1 Derivata di una funzione reale di variabile reale (versione 0.3)

1.1 Definizione di derivata

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$. Senza perdita di generalità, supponiamo che X sia un intervallo. Assegnato $x_0 \in X$:

$$f(x) - f(x_0) \tag{1}$$

La (1) è una funzione di (x, x_0) e si chiama **incremento della funzione** $f(x)$ relativo al punto x_0. Si consideri ora il rapporto:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

La grandezza (2) è una funzione di x definita in $X - \{x_0\}$ ed è nota come **rapporto incrementale** di $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente. Il punto x_0 è manifestamente punto di accumulazione per l'insieme di definizione della funzione (2) per cui ci proponiamo il calcolo del limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3}$$

Se la funzione è continua in x_0 il limite (3) si presenta nella forma indeterminata:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{0}, \tag{4}$$

Possono presentarsi tre casi distinti relativamente al comportamento del rapporto incrementale (2). Precisamente, tale rapporto può essere:

1. convergente;
2. divergente;
3. non regolare.

Nel primo caso diremo che la funzione $f(x)$ **è derivabile nel punto** x_0, e il limite (3) si chiama **derivata della funzione** $f(x)$ **nel punto** x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli: $f'(x_0)$, $Df(x)|_{x=x_0}$, donde scriviamo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{5}$$

Nel caso 2 diremo che **la funzione** $f(x)$ **ha derivata infinita** in x_0. Più precisamente, se il rapporto incrementale diverge positivamente:

$$f'(x_0) = +\infty \tag{6}$$

Se invece diverge negativamente:

$$f'(x_0) = -\infty \tag{7}$$

Esempio 1 *Determinare la derivata di* $f(x) = x^2$ *nel punto* $x_0 = 2$.

Soluzione 2 *Abbiamo:*

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4 \tag{8}$$

***

Sussiste la seguente

Proposizione 3 $(f(x)$ *è derivabile in* $x_0) \Longrightarrow (f(x)$ *è continua in* $x_0)$

Dimostrazione. $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right] = f'(x_0) \cdot 0 \underset{|f'(x_0)| < +\infty}{=} 0$
Si osservi che tale proposizione non è invertibile, cioè:

$$(f(x) \text{ è continua in } x_0) \nRightarrow (f(x) \text{ è derivabile in } x_0) \tag{9}$$

In altri termini, la continuità di una funzione è condizione necessaria ma non sufficiente per la derivabilità. Per contro, la derivabilità è condizione sufficiente per la continuità. La (9) può essere provata attraverso degli esempi di funzioni continue in un punto ma non ivi derivabili.

Esempio 4 *La funzione:*

$$f(x) = |x|,$$

è continua in $x_0 = 0$, *ma non è ivi derivabile.*
Determiniamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x}$$

Tale rapporto è non regolare in x_0*:*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1, \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \tag{10}$$

donde la funzione non è derivabile in x_0.

Osservazione 5

$$(f(x) \text{ ha derivata infinita in } x_0) \nRightarrow (f(x) \text{ è continua in } x_0) \tag{11}$$

Esempio 6 *Si consideri la funzione* **segno di** x*:*

$$f(x) = signx = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{12}$$

La (12) non è continua in $x_0 = 0$. *Determiniamo in tale punto il rapporto incrementale:*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{|x|} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty \Longrightarrow f'(x_0) = +\infty$$

Si conclude che la funzione $signx$ *ha derivata infinita in* $x_0 = 0$ *e non è ivi continua.*

***

Se eseguiamo il cambio di variabile:

$$x \to \xi = x - x_0, \tag{13}$$

il rapporto incrementale (2) si scrive:

$$\frac{f(x_0 + \xi) - f(\xi)}{\xi} \tag{14}$$

La derivata:

$$f'(x_0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f(x_0 + \xi) - f(\xi)}{\xi} \tag{15}$$

$\xi = x - x_0$ è l'incremento della variabile indipendente che spesso viene indicato con:

$$\Delta x \tag{16}$$

La notazione simbolica (16) si generalizza a qualsiasi grandezza, poiché Δ denota una "differenza". Ad esempio, nel caso della funzione $f(x)$, scriviamo:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f \tag{17}$$

Nella (17) x_0 è una variabile muta, per cui:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{18}$$

La derivata:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{19}$$

Se la funzione $f(x)$ è derivabile per ogni $x \in X' \subseteq X$, risulta definita in X' una nuova funzione $f'(x)$ che chiameremo **derivata prima della funzione** $f(x)$. È spesso utilizzato il simbolo:

$$Df(x) \tag{20}$$

Scriviamo:

$$Df(x) = f'(x) \tag{21}$$

La (21) definisce l'**operatore di derivazione** D. Si tratta di un operatore lineare[1] che applicato ad una qualunque funzione derivabile ci fa passare alla sua derivata. L'operatore

[1] Affronteremo in un prossima sezione il significato di tale locuzione.

