^2 + \sum_{k=1}^{r} (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^{r} c_k^2
\end{aligned}
$$

Abbiamo:

$$
\frac{\partial F}{\partial a_k} = 2\sum_{k=1}^{r} (a_k - c_k) \tag{6.25}
$$

Risulta:

$$
\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0 \Longleftrightarrow a_k = c_k
$$

Dallo studio del segno della (6.25) si deduce che la *r-pla* $(c_1, c_2, ..., c_r)$ è punto di minimo relativo per la funzione $F(a_1, a_2, ..., a_r)$, donde:

$$
\min F(a_1,a_2,...,a_r) = F(c_1,c_2,...,c_r)
$$

Quindi la migliore approssimazione della funzione $f \in C(a,b)$ è:

$$
p(x) = \sum_{k=1}^{3} c_k q_k(x)
$$

$$
c_k = \int_a^b f(x)\, q_k(x)\, dx
$$

Ad esempio consideriamo $f \in (0, \pi)$:

$$f(x) = x + \sin x$$

Consideriamo il sistema ortonormale:

$$\Sigma = \left\{ q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \right\}$$

I coefficienti di Fourier sono:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (x + \sin x)\, dx = \frac{4 + \pi^2}{2\sqrt{2\pi}}$$
$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (x + \sin x) \cos x dx = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$
$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (x + \sin x) \sin x dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{2},$$

quindi:

$$p(x) = \frac{4 + \pi^2}{4\pi} - \frac{2}{\pi} \cos x + \frac{3}{2} \sin x$$

6.10 Spazi euclidei isomorfi

Siano E ed E' due spazi vettoriali euclidei.

Definizione 154 *E, E' sono* **isomorfi** *se esiste un'applicazione lineare biiettiva:*

$$\phi : E \longmapsto E'$$

tale che

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \;\; \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \phi(\mathbf{u}) \cdot \phi(\mathbf{v})$$

Teorema 155 *Gli spazi euclidei isodimensionali sono isomorfi.*

Dimostrazione. Sia E_n uno spazio euclideo *n-dimensionale*, ed $\{\mathbf{e}_i\}$ una sua base ortonormale. Consideriamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \;\; \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + ... + x^n y^n$$

Definiamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} &\phi : E_n \longmapsto \mathbb{R}^n \\ &\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i \longmapsto \left(u^1, u^2, ..., u^n\right) \end{aligned}$$

Dimostriamo la linearità di ϕ:

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n, \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \ \mathbf{z} &\overset{def}{=} \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \\
\phi(\mathbf{z}) &= \left(z^1, z^2, ..., z^n\right) \\
z^i &= \lambda u^i + \mu v^i \\
\phi(\mathbf{z}) &= \lambda \left(u^1, u^2, ..., u^n\right) + \mu \left(v^1, v^2, ..., v^n\right),
\end{aligned}$$

donde $\phi \in Hom\left(E_n, \mathbb{R}^n\right)$. Inoltre:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} E_n &= \mathbb{R}^n \quad \text{(suriettività)} \\
\mathbf{u} \neq \mathbf{v} &\Longrightarrow \left(u^1, u^2, ..., u^n\right) \neq \left(v^1, v^2, ..., v^n\right) \quad \text{(iniettività)}
\end{aligned}$$

Cioè ϕ è biiettiva.
Studiamo il comportamento del prodotto scalare sotto l'azione di ϕ.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= g_{ik} u^i v^k \\
&= \delta_{ik} u^i v^k \\
&= u^1 v^1 + u^2 v^2 + ... + u^n v^n \\
&= \phi(\mathbf{u}) \phi(\mathbf{v}),
\end{aligned}$$

da cui l'isomorfismo tra E_n e $\mathbb{R}^n$. ■

***

Sia E_n uno spazio vettoriale euclideo *n-dimensionale*. Il prodotto scalare è:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g_{ik} v^i w^k$$

Assegnato il vettore $\mathbf{u} \in E_n$, consideriamo il funzionale lineare $\Omega_{\mathbf{u}}$ tale che:

$$\forall \mathbf{x} \in E_n, \quad \langle \mathbf{x}, \Omega_{\mathbf{u}} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \tag{6.26}$$

Esempio 156 *$E_n = \mathbb{R}^2$. Nella base canonica $\{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$ il tensore metrico è:*

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ik},$$

donde:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \delta_{ik} u^i v^k = u^1 v^1 + u^2 v^2$$

Ora assegnamo $\mathbf{u} = (1,2)$. Possiamo definire il funzionale lineare $\Omega_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{2*}$ tale che:

$$\forall \mathbf{x} = \left(x^i\right) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle \mathbf{x}, \Omega_{\mathbf{u}} \rangle = x^1 + 2x^2,$$

cioè:

$$\langle \mathbf{x}, \Omega_{\mathbf{u}} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$$

Viceversa:

$$\omega \in E_n^* \Longrightarrow \exists \mathbf{u} \in E_n \mid \forall \mathbf{x} \in E_n, \ \langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \tag{6.27}$$

Sia $\{\theta^i\}$ la base duale associata alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ di E_n. Quindi:

$$\omega = \omega_j \theta^j$$

Preso un qualunque $\mathbf{x} \in E_n$:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$$

Quindi:

$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \left\langle x^i \mathbf{e}_i, \omega_j \theta^j \right\rangle = x^i \omega_j \left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle = x^i \omega_j \delta_j^i = x^i \omega_i$$

La nostra richiesta è:

$$x^i \omega_i = g_{ik} x^i u^k \Longrightarrow \left(\omega_i - g_{ik} u^k\right) x^i = 0$$

Cioè:

$$g_{ik} u^k = \omega_i, \tag{6.28}$$

che è il sistema di Cramer:

$$\begin{aligned} g_{11}u^1 + g_{12}u^2 + ... + g_{1n}u^n &= \omega_1 \\ g_{21}u^1 + g_{22}u^2 + ... + g_{2n}u^n &= \omega_2 \\ &... \\ g_{n1}u^1 + g_{n2}u^2 + ... + g_{nn}u^n &= \omega_n, \end{aligned}$$

giacchè è $\det(g_{ik}) \neq 0$ e $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \neq (0, 0, ..., 0) \Longrightarrow \exists! \ (u^1, u^2, ..., u^n)$. Si conclude che:

$$\omega \in E_n^* \Longrightarrow \exists! \mathbf{u} \in E_n \mid \forall \mathbf{x} \in E_n, \ \langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$$

Possiamo definire l'applicazione:

$$\begin{aligned} L : E_n &\longmapsto E_n^* \\ \mathbf{u} &\longmapsto \omega \end{aligned}$$

È immediato verificare che L è un isomorfismo tra lo spazio euclideo E_n e il suo duale E_n^*.

Esempio 157 *Consideriamo uno spazio euclideo 2-dimensionale E_2. Assumiamo come base il sistema di vettori:*

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (-1, 2)\} \tag{6.29}$$

Quindi il tensore metrico è:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

per cui il prodotto scalare è:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{g}_{ik}v^iw^k=v^1w^1-\left(v^1w^2+v^2w^1\right)+5v^2w^2$$

Consideriamo il funzionale lineare:

$$\omega\in E_2^* \ \mid \forall\mathbf{x}\in E_2,\ \langle\mathbf{x},\omega\rangle=3x^1+x^2,$$

cioè nella base duale alla base (6.29) è

$$\omega_1=3,\ \omega_2=1$$

La (6.28) si scrive:

$$\begin{aligned} u^1-u^2&=3\\ -u^1+5u^2&=1, \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione $(u^1,u^2)=(4,1)$. *Quindi* $\mathbf{u}=(4,1)$. *Una verifica diretta porge:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}&=4x^1-\left(x^1+4x^2\right)+5x^2\\ &=3x^1+x^2\\ &=\langle\mathbf{x},\omega\rangle \end{aligned}$$

6.11 Complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale e proiettori ortogonali

Sia W un sottospazio vettoriale dello spazio euclideo E_n.

Definizione 158 *Il* **supplementare ortogonale** *o* **complemento ortogonale** *di W è:*

$$W^\perp=\{\mathbf{v}\in E_n \mid \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0,\ \forall\mathbf{w}\in W\}$$

In altre parole, $W^\perp$ è l'insieme dei vettori ortogonali ad ogni vettore di W.

