Università degli Studi di Cassino

Note su alcuni concetti di base dell'elettromagnetismo

Antonio Maffucci, Fabio Villone

Ver. 1 – settembre 2003

DEFINIZIONE DI CARICA E DI CORRENTE ELETTRICA

L'interazione elettromagnetica è alla base del funzionamento di un numero enorme di sistemi, utilizzati per svariate applicazioni, che vanno dal trasporto di energia, alla trasmissione di segnali, al controllo di processi. Le grandezze fisiche fondamentali coinvolte in questo meccanismo sono la ***carica*** e la ***corrente elettrica*** (quest'ultima concepita come movimento di cariche elettriche).

Nel seguito, assumiamo noto il concetto di carica elettrica: ricordiamo solo che nel Sistema Internazionale (SI) la carica si misura in Coulomb

$$[Q]=C$$

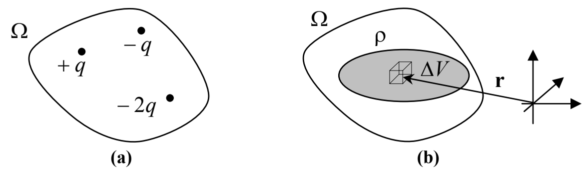
e che può assumere segno negativo o positivo. La carica elettrica è quantizzata: la carica elementare è quella del protone (*positiva*) e dell'elettrone (*negativa*), e vale in modulo

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}.$$

Nel seguito indicheremo con $Q(t)$ la carica totale *netta* compresa all'istante t in una certa regione di spazio Ω, cioè la somma algebrica della carica positiva $Q^{+}(t)$ e di quella negativa $Q^{-}(t)$ che al dato istante t si trovano nella regione considerata:

$$Q(t) = Q^{+}(t) - Q^{-}(t).$$

Le cariche possono essere distribuite in modo da risultare separate a livello *macroscopico*, nel qual caso si parla di *distribuzione di cariche puntiformi*: in questo caso $Q(t)$ non è altro che la sommatoria di tali cariche, ciascuna considerata col suo segno.



Distribuzione puntiforme (a) e continua (b) di carica elettrica.

Nel caso in cui, invece, la separazione si possa apprezzare solo a livello microscopico si parla di *distribuzione continua di carica* e si preferisce descriverla attraverso l'introduzione del concetto di ***densità di carica elettrica*** $\rho(\mathbf{r},t)$. Si tratta di un campo scalare che si può introdurre considerando la carica $Q_{\Delta V}$ contenuta in un volumetto elementare ΔV centrato nel punto individuato da $(\mathbf{r},t)$ e facendo tendere a zero ΔV [1]

$$\rho(\mathbf{r},t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{Q_{\Delta V}}{\Delta V}.$$

Da questa definizione consegue che la carica totale $Q(t)$ compresa all'istante t in una certa regione di spazio Ω è data dall'integrale di volume della densità di carica:

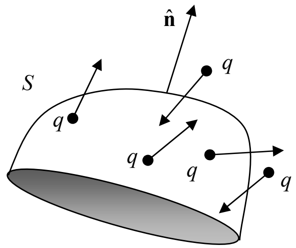
$$Q(t) = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r},t)\,dV.$$

Nel Sistema Internazionale la densità di carica si misura in Coulomb/m^3.

---

[1] Si osservi che tale limite va inteso in senso "fisico": ΔV deve tendere ad un valore molto piccolo rispetto alla distanze macroscopiche di interesse, ma sufficientemente grande da far sì che esso contenga da un numero elevato di cariche.

Si ha ***corrente elettrica*** quando le cariche si muovo con un moto ordinato[2]. Si consideri una superficie aperta S orientata arbitrariamente e si indichi con $Q_S(t;\Delta t)$ la carica totale netta che attraversa la superficie nell'intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$, dove t è un generico istante iniziale e Δt la durata dell'intervallo. Si tenga presente che la carica va conteggiata col segno positivo se attraversa la superficie con verso concorde al verso scelto per orientare la superficie stessa, con segno negativo nel caso opposto.