D agisce anche sulla derivata di $f(x)$, dando origine alla derivata della derivata, denominata **derivata seconda della funzione** $f(x)$ e si indica con uno dei simboli:

$$f''(x), \quad D^2 f(x) \tag{22}$$

Con tale definizione, la derivata $f'(x)$ è nota come **derivata prima della funzione** $f(x)$. Il secondo dei simboli (22) si giustifica osservando che la derivata seconda è il risultato dell'applicazione dell'operatore D sulla derivata prima:

$$Df'(x) = D(Df(x)) = D^2(f(x)) \tag{23}$$

Il processo di applicazione dell'operatore di derivazione può essere iterato, per cui definiamo la **derivata di ordine n della funzione**[2] $f(x)$ il risultato dell'applicazione dell'operatore D^n sulla funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \underbrace{D(D...D(f(x)))}_{n \text{ volte}} \\ &= D^n f(x) \end{aligned} \tag{24}$$

***

Abbiamo visto che il rapporto incrementale relativo alla funzione $f(x) = |x|$ nel punto $x_0 = 0$ è non regolare. Più precisamente, è regolare a sinistra e a destra [eq. (10)]. In casi come questi, si dice che la funzione è **derivabile a sinistra e a destra**:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0), \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \tag{25}$$

$f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ si chiamano **derivata sinistra** e **derivata destra della funzione** $f(x)$ **nel punto** x_0.

1.2 Interpretazione geometrica della derivata

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$. Supponiamo che la funzione sia ivi continua.
Assegnato il riferimento monometrico ortogonale $R(Oxy)$, indichiamo con Γ il diagramma cartesiano della funzione. Preso ad arbitrio $x \in [a, b] - \{x_0\}$, consideriamo i punti $P_0(x_0, f(x_0)), P(x, f(x)) \in \Gamma$ (vedere fig. 1).
Ciò premesso, sia s_x la retta passante per i punti P_0, P, orientata nel verso delle ascisse crescenti. Chiamiamo s_x **retta secante** al diagramma per i punti P_0, P. La sua equazione è:

$$y = f(x_0) + m(x - x_0) \tag{26}$$

Qui m è il coefficiente angolare di s_x. Dalla Geometria:

[2]Da un punto di vista formale la funzione $f(x)$ è la derivata di ordine zero.

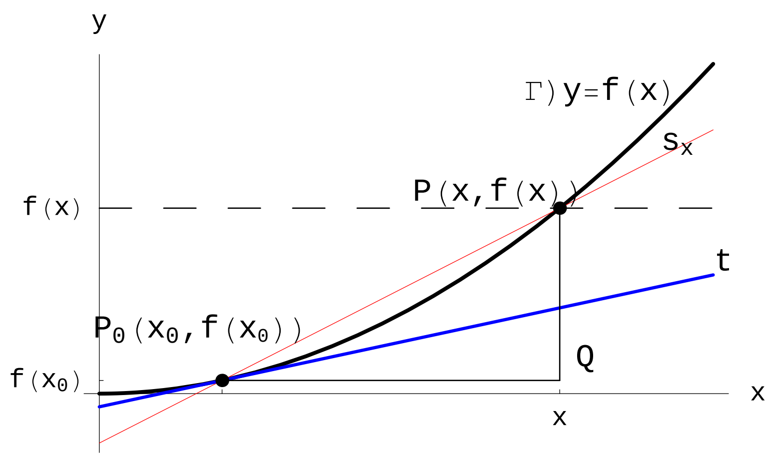


Figura 1: Diagramma cartesiano della funzione $f(x)$. Senza perdita di generalità abbiamo considerato $x > x_0, f(x) > f(x_0)$.

$$m = \tan\theta(x), \tag{27}$$

essendo $\theta(x)$ al misura in radianti dell'angolo che la retta s_x forma con l'asse x; $\theta(x)$ è una funzione definita in $[a,b] - \{x_0\}$; inoltre:

$$|\theta(x)| < \frac{\pi}{2} \tag{28}$$

Dalla figura 1:

$$\tan\theta(x) = \frac{\overline{QP}}{\overline{QP_0}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{29}$$

Cioè:

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \tag{30}$$

Per quanto detto, la funzione $\theta(x)$ è definita in $[a,b] - \{x_0\}$, e supponendo che sia regolare in x_0, poniamo:

$$\lim_{x \to x_0} \theta(x) = \theta_0 \tag{31}$$

Per la (28):

$$|\theta_0| \leq \frac{\pi}{2} \tag{32}$$

Dalla definizione di $\theta(x)$ segue che il limite θ_0 individua una particolare retta t (fig. 1). Poniamo:

$$\Delta\theta = \theta(x) - \theta_0 \tag{33}$$

La (33) è l'incremento della funzione $\theta(x)$ relativo all'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente. Da un punto di vista geometrico $\Delta\theta$ è la misura in radianti dell'angolo tra le rette t, s_x.
Se il punto P tende a P_0, segue che x tende a x_0, la retta s_x ruota attorno a P_0 per sovrapporsi alla retta t. Pertanto:

Definizione 7 *La retta t è la **posizione limite** della retta secante s_x alla curva Γ al tendere di P e P_0. Quindi t è la **retta tangente** a Γ nel punto P_0.*

Dalle equazioni (30)-(31):

$$\theta_0 = \arctan\left[\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] \tag{34}$$

Consideriamo il caso particolare in cui la retta t non è parallela all'asse y ($|\theta_0| < \pi/2$). Abbiamo:

$$|\theta_0| < \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \left|\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < +\infty,$$

In altri termini, la retta tangente a Γ nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$ esiste e non si dispone parallelamente all'asse y, se e solo se la funzione è derivabile in x_0. In simboli:

$$|\theta_0| < \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow |f'(x_0)| < +\infty \tag{35}$$

Inoltre:

$$\theta_0 = \arctan f'(x_0) \Longleftrightarrow f'(x_0) = \tan\theta_0 \tag{36}$$

Conclusione 8 *La derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è il coefficiente angolare m_0 della retta tangente alla curva $\Gamma)y = f(x)$. L'equazione della suddetta retta tangente è:*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{37}$$

***

Nel caso speciale in cui $f'(x_0) = 0$, la retta tangente è parallela all'asse x (figura 7).
A titolo di esempio consideriamo la funzione $f(x) = x^3$. Poniamo $x_0 = 2$, $x = 4$, per cui:

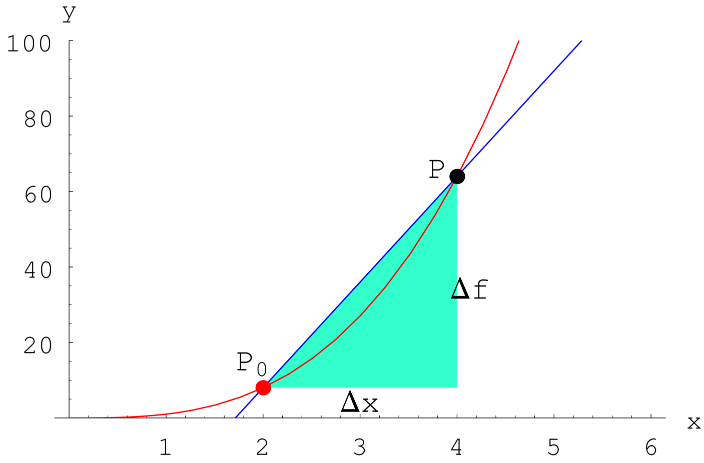
$$P_0(x_0 = 2, f(x_0) = 8)$$
$$P(x = 4, f(x) = 64)$$

Troviamo per tale coppia di punti:

$$\Delta f = 56; \ \Delta x = 2$$

La retta secante ha equazione:

$$s_x) \ y = -48 + 28x$$



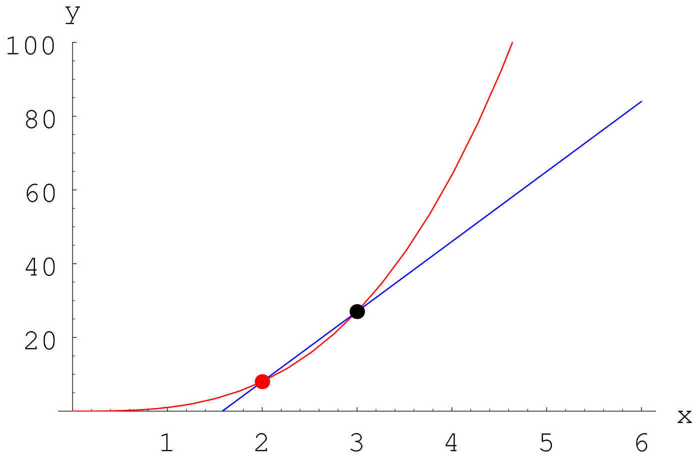


Figura 2:

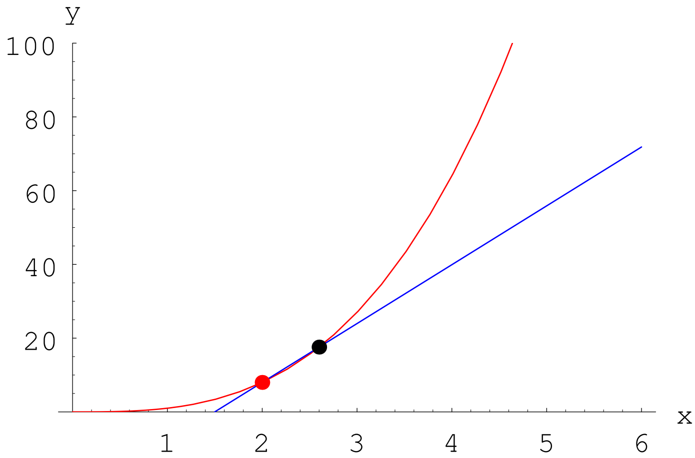


Figura 3:

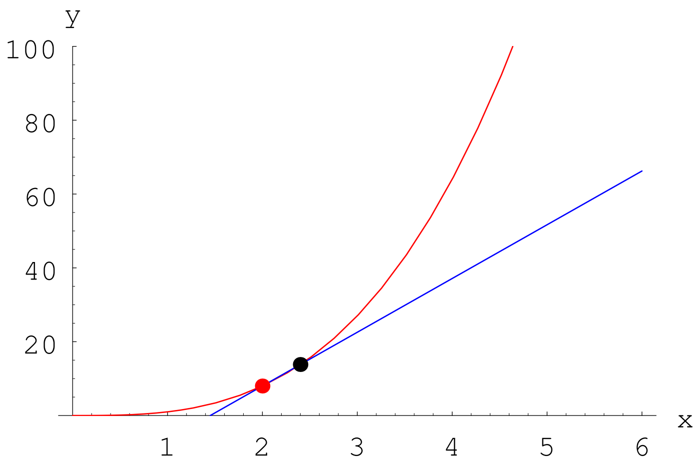


Figura 4:

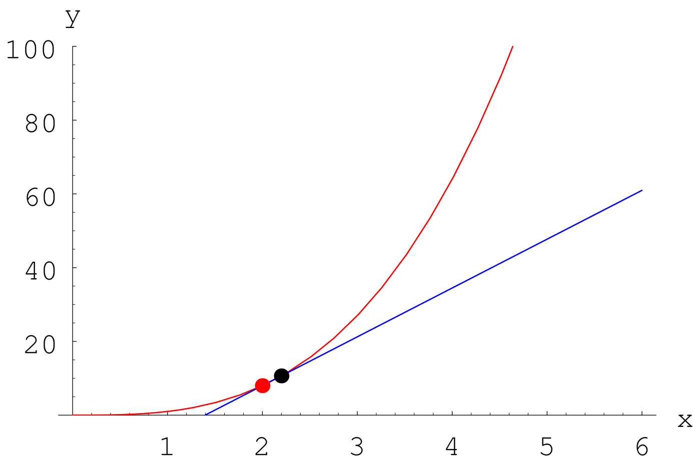


Figura 5:

Se immaginiamo di diminuire l'incremento Δx della variabile indipendente, la retta secante s_x ruota intorno al punto P_0 come risulta dalle figure 2, 3, 4, 5.
Nella tabella seguente sono riportati i valori numerici del rapporto incrementale Δf al diminuire dell'incremento Δx della variabile indipendente.

Δx	Δf
0.1	12.61
0.01	12.0601
0.001	12.006
0.0001	12.0006
0.00001	12.0001
1×10^{-6}	12.0
1×10^{-7}	12.0
1×10^{-8}	12.0
1×10^{-9}	12.0
1×10^{-10}	12.0

Osservazione 9 *La definizione di retta tangente conseguente dalla definizione di derivata è più rigorosa di quella offerta dal senso comune, secondo cui una retta tangente interseca una curva in un sol punto. Come controesempio per quest'ultima definizione, si consideri la funzione $f(x) = \sin x$. La retta di equazione $y = 1$ è tangente alla curva $y = \sin x$. Orbene, tale retta interseca in infiniti punti il grafico di $\sin x$ (fig. 6).*