Proposizione 159 *$W^\perp$ è un sottospazio di E_n.*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che $W^\perp\subset E_n$. Inoltre:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u},\mathbf{v}\in W^\perp\Longrightarrow(\forall\mathbf{w}\in W,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0)\\ &\quad\Longrightarrow(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0\Longrightarrow(\mathbf{u}+\mathbf{v})\in W^\perp\\ &\mathbf{u}\in W^\perp,\lambda\in\mathbb{R}\Longrightarrow(\forall\mathbf{w}\in W,\ (\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{w}=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})=0)\Longrightarrow(\lambda\mathbf{u})\in W^\perp \end{aligned}$$

■

Esempio 160 *Sia $E_2 = \mathbb{R}^2$. Consideriamo il sottospazio:*

$$W = \{a\,(2,3) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Il supplementare ortogonale di W è:

$$W^{\perp} = \left\{\mathbf{v} = \left(v^i\right) \in E_n \mid a\left(2v^1 + 3v^2\right) = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}\right\}$$

Cioè:

$$2v^1 + 3v^2 = 0 \Longleftrightarrow \left(v^1, v^2\right) = \frac{v^1}{3}\,(3,-2)$$

Quindi:

$$W^{\perp} = \{b\,(3,-2) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 161 *Assegnato lo spazio euclideo E_n, per ogni sottospazio vettoriale W_r esiste ed è unico il supplementare ortogonale $W_r^{\perp}$.*

Dimostrazione. Sia $\Sigma_r = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_r\}$ una base ortonormale di W_r. Preso ad arbitrio un sistema linearmente indipendente $\Sigma_{n-r} = \{\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n\}$, risulta che $\Sigma_n = \Sigma_r \cup \Sigma_{n-r}$ è una base di E_n. Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\Sigma_n \underset{GS}{\longrightarrow} \hat{\Sigma}_n = \Sigma_r \cup \hat{\Sigma}_{n-r},$$

essendo $\hat{\Sigma}_{n-r} = \{\mathbf{e}_{r+1}, ..., \mathbf{e}_n\}$ un sistema ortonormale. Evidentemente:

$$W_r = L\left[\Sigma_r\right],$$

e:

$$W_r^{\perp} = L\left[\hat{\Sigma}_{n-r}\right]$$

Per dimostrare l'unicità, supponiamo che esiste un $W_r^{\perp\prime} = L\left[\Lambda_{n-r}\right]$, essendo:

$$\Lambda_{n-r} = \{\mathbf{f}_{r+1}, ..., \mathbf{f}_n\}$$

Esprimiamo i vettori di Λ_{n-r} attraverso le loro componenti nella base ortonormale $\hat{\Sigma}_n$. Iniziamo con il vettore $\mathbf{f}_{r+1}$:

$$\mathbf{f}_{r+1} = a^h \mathbf{e}_h + b^k \mathbf{e}_k, \quad k = r+1, ..., n; \quad h = 1, ..., r \tag{6.30}$$

Risulta:

$$\mathbf{f}_{r+1} \in W_r^{\perp\prime} \Longrightarrow \mathbf{f}_{r+1} \cdot \mathbf{e}_h = 0 \tag{6.31}$$

Moltiplicando scalarmente primo e secondo membro della (6.30) per $\mathbf{e}_h$ con $h = 1, 2, ..., r$:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{f}_{r+1} \cdot \mathbf{e}_1 = a^1 \\
0 &= \mathbf{f}_{r+1} \cdot \mathbf{e}_2 = a^2 \\
&\ldots \\
0 &= \mathbf{f}_{r+1} \cdot \mathbf{e}_r = a^r
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbf{f}_{r+1} = b^k \mathbf{e}_k \tag{6.32}$$

Il procedimento può essere ripetuto per i rimanenti vettori $\mathbf{f}_{r+2}, ..., \mathbf{f}_n$:

$$\mathbf{f}_{r+2} = c^k \mathbf{e}_k$$
$$\mathbf{f}_{r+3} = d^k \mathbf{e}_k$$
$$...$$

Da ciò segue che il sottospazio generato dai vettori $\{\mathbf{e}_{r+1}, ..., \mathbf{e}_n\}$ coincide con il sottospazio generato da $\{\mathbf{f}_{r+1}, ..., \mathbf{f}_n\}$, cioè

$$W_r^{\perp'} = W_r^{\perp}$$

■

Teorema 162 *Sia W_r un sottospazio vettoriale di uno spazio euclideo E_n. Risulta:*

$$E_n = W_r \oplus W_r^{\perp}$$

Dimostrazione. Con le notazioni del teorema precedente, una base ortonormale di E_n è:

$$\hat{\Sigma}_n = \Sigma_r \cup \hat{\Sigma}_{n-r}$$

Quindi:

$$\forall \mathbf{v} \in E_n, \ \ \mathbf{v} = v^h \mathbf{e}_h + v^k \mathbf{e}_k, \qquad h = 1, ..., r, \ k = r+1, ..., n$$

Evidentemente:

$$\left(v^h \mathbf{e}_h\right) \in W_r, \ \ \left(v^k \mathbf{e}_k\right) \in W_r^{\perp}$$

Cioè:

$$E_n = W_r + W_r^{\perp} \tag{6.33}$$

Inoltre:

$$\forall \mathbf{w} \in W_r \cap W_r^{\perp}, \ \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 0 \Longrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{0} \Longrightarrow W_r \cap W_r^{\perp} = \{\mathbf{0}\} \tag{6.34}$$

Dalle (6.33)-(6.34):

$$E_n = W_r \oplus W_r^{\perp}$$

■

Per il teorema appena dimostrato segue che ogni vettore $\mathbf{x} \in E_n$ si esprime in uno e in un solo modo come somma di un vettore di W_r e di un vettore di $W_r^{\perp}$:

$$\mathbf{x} \in E_n \Longrightarrow \exists \mathbf{x}_w \in W_r, \ \exists \mathbf{x}'_w \in W_r^{\perp} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_w + \mathbf{x}'_w$$

Da ciò segue che possiamo definire un operatore lineare:

$$\begin{aligned} \hat{P}_w : E_n &\longmapsto E_n \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{x}_w \qquad \forall \mathbf{x} \in E \end{aligned} \tag{6.35}$$

Chiamiamo (6.35) **operatore di proiezione ortogonale su** W. Risulta:

$$\operatorname{Im} \hat{P}_w = E$$

Il kernel:

$$\ker \hat{P}_w = \left\{ \mathbf{x} \in E_n \mid \hat{P}_w \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$$

Dobbiamo risolvere l'equazione operatoriale:

$$\hat{P}_w \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Evidentemente:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}'_w \in W_r^{\perp},$$

donde:

$$\ker \hat{P}_w = W_r^{\perp}$$

Esempio 163 *Sia $E_3 = \mathbb{R}^3$. Consideriamo il sottospazio:*

$$W_1 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Assumendo un sistema di assi coordinati $0xyz$, W si identifica con l'asse z. Il complemento ortogonale è il piano xy:

$$W_1^{\perp} = \{(x,y,0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

La proiezione ortogonale sull'asse z è:

$$\begin{aligned} \hat{P}_w : \mathbb{R}^3 &\longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longrightarrow (0,0,z) \end{aligned}$$

6.12 Componenti covarianti e controvarianti

Nella sezione 5 abbiamo introdotto la nozione di componenti covarianti e componenti controvarianti. Tale nozione si estende al caso degli spazi euclidei.
Senza perdita di generalità consideriamo uno spazio euclideo 2-dimensionale E_2. Sia $\{\mathbf{e}_i\}$ una base di vettori unitari:

$$||\mathbf{e}_1|| = ||\mathbf{e}_2|| = 1$$

Preso ad arbitrio $\mathbf{u} \in E_2$, abbiamo:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i \tag{6.36}$$

Le componenti u^i di $\mathbf{u}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$ si chiamano **componenti controvarianti** di $\mathbf{u}$.
Ora, poniamo per definizione:

$$u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1, \quad u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 \tag{6.37}$$

Le (6.37) sono le **componenti covarianti** di $\mathbf{u}$. Si osservi che da un punto di vista geometrico, le u_i si ottengono dalle proiezioni di $\mathbf{u}$ secondo le direzioni di $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ rispettivamente. Preso un secondo vettore $\mathbf{v} \in E_2$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ik} u^i v^k \tag{6.38}$$

D'altro canto:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot \left(v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 \right) \\ &= v^1 u_1 + v^2 u_2 \\ &= v^i u_i \end{aligned} \tag{6.39}$$

Confrontando la (6.39) con la (6.38) otteniamo:

$$u_i = g_{ik} u^k \tag{6.40}$$

La (6.40) lega le componenti controvarianti a quelle covarianti di un medesimo vettore. Si osservi che se la base è ortonormale:

$$u_i = \delta_{ik} u^k = u^i$$

Cioè, in una qualunque base ortonormale le componenti covarianti coincidono con le componenti controvarianti.

Esempio 164 *Sia $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i = 1, 2)$ una base di uno spazio vettoriale reale E_2 strutturato pseudoeuclidamente. Il tensore metrico è:*

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid g = \det(g_{ik}) = \mu - \lambda^2 \neq 0$$

Determinare: 1) i valori di λ e μ per i quali E_2 risulta euclideo; 2) le componenti covarianti in $\{\mathbf{e}_i\}$ del vettore $\mathbf{u} = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, nel caso $\lambda = 2, \mu = 1$.

Soluzione

E_2 assume la struttura di spazio euclideo se e solo se $g > 0$, donde $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \mu - \lambda^2 > 0$. Per il quesito 2 osserviamo che per $\lambda = 2, \mu = 1$, si ha:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

donde:

$$||\mathbf{e}_1|| = ||\mathbf{e}_2|| = 1$$

Quindi possiamo determinare le componenti covarianti del vettore $\mathbf{u}$.