Flusso di cariche puntiformi attraverso una superficie orientata S .

L'***intensità media della corrente elettrica*** che attraversa la superficie orientata S nell'intervallo $(t, t+\Delta t)$ è definita come il rapporto

$$I_s = \frac{Q_S(t;\Delta t)}{\Delta t},$$

e, in generale, dipende da t e da Δt. L'intensità di corrente dipende solo da t se la lunghezza dell'intervallo di osservazione Δt viene fatto tendere da un valore *fisicamente infinitesimo*[3].

Per fare questa operazione, indichiamo con $Q_S(t_0, t)$ la carica la carica totale netta che attraversa la superficie nell'intervallo di tempo (t_0, t), essendo t_0 un arbitrario istante iniziale. Esprimendo la carica $Q_S(t;\Delta t)$ come

$$Q_S(t;\Delta t) = Q_S(t_0, t+\Delta t) - Q_S(t_0, t)$$

si può definire l'***intensità di corrente*** che attraversa la superficie orientata S nel generico istante t come il limite

$$i_s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q_S(t;\Delta t)}{\Delta t} = \frac{dQ_S(t_0, t)}{dt}.$$

In conclusione, l'intensità della corrente elettrica che attraversa la superficie orientata S al generico istante t è uguale alla derivata prima (rispetto al tempo) della carica elettrica netta che ha attraversato la superficie S nell'intervallo (t_0, t).

[2] Le cariche elettriche si muovono a livello microscopico, ma il loro moto è disordinato e la velocità media risulta essere nulla. Quando si parla di cariche in movimento ci si riferisce al caso di moto ordinato su scala macroscopica, caratterizzato cioè da una velocità media diversa da zero in una certa direzione, dovuta ad esempio ad una forza esterna agente sulle cariche.

[3] Cioè un valore molto piccolo rispetto alla scala dei tempi di interesse, ma sufficientemente grande da far sì che S sia attraversata da un numero elevato di particelle.

A sua volta, quindi, la carica netta $Q_S(t_0, t)$ che attraversa la superficie orientata S in un generico intervallo (t_0, t), con $t > t_0$, è data dall'integrale definito

$$Q_S(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} i_s(\tau)\,d\tau .$$

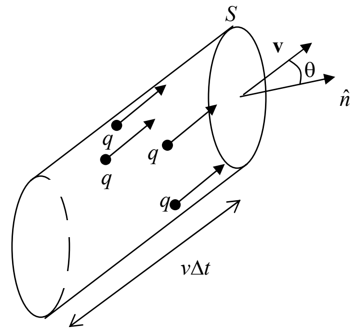
Nel Sistema Internazionale l'intensità della corrente elettrica si misura in *Ampère*

[i]=A,

da cui si deduce che il Coulomb è esprimibile come un ampère per un secondo (C = As): un *coulomb* è la carica netta che attraversa una generica superficie S nell'intervallo di un *secondo* quando l'intensità della corrente elettrica attraverso S è uguale a un *ampère*.

L'intensità della corrente elettrica attraverso una generica superficie orientata S può essere espressa in funzione delle grandezze che descrivono il moto macroscopico delle singole cariche, introducendo il campo vettoriale $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ detto ***densità di corrente elettrica.***

Per introdurre questo concetto si consideri il caso semplice di una distribuzione di cariche puntiformi q tutte della stessa specie (ad esempio gli elettroni liberi di un conduttore solido), che si muovono tutte con la stessa velocità macroscopica $\boldsymbol{v}$. Con riferimento alla figura seguente, valutiamo la carica $Q_S(t;\Delta t)$ che in un generico intervallo $(t, t+\Delta t)$ attraversa la superficie piana orientata S. E' evidente che tale carica sarà pari a quella contenuta nel cilindro che ha l'asse parallelo al vettore $\mathbf{v}$ ed altezza pari a $v\Delta t$. E' chiaro che, in generale, la superficie S non sarà ortogonale all'asse del cilindro: sia θ l'angolo che la normale $\hat{\mathbf{n}}$ alla superficie S forma con il vettore della velocità $\boldsymbol{v}$.