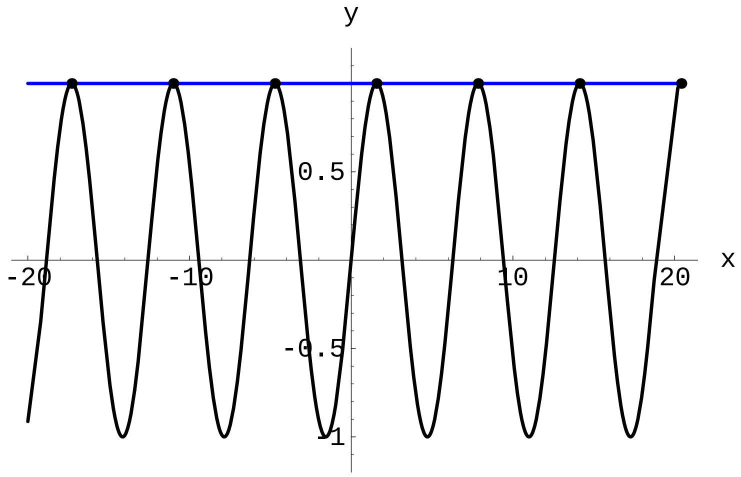


Figura 6: Grafico di $f(x) = \sin x$ e della retta $y = 1$, quale retta tangente a $y = f(x)$ nei punti $P_k\left(x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

***

Se invece la funzione ha in x_0 derivata infinita, la retta tangente è verticale, orientata verso l'alto $[f'(x_0) = +\infty]$ o verso il basso $[f'(x_0) = -\infty]$ (figg. 8-9). La sua equazione è $x = x_0$.

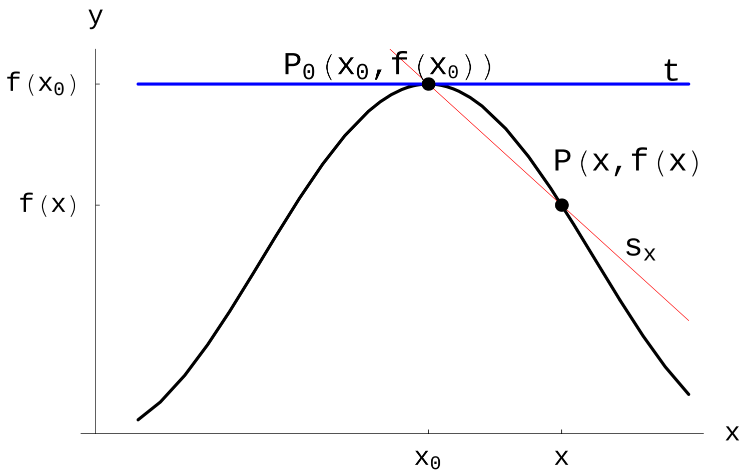


Figura 7: Diagramma cartesiano di una funzione con derivata nulla nel punto x_0.