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 = (5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 = 5 + 4 = 9 \\ u_2 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 = (5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 = 10 + 2 = 12, \end{aligned}$$

perciò:

$$u_1 = 9, \quad u_2 = 12$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} u_1 &= g_{1k} u^k = g_{11} u^1 + g_{12} u^2 = 9 \\ u_2 &= g_{2k} u^k = g_{21} u^1 + g_{22} u^2 = 12 \end{aligned}$$

6.13 Applicazioni

Sia E_n uno spazio propriamente euclideo *n-dimensionale*. Per analogia con lo spazio ordinario ($\mathbb{R}^3$) possiamo introdurre le nozioni di angolo tra due vettori e di componente ortogonale. Consideriamo due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Dall'algebra vettoriale:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cos\theta,$$

essendo θ **l'angolo tra u** e $\mathbf{v}$. Quindi:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||} \tag{6.41}$$

Il **vettore componente ortogonale di u secondo v** è il vettore $\mathbf{u}_v$ tale che:

$$||\mathbf{u}_v|| = ||\mathbf{u}|| \left|\cos\theta\right|,$$

cioè la norma di $\mathbf{u}_v$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ sulla direzione individuata da $\mathbf{v}$. La presenza del valore assoluto di $\cos\theta$ si giustifica osservando che $||\mathbf{u}_v|| > 0$, $\forall\theta \in [0, 2\pi]$. Abbiamo:

$$\mathbf{u}_v = ||\mathbf{u}_v||\, vers\mathbf{u}_v,$$

essendo $vers\mathbf{u}$ il versore di $\mathbf{u}$:

$$vers\mathbf{u}_v = \frac{\mathbf{u}_v}{||\mathbf{u}_v||}$$

Ovviamente:

$$\begin{aligned} vers\mathbf{u}_v &= vers\mathbf{v}, \ \text{ se } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right] \\ vers\mathbf{u}_v &= -vers\mathbf{v}, \ \text{ se } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \end{aligned}$$

Da ciò segue che:

$$\mathbf{u}_v = ||\mathbf{u}|| \cos\theta vers\mathbf{v}$$

Tenendo conto della (6.41)

$$\mathbf{u}_v = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v} = c\mathbf{v}$$

dove abbiamo introdotto il **coefficiente di Fourier di u rispetto a v**:

$$c = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{6.42}$$

Il numero reale (6.42) è noto anche come **la componente ortogonale di u rispetto a v**.

Capitolo 7

Spazi vettoriali unitari

Sia E uno spazio vettoriale sul campo complesso $\mathbb{C}$.

Definizione 165 *E è uno* ***spazio vettoriale unitario*** *se in esso è definito un* **prodotto interno** *indicato con $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{C}$, che verifica le seguenti proprietà:*

1. *$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^*$, essendo * l'operazione di coniugazione complessa.*
2. *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$, $\langle \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \mu \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$*
3.

$$\begin{gathered} \forall \mathbf{u} \in E, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{gathered} \tag{7.1}$$

Osservazione 166 *Si osservi che la prima delle (7.1) è consistente, poichè $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^* \Longrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}$.*

Esempio 167 *Sia $E = \mathbb{C}^n$; presi ad arbitrio due vettori:*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left(u^1, u^2, ..., u^n\right) \\ \mathbf{v} &= \left(v^1, v^2, ..., v^n\right) \end{aligned}$$

Assumiamo come prodotto interno:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} u^k v^{k*} \tag{7.2}$$

Verifichiamo che la (7.2) soddisfa gli assiomi del prodotto interno.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^* &= \left(\sum_{k=1}^{n} v^k u^{k*} \right)^* \\
&= \sum_{k=1}^{n} v^{k*} u^k \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle
\end{aligned}$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \mathbf{t} \overset{def}{=} \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}, \mathbf{w} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} t^k w^{k*} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda u^k + \mu v^k \right) w^{k*} \\
&= \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \mu \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle
\end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longrightarrow \left(u^1, u^2, ..., u^n \right) = (0, 0, ..., 0) \Longrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^{n} u^k u^{k*} = 0$$

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow (\exists h \in \{1, 2, ..., n\} \mid \mathbf{u}_h \neq 0) \Longrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_h u^h u^{h*} = \sum_h \left| u^h \right|^2 > 0$$

Esempio 168 *Sia E lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ i cui vettori sono:*

$$f : [a, b] \longmapsto \mathbb{C} \mid f \text{ è ivi continua}$$

Il numero complesso

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)^*\, dx, \quad \forall f, g \in E$$

è un prodotto interno. Quindi E è uno spazio vettoriale unitario.

***

Sia E uno spazio unitario *n-dimensionale*. Presi ad arbitrio due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, sviluppiamoli secondo le loro componenti in una base assegnata $\{\mathbf{e}_i\}$: $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k$. Il prodotto interno è:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \left\langle u^i \mathbf{e}_i, v^k \mathbf{e}_k \right\rangle \\
&= u^i \left\langle \mathbf{e}_i, v^k \mathbf{e}_k \right\rangle \\
&= u^i \left\langle v^k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i \right\rangle^* \\
&= u^i v^{k*} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle
\end{aligned}$$

Cioè:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = g_{ik} u^i v^{k*}, \tag{7.3}$$

essendo $g_{ik} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle$ il tensore metrico.
Per definizione di prodotto interno:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^*$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^* &= \left(g_{ik} v^i u^{k*} \right)^* \\ &= g_{ik}^* v^{i*} u^k \\ &= g_{ki}^* u^i v^{k*} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Confrontando la (7.3) con la (7.4):

$$\forall \mathbf{u} = \left(u^i \right), \mathbf{v} = \left(v^k \right) \in E, \ \left(g_{ik} - g_{ki}^* \right) u^i v^{k*} = 0 \Longrightarrow g_{ik} = g_{ki}^*,$$

cioè la matrice (g_{ik}) è hermitiana.

***

In uno spazio unitario continuano a valere la definizione di norma di un vettore e la disuguaglianza di Scwharz:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}|| &= \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \\ |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| &\leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \end{aligned}$$

7.1 Aggiunto di un operatore lineare

Sia $\hat{A} \in End\,(E)$, essendo E uno spazio unitario *n-dimensionale* con $n < +\infty$..

Definizione 169 *Si chiama* **aggiunto** *dell'operatore $\hat{A}$ e si indica con $\hat{A}^+$, l'operatore lineare tale che:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \ \left\langle \hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \hat{A}^+ \mathbf{y} \right\rangle$$

Si osservi che tale definizione è valida solo se lo spazio vettoriale è finito-dimensionale. Nel caso contrario, l'aggiunto può non esistere.

Proposizione 170 *Se A è la matrice rappresentativa di $\hat{A} \in End\,(E)$ nella base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$, la matrice rappresentativa dell'operatore aggiunto $\hat{A}^+$, è la coniugata hermitiana di A:*

$$A^+ = (A^*)^T$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$A = \left(a_i^k\right), \quad A^+ = \left(a_i^{+k}\right)$$

Si osservi che l'indice in basso denota la colonna, mentre l'indice in alto denota la riga[1]:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

Esplicitiamo il prodotto interno:

$$\left\langle \hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle = \left\langle \hat{A}x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j \right\rangle = x^i y^{j*} \left\langle \hat{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \right\rangle$$

Osserviamo che per definizione di matrice rappresentativa:

$$\hat{A}\mathbf{e}_i = a_i^k \mathbf{e}_k$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle &= x^i y^{j*} a_i^k \delta_{kj} \\ &= x^i y^{j*} a_i^j \end{aligned}$$

Esplicitiamo il prodotto interno $\left\langle \mathbf{x}, \hat{A}^+\mathbf{y} \right\rangle$:

$$\left\langle \mathbf{x}, \hat{A}^+\mathbf{y} \right\rangle = \left\langle x^i \mathbf{e}_i, \hat{A}^+ y^j \mathbf{e}_j \right\rangle = x^i y^{j*} \left\langle \mathbf{e}_i, \hat{A}^+ \mathbf{e}_j \right\rangle = x^i y^{j*} a_j^{+k*} \delta_{ik} = x^i y^{j*} a_j^{+i*}$$

La nostra richiesta è $\left\langle \hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \hat{A}^+\mathbf{y} \right\rangle$, donde:

$$\forall \left(x^i\right), \left(y^j\right) \in E, \quad \left(a_i^j - a_j^{+i*}\right) x^i y^{j*} = 0 \Longrightarrow a_i^j = a_j^{+i*} \Longleftrightarrow a_i^{+j} = \left(a_j^i\right)^*,$$

donde l'asserto. ■

Esempio 171 *Sia $E = \mathbb{C}^3$. Consideriamo l'operatore $\hat{A}$ tale che:*

$$\hat{A}(x, y, z) = (2x + iy, y - 5iz, x + (1 - i)y + 3z)$$

Nella base canonica $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$, la matrice rappresentativa dell'operatore è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & -5i \\ 1 & 1 - i & 3 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice rappresentativa dell'operatore aggiunto di $\hat{A}$ è:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1 + i \\ 0 & 5i & 3 \end{pmatrix}$$

[1] Utilizziamo questa notazione al posto di quella tradizionale a_{ik}, per non appesantire le equazioni con il simbolo di sommatoria.

Proposizione 172 $\left(\hat{A}^{+}\right)^{+}=\hat{A}$

Dimostrazione.