Cariche puntiformi che attraversano la superficie *S* con la stessa velocità.

Se con n indichiamo la *densità volumetrica di particelle* (cioè le cariche per unità di volume), allora

$$Q_S(t;\Delta t) = nqS\Delta t v \cos\theta,$$

che, tenuto conto della definizione di prodotto scalare tra due vettori, si può riscrivere come

$$Q_S(t;\Delta t) = nqS\Delta t\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} .$$

A questo punto, ricordando i passaggi logici che ci hanno portato a definire l'intensità di corrente, si può affermare che la corrente che attraversa S è pari a:

$$i(t) = nq\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} S .$$

E' possibile ora definire il vettore ***densità di corrente elettrica*** $\mathbf{J}$ come segue:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = nq\mathbf{v},$$

da cui si ricava che la corrente $i(t)$ non è altro che *il flusso del vettore* **J** *attraverso la superficie orientata S*.

Questi concetti, introdotti per questo esempio particolare, possono essere estesi al caso generale, in cui si debba valutare $i(t)$ che attraversa una qualsiasi superficie *S*, considerare una qualsiasi distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r},t)$ e di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. In tal caso si definisce

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t),$$

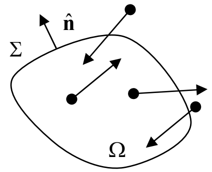
e quindi la corrente $i(t)$ è in generale data da:

$$i(t) = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S.$$

Nel sistema SI l'unità di misura della densità di corrente elettrica è [**J**] = A/m^2.

Principio di conservazione della carica elettrica.

Si consideri una qualsiasi superficie chiusa Σ e si indichi con Ω la regione da essa racchiusa. Si definisca $Q_\Omega(t)$ la carica racchiusa nella regione Ω in un certo istante *t*.



Conservazione della carica.

L'intensità della corrente elettrica $i_\Sigma(t)$ che all'istante *t* attraversa Σ nel verso uscente è per definizione, data da

$$i_\Sigma(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q_\Sigma(t;\Delta t)}{\Delta t}$$

dove $Q_\Sigma(t;\Delta t)$ è la carica elettrica netta che nell'intervallo di tempo infinitesimo $(t, t+\Delta t)$ attraversa la superficie orientata Σ. Assumendo che la carica non si possa creare né distruggere, le cariche elettriche che nell'intervallo $(t, t+\Delta t)$ attraversano Σ nel verso uscente si troveranno all'istante *t* nella regione Ω, mentre quelle che attraversano Σ nel verso entrante si troveranno nella regione Ω all'istante $t+\Delta t$. E' facile, quindi mostrare che

$$Q_\Sigma(t;\Delta t) = Q_\Omega(t) - Q_\Omega(t+\Delta t).$$

A questo punto, operando il limite per Δt si ottiene il ***principio di conservazione della carica***

$$i_\Sigma(t) = -\frac{dQ_\Omega(t)}{dt},$$

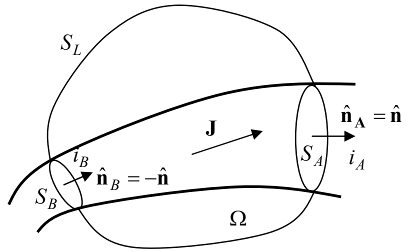
secondo il quale la corrente elettrica $i_\Sigma(t)$ uscente da Σ all'istante *t* uscente è uguale alla derivata prima, rispetto al tempo, della carica totale netta contenuta nel volume Ω cambiata di segno. Questo principio si può riformulare in termini di densità di carica e di corrente come segue:

$$\oiint_\Sigma \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_\Omega \rho(\mathbf{r},t)dV.$$