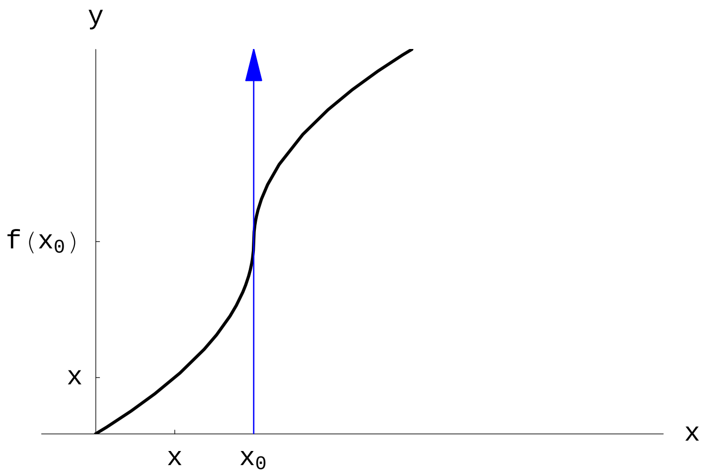


Figura 8: Diagramma cartesiano di una funzione con $f'(x_0) = +\infty$

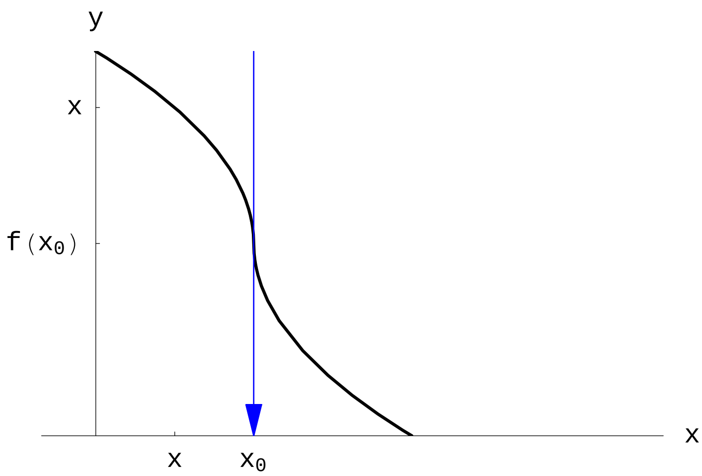


Figura 9: Diagramma cartesiano di una funzione con $f'(x_0) = -\infty$

Infatti:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= +\infty \Longrightarrow \theta_0 = +\frac{\pi}{2} \\
f'(x_0) &= -\infty \Longrightarrow \theta_0 = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

In entrambi i casi, la retta tangente attraversa il diagramma della funzione. Il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è un **punto di flesso a tangente verticale.**

***

In entrambi i casi: $|f'(x_0)| < +\infty$, $|f'(x_0)| = +\infty$, il diagramma cartesiano della funzione $f(x)$ è comunque dotato di retta tangente nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$. Esaminiamo ora i casi in cui esso ne è privo. Ad esempio, supponiamo che:

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \text{ con } \left|f'_\pm(x_0)\right| < +\infty$$

In altri termini, la funzione non è derivabile in x_0, ma è derivabile a sinistra e a destra. Preso ad arbitrio $P(x, f(x))$, è facile rendersi conto che se P tende a P_0, la corrispondente retta secante s_x tende a due rette distinte: t_- se $x \to x_0^-$, t_+ se $x \to x_0^+$. Da ciò segue che il diagramma cartesiano è:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2, \tag{38}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1) y &= f(x), \; x < x_0 \\
\Gamma_2) y &= f(x), \; x > x_0
\end{aligned}$$

Gli archi di curva Γ_1 e Γ_2 si raccordano nel punto P_0 in forza della continuità della funzione $f(x)$ (fig: 10)
Per quanto visto, non esiste la retta tangente a Γ nel punto P_0. Peraltro, è possibile definire la semiretta tangente sinistra t_- e la semiretta tangente destra t_+. Inoltre, t_- e t_+ si intersecano sotto un angolo la cui tangente trigonometrica è in valore assoluto $\left|f'_-(x_0) - f'_+(x_0)\right| > 0$. Tale circostanza suggerisce di denominare P_0, **punto angoloso** del luogo geometrico Γ.

Esempio 10 *Provare che il grafico della funzione*

$$f(x) = |\ln x| \tag{39}$$

ha un punto angoloso in $P_0(1, 0)$

Soluzione 11 *Esplicitiamo il valore assoluto:*

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (1, +\infty) \\ -\ln x, & x \in (0, 1] \end{cases} \tag{40}$$

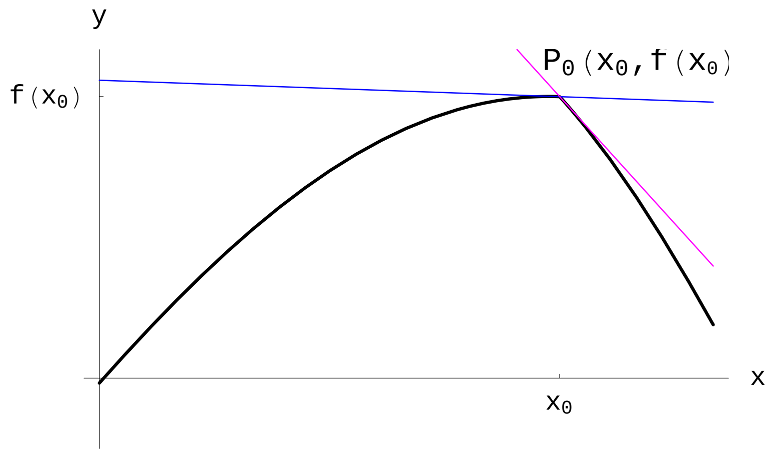


Figura 10: Diagramma cartesiano di una funzione con $f_-(x_0) \neq f_+(x_0)$. Precisamente: $|f_\pm(x_0)| < +\infty$, $0 < f_-(x_0) < f_+(x_0)$

Le derivate:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = +1$$
$$f'_-(1) = -\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = -1$$

Abbiamo una semiretta tangente a destra di equazione:

$$y = x - 1$$

e a sinistra:

$$y = -x + 1$$

Il grafico è riportato in figura 11

Esempio 12 *Si consideri la funzione*

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1+\exp(1/x)}, \quad x \neq 0 \tag{41}$$
$$f(x) = 1, \; x = 0$$

Provare che $P_0(0,1)$ è un punto angoloso della curva $\Gamma) y = f(x)$.