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in E,\left\langle \hat{A}^{+}\mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \mathbf{x},\left(\hat{A}^{+}\right)^{+}\mathbf{y}\right\rangle$$

ma

$$\left\langle \hat{A}^{+}\mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \mathbf{y},\hat{A}^{+}\mathbf{x}\right\rangle ^{*}=\left\langle \hat{A}\mathbf{y},\mathbf{x}\right\rangle ^{*}=\left\langle \mathbf{x},\hat{A}\mathbf{y}\right\rangle ,$$

cioè:

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in E,\left\langle \mathbf{x},\hat{A}\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \mathbf{x},\left(\hat{A}^{+}\right)^{+}\mathbf{y}\right\rangle \Longrightarrow\left(\hat{A}^{+}\right)^{+}=\hat{A}$$

■

Proposizione 173 $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{+}=\hat{A}^{+}+\hat{B}^{+}$

Dimostrazione. Segue direttamente dalle proprietà del prodotto interno. ■

Proposizione 174 $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+}=\hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$

Dimostrazione.

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in E,\left\langle \mathbf{x},\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+}\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \left(\hat{A}\hat{B}\right)\mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \hat{A}\left(\hat{B}\mathbf{x}\right),\mathbf{y}\right\rangle$$

Poniamo $\hat{B}\mathbf{x}=\mathbf{x}'$

$$\left\langle \hat{A}\left(\hat{B}\mathbf{x}\right),\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \hat{A}\mathbf{x}',\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \mathbf{x}',\hat{A}^{+}\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \hat{B}\mathbf{x},\hat{A}^{+}\mathbf{y}\right\rangle =\left\langle \mathbf{x},\left(\hat{B}^{+}\hat{A}^{+}\right)\mathbf{y}\right\rangle$$

cioè:

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+}=\hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$$

■

7.2 Operatori hermitiani

Sia $\hat{A}\in End\left(E\right)$, essendo E uno spazio unitario *n-dimensionale.*

Definizione 175 *$\hat{A}$ è* **autoaggiunto** *o* **hermitiano** *se $\hat{A}=\hat{A}^{+}$.*

Osservazione 176 *La matrice rappresentativa di un operatore hermitiano in una qualunque base ortonormale è hermitiana.*

Teorema 177 *$\hat{A}$ è hermitiano$\Big)\Longrightarrow\Big($gli autovalori di $\hat{A}$ sono reali*

Dimostrazione. Scriviamo l'equazione agli autovalori:

$$\hat{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \neq 0)$$

Deve essere:

$$\left\langle \hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle \underset{\hat{A}=\hat{A}^+}{=} \left\langle \mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y} \right\rangle$$

L'equazione precedente per $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{u}$, diventa:

$$\langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} \rangle \Longrightarrow \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda^* \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \underset{\mathbf{u}\neq\mathbf{0}}{\Longrightarrow} \lambda = \lambda^*$$

■

Teorema 178 *Gli autovettori di un operatore hermitiano corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Dimostrazione. Sia $\hat{A} \in End(E)$ tale che $\hat{A} = \hat{A}^+$. Scriviamo l'equazione agli autovalori:

$$\begin{aligned} \hat{A}\mathbf{u}_i &= \lambda_i \mathbf{u}_i \\ \hat{A}\mathbf{u}_j &= \lambda_j \mathbf{u}_j, \end{aligned}$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$.

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{u}_j, \hat{A}\mathbf{u}_i \right\rangle &= \langle \mathbf{u}_j, \lambda_i \mathbf{u}_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle \\ \left\langle \mathbf{u}_j, \hat{A}\mathbf{u}_i \right\rangle &= \left\langle \hat{A}\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \right\rangle = \lambda_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle \end{aligned} \tag{7.5}$$

Sottraendo la prima dalla seconda delle (7.5):

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle \underset{\lambda_i \neq \lambda_j}{\Longrightarrow} \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = 0 \Longrightarrow \mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$$

■

7.3 Operatori unitari

Definizione 179 $\hat{U} \in End(E)$ *si dice* **operatore unitario** *se*

$$\hat{U}\hat{U}^+ = \hat{U}^+\hat{U} = \hat{1}$$

In altri termini, un operatore unitario è invertibile e l'inverso coincide con l'aggiunto.

Teorema 180 $\left.\hat{U} \text{ è unitario}\right) \Longleftrightarrow \left(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \quad \left\langle \hat{U}\mathbf{x}, \hat{U}\mathbf{y} \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\right.$

Dimostrazione. Implicazione diretta
$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \ \left\langle \hat{U}\mathbf{x}, \hat{U}\mathbf{y} \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \hat{U}^+\hat{U}\mathbf{y} \right\rangle \underset{\hat{U}^+\hat{U}=\hat{1}}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
Implicazione inversa
$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \ \left\langle \mathbf{x}, \hat{U}^+\hat{U}\mathbf{y} \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \Longrightarrow \hat{U}^+\hat{U} = \hat{1}$

$\hat{U}^{+}\hat{U} = \hat{1} \Longrightarrow \left(\hat{U}^{+}\hat{U}\right)^{+} = \hat{1}^{+} \Longrightarrow \hat{U}\hat{U}^{+} = \hat{1}$ ■

In altre parole, una trasformazione unitaria conserva il prodotto interno. La condizione precedente può essere formulata in termini di norma di un vettore:

$$\forall \mathbf{x} \in E, \quad \left|\left|\hat{U}\mathbf{x}\right|\right| = ||\mathbf{x}|| \tag{7.6}$$

Osservazione 181 *$\hat{U} : E \longmapsto E$, tale che $\mathrm{Im}\,\hat{U} = E$, $\exists \hat{U}^{-1}$, donde $\hat{U}$ è una applicazione biettiva di E in sè. Inoltre, $\left\langle \hat{U}\mathbf{x}, \hat{U}\mathbf{y} \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, quindi per la definizione 6.10, gli operatori unitari definiscono un isomorfismo di uno spazio unitario in sè.*

Osservazione 182 *La (7.6) può essere scritta come:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \quad \left|\left|\hat{U}\left(\mathbf{x} - \mathbf{y}\right)\right|\right| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

*In altri termini, una trasformazione unitaria conserva le distanze. Da qui il nome di **isometria**.*

***

In una qualunque base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ un operatore unitario è rappresentato da una **matrice unitaria**:

$$U = (a_{ik})$$

L'operatore aggiunto è invece rappresentato dalla trasposta coniugata:

$$U^{+} = (b_{ik})\,, \text{ essendo } b_{ik} = a_{ki}^{*}$$

Vediamo quali sono le proprietà di una matrice unitaria. Deve essere:

$$UU^{+} = \overline{1}$$

Cioè

$$UU^{+} = (\delta_{ij})$$

Esplicitando il prodotto righe per colonne:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}^{*} = \delta_{ij}$$

Quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^{2} = 1, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Cioè la somma del quadrato dei moduli degli elementi di una colonna è pari a 1.
Inoltre:

$$U^+U = \overline{1}$$

Cioè

$$U^+U = (\delta_{ij})$$

Esplicitando il prodotto righe per colonne:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^{*}a_{kj} = \delta_{ij}$$

Quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2 = 1, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Cioè la somma del quadrato dei moduli degli ementi di una riga è pari a 1.
Riassumendo, assegnata la matrice unitaria:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

U verifica le seguenti proprietà:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 = 1, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$
$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2 = 1, \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Proposizione 183 *Sia $\hat{U}$ operante sullo spazio unitario E. Se $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base ortonormale:*

$$\left(\left\{\hat{U}\mathbf{e}_i\right\} \text{ è una base ortonormale}\right) \Longleftrightarrow \left(\hat{U} \text{ è unitario}\right)$$

Dimostrazione. Implicazione inversa

$$\hat{U} \text{ è unitario} \Longrightarrow \left\langle \hat{U}\mathbf{e}_i, \hat{U}\mathbf{e}_j \right\rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij} \Longrightarrow \left\{\hat{U}\mathbf{e}_i\right\} = \text{base o.n.}$$

Implicazione diretta
Per ipotesi è:

$$\left\langle \hat{U}\mathbf{e}_i, \hat{U}\mathbf{e}_j \right\rangle = \delta_{ij}$$

Esplicitiamo il primo membro:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{e}_k, \sum_{k'=1}^{n} a_{k'j}\mathbf{e}_{k'} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{k'=1}^{n} a_{k'i}a_{k'j}^{*}\delta_{kk'} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}^{*}$$

Quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}^{*} = \delta_{ij} \Longrightarrow (U = (a_{ik}) \text{ matrice unitaria}) \Longrightarrow \left(\hat{U} \text{ operatore unitario}\right)$$

■

Proposizione 184 *Gli autovalori di un operatore unitario hanno modulo pari a 1.*

Dimostrazione. Scriviamo l'equazione agli autovalori per l'operatore unitario $\hat{U}$:

$$\hat{U}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

Deve essere:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \left\langle \hat{U}\mathbf{x}, \hat{U}\mathbf{x} \right\rangle = \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle = \lambda\lambda^{*} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \underset{\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda\lambda^{*} = 1 \Longrightarrow |\lambda| = 1$$