In condizioni *stazionarie*, cioè quando le grandezze elettriche non variano col tempo, si ha che la corrente che in un certo istante attraversa la superficie chiusa Σ è nulla[4]

$$i_\Sigma(t) = \oiint_\Sigma \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = 0.$$

Per comprendere meglio il significato di questo risultato è utile studiare l'esempio in figura, in cui si considera un conduttore attraversato da una corrente distribuita con una certa densità $\mathbf{J}$. In condizioni stazionarie le correnti $i_A(t)$ e $i_B(t)$ che attraversano due sezioni qualsiasi S_A e S_B del conduttore, orientate concordemente, risultano essere uguali.



La corrente che attraversa un conduttore in condizioni stazionarie non dipende dalla sezione scelta.

Consideriamo una superficie chiusa Σ che interseca il conduttore formando le sezioni S_A e S_B ed indichiamo con $S_L = \Sigma - (S_A \cup S_B)$ la restante parte della superficie. Orientiamo la superficie Σ scegliendo ovunque la normale uscente $\hat{\mathbf{n}}$. Per quanto detto prima si ha:

$$\oiint_\Sigma \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_A}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_B}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_L}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = 0.$$

Assumendo che il conduttore sia immerso nel vuoto, si ha intuitivamente $\mathbf{J} = 0$ all'esterno dello stesso conduttore, e quindi il flusso di $\mathbf{J}$. Come conseguenza si ha che

$$\iint_{S_A}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = -\iint_{S_B}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S \;\Rightarrow\; \iint_{S_A}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}_A\mathrm{d}S = \iint_{S_B}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}_B\mathrm{d}S \;\Rightarrow\; i_A(t) = i_B(t).$$

Nel caso generale, cioè rimuovendo l'ipotesi di stazionarietà, la corrente valutata ad una certa sezione S_A sarà diversa da quella valutata ad un'altra sezione S_B, per effetto della variazione della carica Q_Ω contenuta nel volume Ω compreso tra le due sezioni. Tuttavia, se le variazioni della carica sono sufficientemente lente nel tempo, in modo che risulti

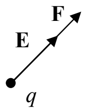
$$|i_A(t)|, |i_B(t)| >> \left|\frac{dQ_\Omega(t)}{dt}\right|,$$

allora si può ritenere $i_A(t) \approx i_B(t)$.

[4] Si dice che in regime stazionario il campo del vettore densità di corrente è *conservativo rispetto al flusso*.

CAMPO ELETTRICO E CAMPO MAGNETICO

L'interazione tra cariche e correnti elettriche si manifesta attraverso forze che agiscono sulle stesse: è esperienza comune, ad esempio, che una carica posta in una regione in cui sia già presente un'altra carica subisce una forza (attrattiva se le cariche hanno segno diverso, repulsiva se hanno segno uguale). Per descrivere in modo semplice l'interazione tra cariche e correnti si introduce il concetto di *campo elettrico* e di *campo magnetico* e, in generale, quello di *campo elettromagnetico*.



Forza che agisce su una carica ferma in una regione in cui sia presente un campo elettrico.

Consideriamo, allora, il caso di una carica "di prova" q ferma in un certo punto dello spazio, in presenza di altre cariche (vedi figura). La carica subirà una forza $\mathbf{F}$ che, in generale, dipenderà dal particolare punto dello spazio in cui si trova q e dal tempo. Si rileva sperimentalmente che tale forza è proporzionale a q.

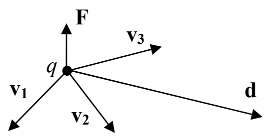
Si definisce, allora, il vettore *campo elettrico* $\mathbf{E}$ come segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r},t)}{q}.$$

Conoscere la distribuzione del vettore *campo elettrico* $\mathbf{E}$ in un certa regione, quindi, consente di valutare per ogni punto di tale regione la *forza* (*modulo, intensità e verso*) che subirebbe una carica di prova q posta in quel punto, diviso per la carica stessa[5]. Questa forza, in particolare, tende a muovere la carica positiva nel verso del campo elettrico.