Soluzione 13 *Iniziamo col verificare la continuità della funzione (41) nel punto $x_0 = 0$. Abbiamo:*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 + \frac{0^+}{1+(+\infty)} = 1 + 0^+ = 1^+$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 + \frac{0^-}{1+(-\infty)} = 1 + 0^- = 1^-,$$

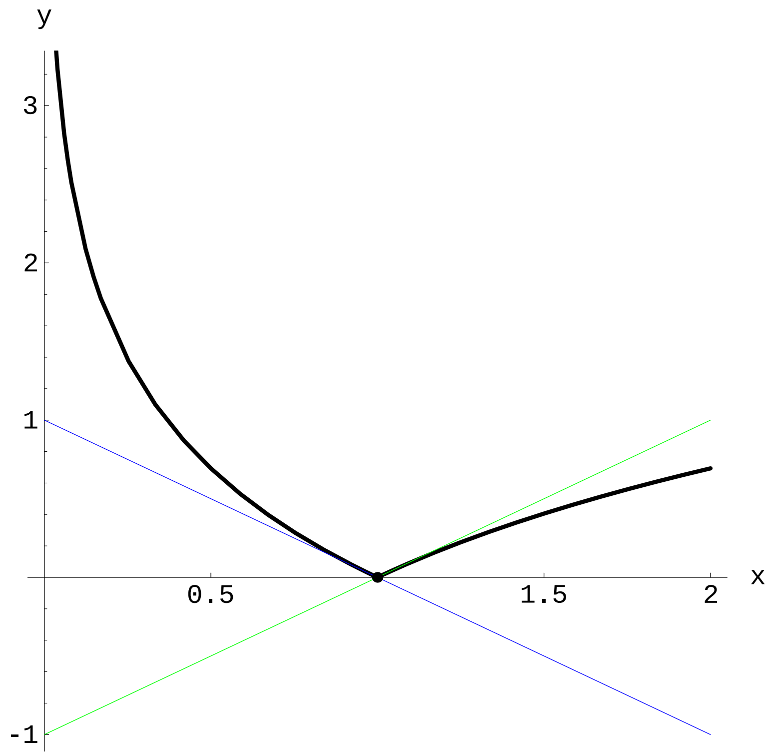


Figura 11: Diagramma cartesiano di $f(x) = |\ln x|$

donde:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Longrightarrow (\ f(x)\ \textit{è continua in } x_0 = 0)$$

La derivata sinistra in x_0*:*

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + \exp(1/x)} = \frac{1}{1 + (-\infty)} = 1$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + \exp(1/x)} = \frac{1}{1 + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

donde l'asserto. Scriviamo le equazioni delle due rette tangenti.

$$y = 1 \quad \textit{semiretta tangente a destra}$$
$$y = x + 1 \quad \textit{semiretta tangente a sinistra}$$

Il grafico è in figura 12

Esercizio 14 *Studiare la derivabilità della funzione:*

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}, \quad x \in [0, +\infty) \tag{42}$$