■

Definizione 185 *Sia E uno spazio vettoriale sul campo K e H un suo sottospazio. Se $\hat{X} \in End\,(E)$:*

$$\left. H \text{ è } \textbf{invariante} \text{ per } \hat{X} \right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\forall \mathbf{x} \in H, \ \left(\hat{X}\mathbf{x}\right) \in H \right.$$

Proposizione 186 *Sia E uno spazio unitario e W un suo sottospazio.*

$$\left. W \text{ è invariante per } \hat{A} \in End\,(E) \right) \Longrightarrow \left(W^{\perp} \text{ è invariante per } \hat{A}^{+} \right.$$

Dimostrazione. Per definizione di complemento ortogonale:

$$\mathbf{y} \in W^{\perp} \Longrightarrow \forall \mathbf{x} \in W, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

Per ipotesi W è invariante per $\hat{A}$:

$$\forall \mathbf{y} \in W^{\perp}, \ \ 0 = \left\langle \hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \hat{A}^{+}\mathbf{y} \right\rangle \Big) \Longrightarrow \forall \mathbf{y} \in W^{\perp}, \ \left(\hat{A}^{+}\mathbf{y}\right) \in W^{\perp}$$

■

7.4 Operatori normali

Definizione 187 *Sia $\hat{A} \in End\,(E)$, con E spazio vettoriale unitario.*

$$\left. \hat{A} \text{ è } \textbf{\textit{normale}} \right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\hat{A}\,\hat{A}^{\,+} = \hat{A}^{\,+}\hat{A} \right.$$

In altri termini, un operatore è normale se commuta con il proprio aggiunto.

Proposizione 188 *Sia $\hat{A}$ un operatore normale operante sullo spazio unitario E. Se λ è autovalore di $\hat{A}$:*

$$\forall \mathbf{x} \in E\,(\lambda)\,, \ \ \hat{A}^{+}\mathbf{x} = \lambda^{*}\mathbf{x}$$
$$E\,(\lambda) \ \text{ è invariante per } \hat{A}^{+}$$

Dimostrazione.

$$\forall \mathbf{x} \in E(\lambda), \; \hat{A}\left(\hat{A}^{+}\mathbf{x}\right) = \left(\hat{A}\hat{A}^{+}\right)\mathbf{x} = \left(\hat{A}^{+}\hat{A}\right)\mathbf{x} = \hat{A}^{+}\lambda\mathbf{x} = \lambda\left(\hat{A}^{+}\mathbf{x}\right) \Longrightarrow \left(\hat{A}^{+}\mathbf{x}\right) \in E(\lambda),$$

cioè $E(\lambda)$ è invariante per $\hat{A}^{+}$.

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E(\lambda) \Longrightarrow \left\langle \hat{A}^{+}\mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y} \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} \rangle = \langle \lambda^{*}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \Longrightarrow \hat{A}^{+}\mathbf{x} = \lambda^{*}\mathbf{x}$$

■

Teorema 189

$$\left(\hat{A} \textit{ ammette una base o.n. di autovettori}\right) \Longleftrightarrow \left(\hat{A} \textit{ è normale}\right)$$

Dimostrazione. Implicazione diretta
Sia $\{\mathbf{e}_i\}$ una base o.n. di autovettori ($i = 1, 2, ..., n = \dim E$):

$$\hat{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$$

Quindi la matrice rappresentativa nella suddetta base:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice rappresentativa dell'aggiunto:

$$A^{+} = (A^{*})^{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{*} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{*} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^{*} \end{pmatrix}$$

A e A^{+} commutano:

$$AA^{+} = A^{+}A \Longrightarrow \hat{A}\hat{A}^{+} = \hat{A}^{+}\hat{A}$$

Implicazione inversa
$K = \mathbb{C} \Longrightarrow \exists \lambda \mid \lambda$ è autovalore per $\hat{A}$. Indicando con $\mathbf{u}_1$ l'autovettore:

$$\hat{A}\mathbf{u}_1 = \lambda \mathbf{u}_1$$

Se $E(\lambda)$ è il corrispondente autospazio, si ha che $\dim E(\lambda) = r$ che è il grado di degenerazione di λ. Naturalmente $E(\lambda) \subseteq E$. Se risulta $E(\lambda) = E$, segue che $r = n$, cioè l'autovalore λ è degenere n volte:

$$\begin{aligned} \hat{A}\mathbf{u}_1^{(1)} &= \lambda \mathbf{u}_1^{(1)} \\ \hat{A}\mathbf{u}_1^{(2)} &= \lambda \mathbf{u}_1^{(2)} \\ &... \\ \hat{A}\mathbf{u}_1^{(n)} &= \lambda \mathbf{u}_1^{(n)} \end{aligned}$$

Il sistema $\left\{\mathbf{u}_1^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, ..., \mathbf{u}_1^{(n)}\right\}$ compone una base di E. Tale base può essere ortonormalizzata attraverso il procedimento di Gram-Schmidt, per cui il teorema è dimostrato. Consideriamo ora $E(\lambda) \subset E$, per cui $\dim E(\lambda) = r < n$.
Il complemento ortogonale $E^{\perp}(\lambda)$ è tale che $\dim E^{\perp}(\lambda) = n - r$.
Se $r > 1$ l'autovalore λ è degenere r volte. Procediamo per induzione, ponendo inizialmente $r = n - 1$, donde $\dim E^{\perp}(\lambda) = 1$:

$$\exists \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_{n-1}\} = \text{base o.n. di } E(\lambda)$$
$$\exists \{\mathbf{e}_n\} = \text{base di } E^{\perp}(\lambda) \text{ con } ||\mathbf{e}_n|| = 1$$

Osserviamo innanzitutto che per definzione di complemento ortogonale:

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i \rangle = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, ..., n-1 \tag{7.7}$$

Inoltre, dalla proposizione 188 sappiamo che $E(\lambda)$ è invariante per $\hat{A}^{+}$, e dalla proposizione 186 segue che $E^{\perp}(\lambda)$ è invariante per $\left(\hat{A}^{+}\right)^{+} = \hat{A}$. Quindi:

$$\mathbf{e}_n \in E^{\perp}(\lambda) \Longrightarrow \left(\hat{A}\mathbf{e}_n\right) \in E^{\perp}(\lambda) \underset{\dim E^{\perp}(\lambda)=1}{\Longrightarrow} \exists \mu \in \mathbb{C} \mid \hat{A}\mathbf{e}_n = \mu \mathbf{e}_n \tag{7.8}$$

Da (7.7) e (7.8):

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_{n-1}\} \cup \{\mathbf{e}_n\} = \text{base o.n. di autovettori di } \hat{A}$$

L'asserto segue per induzione per ogni valore di $r = n-2, n-3, ..., 1$. ■

Corollario 190 *Gli operatori unitari e autoaggiunti sono diagonalizzabili.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema precedente, giacché si tratta di operatori normali. ■

Teorema 191 *Sia $\hat{A}$ un operatore normale operante nello spazio unitario E_n finito-dimensionale. Se λ_i $(i = 1, 2, ..., r)$ sono gli autovalori di $\hat{A}$, abbiamo*

$$\begin{aligned} &E(\lambda_i) \perp E(\lambda_j), \quad \textit{con } i \neq j \\ &E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_r) \\ &\hat{A} = \lambda_1 \hat{P}_1 + \lambda_2 \hat{P}_2 + ... + \lambda_r \hat{P}_r, \end{aligned} \tag{7.9}$$

qui $\hat{P}_i$ è l'operatore di proiezione ortogonale:

$$\hat{P}_i : \mathbf{x} \in E \longmapsto \mathbf{u} \in E(\lambda_i)$$

Dimostrazione. Presi ad arbitrio $\mathbf{u} \in E(\lambda_i)$, $\mathbf{v} \in E(\lambda_j)$ con $i \neq j$:

$$\lambda_i \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \hat{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}, \hat{A}^{+}\mathbf{v} \right\rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda_j^{*}\mathbf{v} \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$
$$\Longrightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \underset{\lambda_i \neq \lambda_j}{\Longrightarrow} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Quindi:

$$\forall \mathbf{u} \in E(\lambda_i), \forall \mathbf{v} \in E(\lambda_j), \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Longrightarrow E(\lambda_i) \perp E(\lambda_j), \text{ con } i \neq j$$

Cioè la prima delle (7.9) (autospazi corrispondenti ad autovalori distinti, sono ortogonali) Per dimostrare la seconda, osserviamo che:

$$\mathbf{x} \in E \Longrightarrow \exists \mathbf{u}_i \in E(\lambda_i) \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}_i,$$

cioè:

$$E = E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + ... + E(\lambda_r) \tag{7.10}$$

Inoltre:

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{u}_i \in E(\lambda_i) \Longrightarrow \mathbf{u}_i \notin E(\lambda_{j\neq i})$$

Quindi

$$E(\lambda_i) \cap E(\lambda_{j\neq i}) = \{\mathbf{0}\} \tag{7.11}$$

Da (7.10) e (7.11):

$$E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_r)$$

cioè la seconda delle (7.9). La terza segue direttamente dalla definizione di operatore di proiezione ortogonale. ■