La fenomenologia descritta non esaurisce le possibili esperienza che la nostra carica di prova può sperimentare. Si consideri, ad esempio, la situazione di figura b, nella quale la carica q si muove con una certa velocità $\mathbf{v}$ in una regione di spazio nella quale supponiamo che il campo elettrico sia nullo. In tale regione, quindi, finché la carica è ferma non subisce nessuna forza. Se, però, la carica si muove con una certa velocità $\mathbf{v}$, si può osservare sperimentalmente l'insorgere di una forza $\mathbf{F}$ che risulta proporzionale a q e al modulo di $\mathbf{v}$, ed è diretta ortogonalmente alla direzione di $\mathbf{v}$.

Eseguendo varie esperienze per diverse possibili direzioni di $\mathbf{v}$, assumendone costante il modulo v e facendo in modo da lasciare inalterata la direzione della forza, si osserva che il modulo di $\mathbf{F}$ si annulla lungo una particolare direzione $\mathbf{d}$ e varia altrove in ragione del seno dell'angolo compreso tra la direzione $\mathbf{d}$ e la velocità $\mathbf{v}$.



Forza che agisce su una carica in moto in una regione in cui sia presente un campo magnetico.

Si conviene, quindi, di introdurre un vettore $\mathbf{B}$, diretto lungo la direzione $\mathbf{d}$, di modulo pari a

$$B=\frac{F_{\max}}{qv}.$$

Il verso assegnato a $\mathbf{B}$ è tale che la forza valga:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t)=q\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t),$$

avendo indicato con $\times$ il *prodotto vettoriale*[6]. Il campo vettoriale definito in questo modo è detto *campo magnetico* e si misura nel SI in *tesla*: [B]=T.

[5] Si suppone che il valore della carica di prova q sia sufficientemente piccolo da poter trascurare l'effetto della carica stessa sulle cariche che hanno prodotto il campo elettrico che stiamo misurando.

[6] La terna di vettori **F**, **v**, e **B** è *destrorsa* cioè segua la *regola della mano destra*.

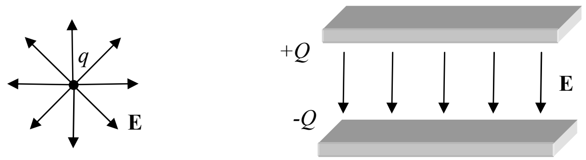
Generalizzando i due risultati ottenuti, si ricava l'espressione della forza che agisce su una carica puntiforme q che attraversa con una certa velocità $\mathbf{v}$ una regione di spazio in cui vi sia un campo elettrico $\mathbf{E}$ ed un campo magnetico $\mathbf{B}$ (forza di *Lorentz*):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t)=q\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+q\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t).$$

Osservando questo risultato si conclude che la carica subisce una forza dovuta al campo elettrico, che è la forza totale che subirebbe se fosse ferma, ed una seconda forza che è ortogonale alla sua velocità e quindi al suo spostamento (e pertanto, a differenza della prima, *non compie lavoro*).

Ricordiamo che le grandezze fisiche responsabili dell'interazione elettromagnetica sono le cariche e le correnti, mentre il campo elettrico ed il campo magnetico sono entità matematiche che introduciamo per descrivere in modo semplice tali interazioni. E' chiaro, quindi, che le "*sorgenti*" di questi campi sono proprio le cariche e le correnti. La relazione tra campi e sorgenti è descritta dalle *equazioni di Maxwell*, cui si aggiunge l'equazione di *conservazione della carica* precedentemente illustrata. In condizioni generali non è possibile distinguere tra campo elettrico e campo magnetico, ma si parla di *campo elettromagnetico*, perché la variazione temporale del campo magnetico è essa stessa una sorgente del campo elettrico e viceversa. Se, però, ci limitiamo per ora a considerare *condizioni stazionarie* (le grandezze elettriche sono costanti nel tempo) è possibile avere configurazioni in cui vi sia solo campo elettrico o solo campo magnetico. Le sorgenti del campo elettrico sono le *cariche ferme*, mentre quelle del campo magnetico sono le *correnti*.

Per avere un'idea di come si possa distribuire un campo elettrico, possiamo far riferimento alle due situazioni semplici riportate in figura: nel primo caso vi è una sola carica puntiforme q positiva, nel secondo vi sono due piani paralleli sui quali vi sono cariche di segno opposto distribuite uniformemente (in condizioni stazionarie, con cariche ferme si parla di *elettrostatica*).



Campo elettrico prodotto da una carica puntiforme e da due piani con cariche di segno opposto.

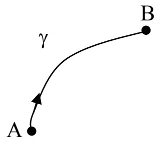
Il campo prodotto da una sola carica puntiforme positiva è radiale ed ha un verso diretto dalla carica verso l'infinito. Nel caso dei due piani illimitati, il campo elettrico è nullo all'esterno ed è perpendicolare ai piani all'interno, con verso che va dalla carica positiva alla negativa.

Configurazioni tipiche, invece, della *magnetostatica*, sono illustrate nella figura seguente: una corrente rettilinea filiforme produce un campo magnetico le cui linee di forza sono circonferenze giacenti su piani ortogonali al filo e aventi centro sull'asse del filo. Il campo magnetico prodotto da una spira piana di corrente è caratterizzato dalle linee di forza mostrate in figura.

Campo magnetico prodotto da una corrente filiforme rettilinea e da una spira piana di corrente.

DEFINIZIONE DI TENSIONE ELETTRICA

Una grandezze integrale molto utile per descrivere le proprietà del campo elettrico è la *tensione elettrica*. Per definirla, si consideri una curva orientata γ che collega due punti A e B di una regione in cui sia presente un campo elettrico **E**.



Cammino per la definizione di tensione elettrica tra due punti lungo una curva γ.

La tensione $v_{A\gamma B}(t)$ del campo elettrico tra due punti A e B lungo la curva orientata γ è il *lavoro* che il campo elettrico **E** compie su una carica unitaria (cioè di 1 C) che si muove da A a B lungo γ concordemente con il verso prescelto.

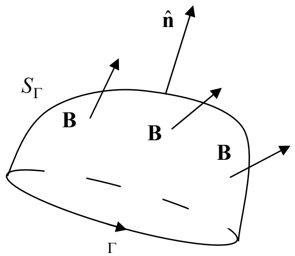
La tensione $v_{A\gamma B}(t)$ può essere espressa come integrale di linea del campo elettrico ***E*** lungo la curva orientata γ:

$$v_{A\gamma B}(t) = \int_{A\gamma B} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl},$$

dove, ricordiamo, $\hat{\mathbf{t}}$ indica il versore tangente alla curva in ogni punto. Nel sistema SI l'unità di misura della tensione elettrica è il *volt:* $[v]$ =V , mentre quella per il campo elettrico è volt diviso metro: $[E]$=V/m.

La tensione $v_\Gamma(t)$ relativa ad una linea chiusa Γ è detta *circuitazione del campo elettrico*, o anche *forza elettromotrice* (f.e.m.):

$$v_\Gamma(t) = \oint_\Gamma \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl}.$$



La legge di Maxwell che va sotto il nome di legge di *Faraday-Neumann* dice che tale circuitazione è pari alla derivata temporale del flusso del campo magnetico **B** *concatenato* con la linea Γ, cambiato di segno:

$$v_\Gamma(t) = -\frac{d\Phi_\Gamma}{dt}.$$

Φ_Γ è il flusso del campo magnetico **B** attraverso una qualunque superficie aperta S_Γ che abbia come orlo Γ, orientata coerentemente con l'orientamento assunto su Γ (*vedi figura*):

$$\Phi_\Gamma(t) = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{d}S.$$

Il flusso non dipende dalla particolare superficie scelta[7].