Esempio 192 *Sia $\hat{A} \in End(E_4)$ rappresentato dalla matrice:*

$$A = diag(2, 3, 4, 1)$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = 4, \ \lambda_4 = 1$$

I corrispondenti autospazi sono unidimensionali: $\dim E(\lambda_i) = 1$. *Gli autovettori:*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{u}_2 &= (0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{u}_3 &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{u}_4 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} E(\lambda_1) &= \{a\mathbf{u}_1 \mid a \in \mathbb{R}\} \\ E(\lambda_2) &= \{b\mathbf{u}_2 \mid b \in \mathbb{R}\} \\ E(\lambda_3) &= \{c\mathbf{u}_3 \mid c \in \mathbb{R}\} \\ E(\lambda_4) &= \{d\mathbf{u}_4 \mid d \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Gli operatori di proiezione ortogonale sugli autospazi:

$$\hat{P}_1 \doteq diag\,(1,0,0,0)$$
$$\hat{P}_2 \doteq diag\,(0,1,0,0)$$
$$\hat{P}_3 \doteq diag\,(0,0,1,0)$$
$$\hat{P}_4 \doteq diag\,(0,0,0,1)$$

Evidentemente:

$$\sum_{i=1}^{4} \hat{P}_i = \hat{1}$$
$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \hat{P}_i = \hat{A}$$

Esempio 193 *Sia $\hat{A} \in End\,(E_4)$ rappresentato dalla matrice:*

$$A = diag\,(2,2,4,1)$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 2, \ , \ \lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = 1$$

Si osservi che λ_1 è degenere 2 volte.
I corrispondenti autospazi sono tali che: $\dim E\,(\lambda_1) = 2$, $\dim E\,(\lambda_{i>1}) = 1$. *Gli autovettori:*

$$\mathbf{u}_1^{(1)} = (1,0,0,0)$$
$$\mathbf{u}_1^{(2)} = (0,1,0,0)$$
$$\mathbf{u}_2 = (0,0,1,0)$$
$$\mathbf{u}_3 = (0,0,0,1)$$

Quindi:

$$E\,(\lambda_1) = \left\{ a\mathbf{u}_1^{(1)} + b\mathbf{u}_1^{(2)} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$E\,(\lambda_2) = \{ c\mathbf{u}_1 \mid c \in \mathbb{R} \}$$
$$E\,(\lambda_3) = \{ d\mathbf{u}_1 \mid d \in \mathbb{R} \}$$

Gli operatori di proiezione ortoganale sugli autospazi:

$$\hat{P}_1 \doteq diag\,(1,1,0,0)$$
$$\hat{P}_2 \doteq diag\,(0,0,1,0)$$
$$\hat{P}_3 \doteq diag\,(0,0,0,1)$$

Evidentemente:

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{P}_i = \hat{1}$$
$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \hat{P}_i = \hat{A}$$

Capitolo 8

Spazi vettoriali euclidei (2ˆ parte)

Le nozioni precedenti (trasformazioni unitarie e operatori normali) si estendono al caso di uno spazio euclideo E.

Definizione 194 *L'operatore $\hat{A} \in End(E)$ è **ortogonale** se risulta:*

$$\hat{A}\hat{A}^{+} = \hat{A}^{+}\hat{A} = \hat{1}$$

Osserviamo che la matrice rappresentativa dell'operatore aggiunto è $A^{+} = \left(A^{T}\right)^{*} = A^{T}$, essendo reali gli elementi di A. Quindi

Definizione 195 *Una matrice A è **ortogonale** se:*

$$AA^{T} = A^{T}A = \bar{1}$$

In altre parole, una matrice è ortogonale se l'inversa coincide con la trasposta.

Sussistono le proprietà delle matrici unitarie. Precisamente, la conservazione del prodotto scalare e delle distanze. Inoltre, se $A = (a_{ik})$:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|^{2} = 1, \ \ k = 1, 2, ..., n$$
$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^{2} = 1, \ \ i = 1, 2, ..., n$$

Esempio 196 *Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali $R(0xyz)$ in $\mathbb{R}^{3}$. Eseguendo una rotazione attorno all'asse z di un angolo θ, si passa da $R(0xyz)$ a $R'(0x'y'z')$. Tale trasformazione di coordinate è realizzata da un operatore $\hat{\mathcal{R}}(\theta) \in End(\mathbb{R}^{3})$:*

$$\hat{\mathcal{R}}_{z}(\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{x}'$$

Qui è $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{x}' = (x', y', z')$, con:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}$$

La matrice rappresentativa di $\hat{\mathcal{R}}_z(\theta)$ nella base canonica, è:

$$\mathcal{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}(\theta)$ è ortogonale:

$$\mathcal{R}_z(\theta)\,\mathcal{R}_z(\theta)^T = \mathcal{R}_z(\theta)^T\,\mathcal{R}_z(\theta) = \bar{1}$$

Tale risultato si generalizza ai rimanenti assi coordinati x e y, e quindi a qualsiasi asse passante per l'origine, per cui una rotazione è una trasformazione ortogonale delle coordinate dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.

Parte III

Appendici

Appendice A

Soluzioni degli esercizi proposti

A.1 Operazioni sulle matrici e calcolo di determinanti del secondo ordine

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{21} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B - D = \begin{pmatrix} -p-2 & -q \\ 4-r & -1-s \\ 9-t & 9-u \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A + B - D = 0 \Longleftrightarrow (p = -2, q = 0, r = 4, s = -1, t = 9, u = 9)$$

cioè:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

***

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + (B - C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) - C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

ed è tale che:

$$A + D = B$$

Ciò implica:

$$\begin{pmatrix} 1 + x_1 & 2 + x_2 & -2 + x_3 \\ 5 + x_4 & x_5 & 2 + x_6 \\ 1 + x_7 & -1 + x_8 & 1 + x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\begin{aligned} 1 + x_1 &= 3 \\ 2 + x_2 &= -1 \\ -3 + x_3 &= 2 \\ 5 + x_4 &= 4 \\ 2 + x_6 &= 5 \\ 1 + x_7 &= 2 \\ -1 + x_8 &= 0 \\ 1 + x_9 &= 3 \end{aligned}$$

Quindi:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-(A-B)=-\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

***

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-3\cdot 1=5;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+1=5;\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}=\sin^2\alpha+\cos^2 a=1;$$

$$\begin{vmatrix} \alpha+i\beta & \gamma+i\delta \\ \gamma-i\delta & \alpha-i\beta \end{vmatrix}=\alpha^2+\beta^2-\left(\gamma^2+\delta^2\right)=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos a=\sin(\alpha-\beta)$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha=\cos(\alpha+\beta)$$

$$\begin{vmatrix} \tan\alpha & -1 \\ 1 & \tan\beta \end{vmatrix}=\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}=1-\lg_a b\lg_b a \underset{(\lg_a b=\lg_b a)}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}=ac+bd-ab-cd=a(c-b)+d(b-c)$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a-b \end{vmatrix}=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2=4ab$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}=(x-1)\left(x^2+x+1\right)-x^3=x^3-1-x^3=-1$$

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}=\omega^2+\omega=\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

A.2 Determinanti del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(0+1) + (1+1) = +1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(0-1) + (1-0) = +1+1 = 2$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} &= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & x \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+x \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} \\ &= a^2 \left(\begin{vmatrix} 2 & a+x \\ -1 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & a+x \end{vmatrix} \right) \\ &= 2a^2 (a+x) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-i) \begin{vmatrix} i & 1+i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1+i)(1-i) = -2$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix} - \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} & 1 \\ \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} \end{vmatrix} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{i}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}}{\sqrt{2}} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right] + \left(-1 - \frac{1+i}{2}\right) \\ &= -1 - \frac{1-i}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} = -2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\Delta \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = -\omega \left(\omega^3 - 3\omega + 2\right)$$

per $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$:

$$\Delta = -3i\sqrt{3}$$

A.3 Determinanti di ordine qualsiasi

Si tratta di determinare gli zeri della funzione $f(x)$. Lo sviluppo del determinante porge:

$$f(x) = x^2 - x - 8,$$

donde:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{33}\right)$$

***

Per una nota proprietà, il determinante di una matrice diagonale è pari al prodotto degli elementi della diagonale principale, donde:

$$\det A_{diag} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$$

***

Il calcolo diretto di $\Delta(n)$ (eq. 1.55) porge:

$$\Delta(2) = -1,\ \Delta(3) = -1,\ \Delta(4) = 1,\ \Delta(5) = 1,\ \Delta(6) = -1$$

Da ciò segue che:

$$\Delta(n) = (-1)^{k(n)},$$

essendo $k(n)$ tale che:

$$k(n) = \begin{cases} \text{dispari}, & n = 2 \\ \text{dispari}, & n = 3 \\ \text{pari}, & n = 4 \\ \text{pari}, & n = 5 \\ \text{dispari}, & n = 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{A.1}$$

La (A.1) implica che $k(n)$ deve essere del tipo:

$$k(n) = an^2 + bn \tag{A.2}$$

Affinchè sia valida la (A.1):

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 1 \\ 9a + 3b &= 3, \end{aligned}$$

da cui:

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow k(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Si conclude:

$$\Delta(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

***

Il calcolo diretto di $\Delta(n)$ (eq. 1.56) porge:

$$D(2) = 2,\ D(3) = 6,\ D(4) = 24,\quad D(5) = 120,\quad D(6) = 720$$

Da ciò segue:

$$D(n) = nD(n-1)$$

Quindi:

$$D(n) = n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot 1 = n!$$

***

Calcoliamo direttamente $F(n)$ per $n = 2, 3$. La (1.57) è:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x(x-1) \\ f_3(x) &= x(x-1)(x-2) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F(2) &= \begin{vmatrix} f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) \\ f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) \\ f_2(2) & f_2(3) & f_2(4) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} = -8; \\ F(3) &= \begin{vmatrix} f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) \\ f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) \\ f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) & f_3(5) \\ f_3(3) & f_3(4) & f_3(5) & f_3(6) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \\ 0 & 3 & 24 & 60 \\ 3 & 24 & 60 & 120 \end{vmatrix} = 1296 \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
(2!)^3 &= 8 \\
(3!)^4 &= 1296
\end{aligned}
$$

donde:

$$|F(n)| = n!^{n+1}$$

Inoltre:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \end{cases}$$

Quindi:

$$F(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!^{n+1}$$

***

Eseguiamo il calcolo esplicito per $n = 2$:

$$G(x,2) = \begin{vmatrix} f_2(x) & f_2'(x) & f_2''(x) \\ f_2'(x) & f_2''(x) & f_2'''(x) \\ f_2''(x) & f_2'''(x) & f_2^{(4)}(x) \end{vmatrix}$$

Dalla prima delle (A.3):

$$f_2'(x) = 2x - 1;\ f_2''(x) = 2;\ f_2'''(x) = f_2^{(4)}(x) = 0$$

Quindi:

$$G(x,2) = \begin{vmatrix} x^2 - x & 2x-1 & 2 \\ 2x-1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Eseguiamo il calcolo esplicito per $n = 3$:

$$G(x,3) = \begin{vmatrix} f_3(x) & f_3'(x) & f_3''(x) & f_3'''(x) \\ f_3'(x) & f_3''(x) & f_3'''(x) & f_3^{(4)}(x) \\ f_3''(x) & f_3'''(x) & f_3^{(4)}(x) & f_3^{(5)}(x) \\ f_3'''(x) & f_3^{(4)}(x) & f_3^{(5)}(x) & f_3^{(6)}(x) \end{vmatrix}$$

Dalla seconda delle (A.3):

$$
\begin{aligned}
f_3'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\
f_3''(x) &= 6(x-1) \\
f_3'''(x) &= 6 \\
f_3^{(r)}(x) &= 0,\ (r = 4, 5, ...)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$G(x,3)=\begin{vmatrix} x(x-1)(x-2) & 3x^2-6x+2 & 6(x-1) & 6 \\ 3x^2-6x+2 & 6(x-1) & 6 & 0 \\ 6(x-1) & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1296$$

Si conclude che: 1) $G(x,n)\equiv G(n)$; 2) $G(n)=F(n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!^{n+1}$.

***

Risolviamo la (1.58) per alcuni valori di n. Per $n=1$ la soluzione è immediata:

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow x-a_1=0\Longleftrightarrow x=a_1$$

Per $n=2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow (x-a_1)(x-a_2)(a_2-a_1)=0\Longleftrightarrow x=a_1,a_2$$

Per $n=3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow (x-a_1)(x-a_2)(a_2-a_1)(a_3-a_1)=0\Longleftrightarrow x=a_1,a_2,a_3$$

Per ogni $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & ... & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1}(x-a_k)=0\Longleftrightarrow x=a_1,a_2,...,a_n$$

***

La (1.59) per $n=2$ si scrive:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow x=0$$

Per $n=3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow x(x-1)=\Longleftrightarrow x=0,1$$

Per $n = 4$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x\left(x^2-3x+2\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 1, 2$$

Per $n = 5$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x\left(x^3-6x^2+11x-6\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 1, 2, 3$$

Si conclude che (1.59) è un'equazione di grado $n-1$, le cui soluzioni sono:

$$x = 0, 1, 2, ..., n-2$$

***

Risolviamo la (1.60) per $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1+a_2-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_1\left(a_1-x\right) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1$$

Per $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_1\left(a_1-x\right)\left(a_2-x\right) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1,a_2$$

Per $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3+a_4-x \end{vmatrix}$$
$$= a_1\left(a_1-x\right)\left(a_2-x\right)\left(a_3-x\right) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1,a_2,a_3$$

Per $n = 4$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_2+a_3-x & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & a_3+a_4-x \end{vmatrix}$$
$$= a_1\left(a_1-x\right)\left(a_2-x\right)\left(a_3-x\right) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1,a_2,a_3,a_4$$

Per ogni n:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} a_k (a_k - x) = 0 \Longleftrightarrow x = a_k, \quad (k = 1, 2, ..., n-1)$$

***

Il determinante (1.61) è nullo, in quanto la terza colonna è combinazione lineare delle prime due. Infatti:

$$\alpha^2 + 6\alpha + 9 = C_1\alpha^2 + C_2 \left(\alpha^2 + 2\alpha + 1\right) + C_3 \left(\alpha^2 + 4\alpha + 4\right),$$

da cui:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ 0 + 2C_2 + 4C_3 &= 6 \\ 0 + C_2 + 4C_3 &= 9 \end{aligned}$$

Tale sistema lineare è compatibile e determinato:

$$(C_1, C_2, C_3) = (1, 6, 9)$$

Quindi:

$$(k+3)^2 = k^2 - 3(k+1)^2 + 3(k+2), \quad k = \alpha, \beta, \gamma,$$

da cui l'annullarsi del determinante.

***

La matrice complementare della (1.62) relativa all'elemento 11 è la matrice diagonale di ordine $n-1$:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Il complemento algebrico dell'elemento 11 è:

$$\alpha_{11} = (-1)^2 M_{11},$$

essendo:

$$M_{11} = \det A_{11} = \prod_{k=2}^{n} a_k$$

È facile rendersi conto che:

$$M_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j,$$

poiché ogni A_{ij} con $i \neq j$ ha una riga nulla. Ad esempio:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

quindi:

$$\alpha_{22} = M_{22} = \det A_{22} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{n} a_k$$

Si conclude che:

$$\alpha_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j$$
$$\alpha_{ii} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_k$$

Passando alla somma dei complementi algebrici:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_k \\ &= a_2 a_3 ... a_n + a_1 a_3 ... a_n + ... + a_1 a_2 ... a_{n-1} \\ &= a_1 a_2 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right) \end{aligned}$$

***

È conveniente eseguire il calcolo diretto per $n = 3$. La matrice (1.63) è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{11} = 0$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{12} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = -a_2 a_3 \Longrightarrow \alpha_{13} = -b_2 b_3$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{22} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = -a_1 a_3 \Longrightarrow \alpha_{22} = 0$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{23} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = -a_1 a_2 \Longrightarrow \alpha_{31} = -a_1 a_2$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{32} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{33} = 0$$

Sommando:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij} = -(a_1 a_2 a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2}\right)$$

Per ogni n:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} = (-1)^n a_1 a_2 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$

***

Sviluppando (1.64):

$$\begin{aligned}\Delta &= a\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+3} - b\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+1} \\ &= +c\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+2} - d\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1} \\ &= 3a - b + 2c - d\end{aligned}$$

***

Sviluppando (1.65):

$$\begin{aligned}\Delta &= -x\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=+1} + y\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=-1} + z\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + 4\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{4} \\ &= 4t - (x + y + z)\end{aligned}$$

***

Sviluppando (1.66):

$$\begin{aligned}\Delta &= a\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+2} - b\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+1} + c\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-1} - d\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \\ &= 2a - b + c - d\end{aligned}$$

***

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix}$; è conveniente eseguire il calcolo diretto per alcuni significativi valori dell'intero naturale n:

$n = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 = 2!$

$n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 = 3!$

$n=4$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 24 = 6!$

$n=5$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 120 = 5!$

Si conclude che per ogni n, il determinante vale $n!$.

18. Anche qui è conveniente calcolare per assegnati n:

$n=2$: $\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = b_1$

$n=3$: $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2$

$n=4$: $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = b_1 b_2 b_3$

Si conclude che $D(n) = \prod_{k=1}^{n} b_k$

19. Esplicitando per i vari n:

$n=2$; $f_2(x;x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x - x_1$

$n=3$; $f_3(x;x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x & x_2 \\ 1 & x_1 & x \end{vmatrix} = (x-x_1)(x-x_2)$

$n=4$; $f_4(x;x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x & x_2 & x_3 \\ 1 & x_1 & x & x_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x \end{vmatrix} = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Si conlude che:

$$f_n(x;x_1,x_2,...,x_n) = \prod_{k=1}^{n} (x-x_k)$$

20. Esplicitiamo (1.67) per diversi valori di n:

$$\Delta(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$
$$\Delta(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2$$
$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$$
$$\Delta(5) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 24$$

Si conclude che $\Delta(n) = (n-1)!$

21. Esplicitiamo (1.68) per diversi valori di n:

$$\Delta(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$
$$\Delta(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$
$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$$
$$\Delta(5) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

Si conclude che $\Delta(n) = -2(n-2)!$

22. Risulta:

$$n = 1 \Longrightarrow \phi(b_1) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ -1 & 1-b_1 \end{vmatrix} = 1$$

$$n = 2 \Longrightarrow \phi(b_1, b_2) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 \\ 0 & -1 & 1-b_2 \end{vmatrix} = 1$$

$$n=3 \Longrightarrow \phi\left(b_1,b_2,b_3\right)=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_2 \end{vmatrix}=1$$

Da ciò segue:

$$\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}, \quad \phi\left(b_1,b_2,...,b_n\right)=1$$

23. Risulta:

$$\Delta(2)=\begin{vmatrix} a & a+h \\ -a & a \end{vmatrix}=a(2a+h)$$
$$\Delta(3)=\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{vmatrix}=3a^2(a+h)$$
$$\Delta(4)=\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & a+3h \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix}=2a^3(2a+3h)$$
$$\Delta(5)=\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & a+3h & a+4h \\ -a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix}=5a^4(a+2h)$$

Da ciò segue che:

$$\Delta(n)=a^{n-1}f_n$$

Deve essere:

$$f_2=2a+h$$
$$f_3=3(a+h)=3\left(a+\frac{3-1}{2}h\right)$$
$$f_4=4\left(2a+\frac{3}{2}h\right)$$
$$f_5=5(a+2h)=5\left(a+\frac{5-1}{2}h\right)$$
$$...$$
$$f_n=n\left(a+\frac{n-1}{2}h\right),$$

cioè:

$$\Delta(n)=na^{n-1}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)$$

24. Per $n = 4$:

$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 \\ a_3 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

Per ogni n:

$$\Delta(n) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + ... + a_3$$

25. Per $n = 4$:

$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Per ogni n:

$$\Delta(n) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

26. Il determinante (1.72) è:

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{r_1} \alpha_{1k}a_1^k & \sum_{k=1}^{r_1} \alpha_{1k}a_2^k & ... & \sum_{k=1}^{r_1} \alpha_{1k}a_n^k \\ \sum_{k=1}^{r_2} \alpha_{2k}a_1^k & \sum_{k=1}^{r_2} \alpha_{2k}a_2^k & ... & \sum_{k=1}^{r_2} \alpha_{2k}a_n^k \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_{nk}a_1^k & \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_{nk}a_2^k & ... & \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_{nk}a_n^k \end{vmatrix}, \tag{A.4}$$

poiché:

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^{r_k} \alpha_{hk}x^h, \quad h = 1, 2, ..., n$$

Per una nota proprietà dei determinanti, la (A.4) può essere scritta come:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}a_1 & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\ \alpha_{21}a_1 & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}a_1 & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_{12}a_1^2 & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\ \alpha_{22}a_1^2 & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n2}a_1^n & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} \alpha_{1r_1}a_1^{r_1} & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\ \alpha_{2r_1}a_1^{r_1} & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{nr_1}a_1^{r_1} & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1}\left[a_1^k \begin{vmatrix} \alpha_{1k} & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\ \alpha_{2k} & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{nk} & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k \end{vmatrix} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1}\sum_{k=1}^{r_2}\dots\sum_{k=1}^{r_n} a_1^k a_2^k \dots a_n^k \begin{vmatrix} \alpha_{1k} & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{nk} & \alpha_{nk} & \dots & \alpha_{nk} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \sum_{k=1}^{r_1}\sum_{k=1}^{r_2}\dots\sum_{k=1}^{r_n} a_1^k a_2^k \dots a_n^k \alpha_{1k}\alpha_{2k}\dots\alpha_{nk}$$

$$= 0$$

27. Per $n = 1, 2, 3$:

$$n = 1 \Longrightarrow f(x_1; y_1) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ -y_1 & x_1 \end{vmatrix} = a_0x_1 + a_1y_1$$

$$n = 2 \Longrightarrow f(x_1, x_2; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -y_1 & x_1 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 \end{vmatrix} = a_0x_1x_2 + a_1x_2y_1 + a_2y_1y_2$$

$$n = 3 \Longrightarrow f(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -y_1 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_0x_1x_2x_3 + a_1x_2x_3y_1 + a_2x_3y_1y_2 + a_3y_1y_2y_3$$

Per tutti gli n:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{h=0}^{n} a_k \prod_{k=1}^{h} y_k \prod_{j=h+1}^{n} x_j$$

28. Per $n = 1, 2, 3$:

$$f_1(x) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} = a_0x$$

$$f_2(x) = \begin{vmatrix} 2a_0 & a_1 & 0 \\ -2 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 2\left(a_0x^2 + 2a_1\right)$$

$$f_3(x) = \begin{vmatrix} 6a_0 & 2a_1 & a_2 & a_3 \\ -3 & x & 0 & 0 \\ 0 & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 3!\left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_0\right)$$

Per tutti gli n:

$$f_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} a_k x^{3-k}$$

29. Esplicitiamo (1.75):

$$
\begin{aligned}
&D(1)=2\\
&D(2)=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3\\
&D(3)=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=4\\
&D(4)=\begin{vmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=5\\
&D(5)=\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}=6\\
&...\\
&D(n)=n+1
\end{aligned}
$$

30. Esplicitiamo l'espressione analitica della (1.76) per vari n:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x)=2\cos x\\
&f_2(x)=\begin{vmatrix}2\cos x&1\\1&2\cos x\end{vmatrix}=4\cos^2 x-1\\
&f_3(x)=\begin{vmatrix}2\cos x&1&0\\1&2\cos x&1\\0&1&2\cos x\end{vmatrix}=-4\cos x+8\cos^3 x
\end{aligned}
$$

Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
4\cos^2 x-1&=\frac{\sin 3x}{\sin x}\\
-4\cos x+8\cos^3 x&=\frac{\sin 4x}{\sin x}
\end{aligned}
$$

Ciò implica:

$$
f_n(x)=\frac{\sin\left[(n+1)x\right]}{\sin x}
$$

Il grafico è riportato in figura A.1

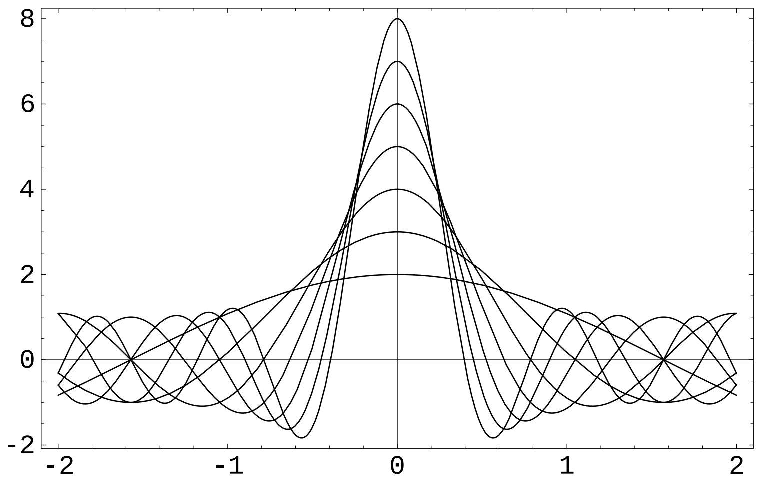

Figura A.1: Grafico di $f_n(x)$ per $n = 1, 2, 3, ..., 7$.

31. Esplicitiamo l'espressione analitica della (1.77) per vari n:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \cos x \\
f_2(x) &= \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x - 1 \\
f_3(x) &= \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = -3\cos x + 4\cos^3 x
\end{aligned}
$$

Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
2\cos^2 x - 1 &= \cos 2x \\
-3\cos x + 8\cos^3 x &= \cos 3x
\end{aligned}
$$

Ciò implica:

$$
f_n(x) = \cos(nx)
$$

Il grafico è riportato in figura A.2

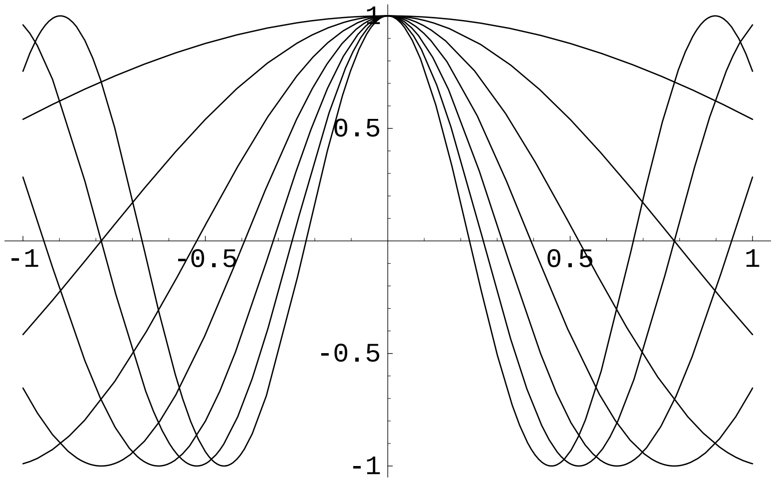

Figura A.2: Grafico di $f_n(x)$ per $n = 1, 2, 3, ..., 7$.

A.3.1 end