[7] Si parla di flusso *concatenato* con la curva Γ.

Questo risultato è conseguenza della legge di Maxwell per il flusso di **B**. Tale legge impone che il flusso di **B** attraverso una qualunque superficie chiusa Σ sia sempre nullo:

$$\oiint_\Sigma \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{d}S = 0,$$

da cui si ricava immediatamente che il flusso del campo ***B*** attraverso due superfici aperte (orientate concordemente) che hanno lo stesso orlo è lo stesso[8]. *(Il lettore provi a dimostrare questo risultato, tenendo conto che l'unione di due superfici aperte aventi lo stesso orlo è una superficie chiusa).*

Nel sistema SI l'unità di misura del flusso del campo magnetico è denominata *weber*

$$[\Phi] = \mathrm{Wb},$$

e si può esprimere come il prodotto di un volt per un secondo (Wb = Vs) o anche come prodotto di 1 Tesla per metro quadro (Wb = Tm^2).

Il fenomeno descritto dalla legge di *Faraday-Neumann* è uno dei più importanti dell'elettromagnetismo e prende il nome di *induzione elettromagnetica*: ogniqualvolta nello spazio esiste un campo magnetico variabile nel tempo, ad esso si associa un campo elettrico con circuitazione diversa da zero.

Per comprendere il significato di questi risultati è utile fa riferimento alla figura seguente, nella quale due punti A e B sono collegati da due diverse curve orientate γ_1 e γ_2. Detta Γ la curva chiusa ottenuta dall'unione di γ_1 e γ_2, orientata ad esempio come γ_1, la legge di Faraday-Neumann impone che

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\iint_{S_\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{dS},$$

essendo S_Γ definita come sopra. Quando le grandezze elettriche e magnetiche sono costanti nel tempo (*regime stazionario*), la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi linea chiusa è sempre uguale a zero[9]

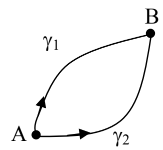
$$\oint_\Gamma \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} = \int_{\gamma_1} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} + \int_{\gamma_2} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} = 0.$$

Tenuto conto di come abbiamo definito la tensione elettrica e dei versori scelti, si ha come immediata conseguenza che la tensione elettrica lungo una linea aperta *dipende solo dai punti estremi della linea*:

$$v_{A\gamma_1 B}(t) = v_{A\gamma_2 B}(t).$$

Nel caso generale, cioè rimuovendo l'ipotesi di stazionarietà, la tensione i tra punti A e B dipenderà dal percorso scelto: la differenza dipende dalla variazione del flusso Φ concatenato con la curva chiusa ottenuta dall'unione dei due percorsi:

$$v_{A\gamma_1 B}(t) - v_{A\gamma_2 B}(t) = -\frac{d\Phi_{\gamma_1\cup(-\gamma_2)}(t)}{dt}.$$



Due curve diverse per il calcolo della tensione elettrica tra due punti.

Tuttavia, se le variazioni del flusso sono sufficientemente lente nel tempo, in modo che risulti

[8] Si dice che **B** è *conservativo* rispetto al flusso.
[9] Si dice che **E** *è conservativo* rispetto alla circuitazione.

$$\left|v_{A\gamma_1 B}(t)\right|, \left|v_{A\gamma_2 B}(t)\right| >> \left|\frac{d\Phi_{\gamma_1\cup\gamma_2}(t)}{dt}\right|$$

allora si può ritenere $v_{A\gamma_1 B}(t) \approx v_{A\gamma_2 B}(t)$.

Osservazione.

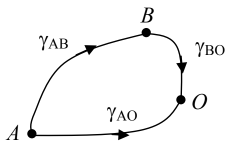
Se il campo **E** è conservativo, si definisce *potenziale elettrico* e_P di un punto *P* rispetto ad un riferimento *O* la tensione v_{OP} valutata lungo qualunque cammino che colleghi *O* a *P* (si ha, evidentemente, $e_O = 0$).

Consideriamo, allora, la figura seguente, nella quale abbiamo evidenziato tre possibili cammini che consentono il calcolo delle tensioni tra i punti *A*, *B* ed il riferimento. Poiché la circuitazione del campo elettrico deve essere nulla si ha:

$$\int_{\gamma_{AB}} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} + \int_{\gamma_{B0}} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} - \int_{\gamma_{A0}} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} = 0,$$

da cui applicando la definizione di tensione e di potenziale, si ricava immediatamente che:

$$v_{AB} = e_{\mathbf{B}} - e_{\mathbf{A}},$$



Tensione elettrica tra due punti come differenza di potenziale

cioè che la tensione tra i punti *A* e *B* può essere espressa come differenza tra il valore che il potenziale elettrico assume nel punto *B* e quello che assume nel punto *A* (*differenza di potenziale*).

In definitiva le tre proprietà seguenti sono equivalenti:

E conservativo ⇔ tensione indipendente dal cammino ⇔ tensione = differenza di potenziale

LE EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO

Abbiamo già ricordato come i campi elettrici e magnetici siano legati tra di loro e alle sorgenti attraverso un sistema di equazioni che va sotto il nome di *equazioni di Maxwell*, alcune delle quali sono già state richiamate nei paragrafi precedenti.

Scriviamo, allora, il set completo di equazioni, supponendo di essere nel *vuoto* e di considerare curve e superfici ferme:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\iint_{S_\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{dS},$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{t}}\mathrm{dl} = \mu_0\iint_{S_\Gamma} \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{dS} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\iint_{S_\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{dS},$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\Omega_\Sigma} \rho(\mathbf{r},t)\mathrm{dV},$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{d}S = 0,$$

dove $\varepsilon_0 \approx 8.854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg^{-1}m^{-3}s^2C^2}$ è la *costante dielettrica nel vuoto* e $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot C^{-2}}$ è la *permeabilità magnetica nel vuoto*.

Sul significato e su alcune conseguenze della prima e dell'ultima equazione si è già discusso in precedenza. La seconda equazione è anche nota come *legge di Ampère* e stabilisce che la circuitazione del campo magnetico lungo un curva chiusa Γ è data dalla corrente che si concatena con tale curva (a meno del fattore costante μ_0) e dal flusso di un vettore proporzionale alla derivata del campo elettrico attraverso una superficie che abbia come orlo Γ. Il fenomeno descritto da questo termine è duale rispetto a quello descritto dalla legge di *Faraday-Neumann*, che abbiamo definito *induzione elettromagnetica*: ad un campo elettrico variabile nel tempo si associa un campo magnetico con circuitazione diversa da zero (*induzione magnetoelettrica*). La derivata del campo elettrico, moltiplicata per ε_0, agisce esattamente come una corrente[10].

La terza equazione, infine, è nota come *legge di Gauss* ed esprime il fatto che il flusso del campo elettrico **E** attraverso una superficie chiusa è pari alla carica netta contenuta all'interno di tale superficie, divisa per la costante ε_0.

Accanto a tali equazioni si aggiunge, poi, l'equazione di conservazione della carica (detta anche *equazione di continuità*) che si può leggere come una relazione tra le due *sorgenti* dei campi:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\iiint_{\Omega_\Sigma} \rho(\mathbf{r},t)dV,$$

e che si può ricavare dalla seconda e terza equazione di Maxwell. Oltre ai fenomeni citati, le equazioni di Maxwell nella forma generale descrivono anche il fenomeno della *propagazione elettromagnetica*: se in un certo istante "accendiamo" le sorgenti in una regione finita dello spazio, i campi prodotti da tali sorgenti non nasceranno istantaneamente in tutto lo spazio, ma si propagheranno con una velocità finita pari a

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 2.998\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}.$$

[10] Per tale motivo a questo termine si dà il nome di *corrente di spostamento*.