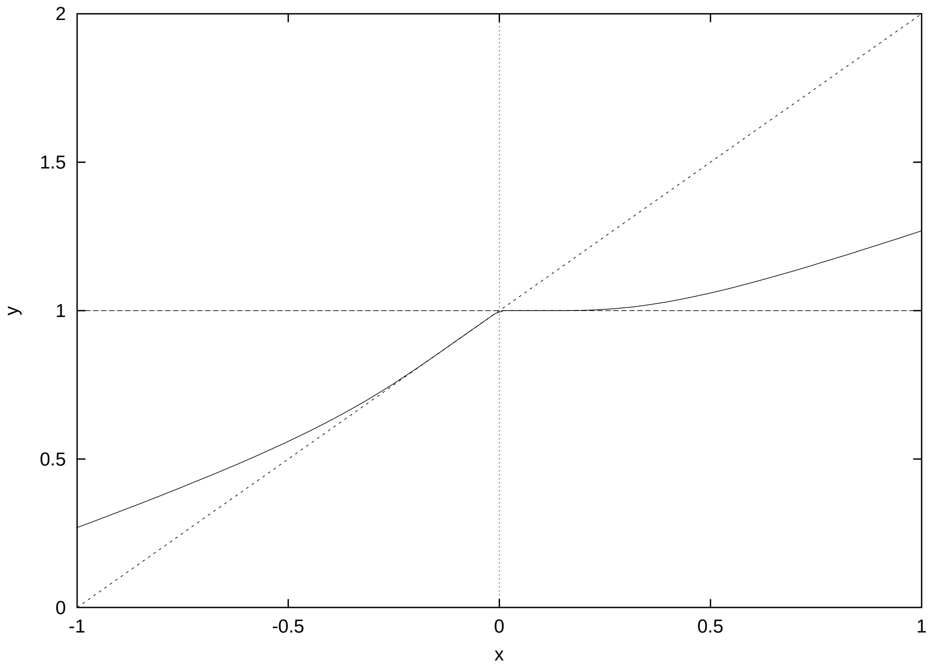


Figura 12: Diagramma cartesiano della funzione la cui espressione analitica è data dall'equazione (41)

Esempio 15 ***Esercizio 16*** *Per la proprietà di* $[x]$*, abbiamo:*

$$\begin{aligned}
&x \in (0,1) \Longrightarrow f(x) = \sqrt{x} \\
&x \in (1,2) \Longrightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x+1} \\
&x \in (2,3) \Longrightarrow f(x) = 2 + \sqrt{x+2} \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x \in (n,n+1) \Longrightarrow f(x) = n + \sqrt{x+n} \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

da cui il grafico Γ *della funzione:*

$$\Gamma = \lim_{n \to +\infty} \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k,$$

essendo Γ_k *la curva di equazione* $y = k + \sqrt{x-k}$ *e di estremi* $P_k(k,k)$*,* $Q_k(k+1,k+1)$ *(vedere figura 13).*
La funzione è manifestamente continua, ci aspettiamo una discontinuità della derivata nei

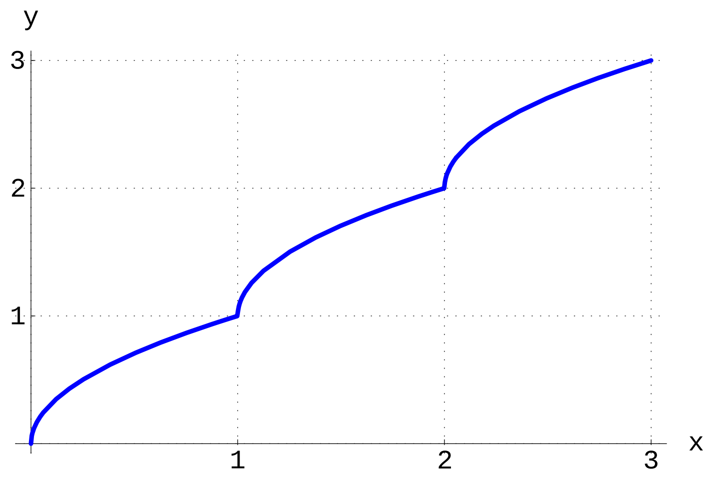


Figura 13: Diagramma cartesiano della funzione la cui espressione analitica è data dall'equazione (42)

punti di ascissa intera. Infatti, iniziamo col determinare la derivata sinistra:

$$\begin{aligned} f'_-(n) &= \lim_{x\to n^-} \frac{f(x)-f(n)}{x-n} \\ &= \lim_{x\to n^-} \frac{n-1+\sqrt{x-(n-1)}-n}{x-n} \\ &= \lim_{x\to n^-} \frac{\sqrt{(x-n)+1}-1}{x-n} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to n^-} \left[\frac{\sqrt{(x-n)+1}-1}{x-n} \cdot \frac{\sqrt{(x-n)+1}+1}{\sqrt{(x-n)+1}+1}\right] \\ &= \lim_{x\to n^-} \frac{1}{\sqrt{(x-n)+1}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{43}$$

La derivata destra:

$$\begin{aligned} f'_+(n) &= \lim_{x\to n^+} \frac{f(x)-f(n)}{x-n} \\ &= \lim_{x\to n^+} \frac{n+\sqrt{x-n}-n}{x-n} \\ &= \lim_{x\to n^+} \frac{1}{\sqrt{x-n}} = +\infty \end{aligned} \tag{44}$$

Quindi la semitangente a sinistra nei punti $P_n(n,n)$, è:

$$y = n + \frac{1}{2}(x-n),$$

mentre la semitangente a destra nei medesimi punti ha equazione:

$$x = x_n$$

Per i particolari grafici vedere le figure (14)-(15)

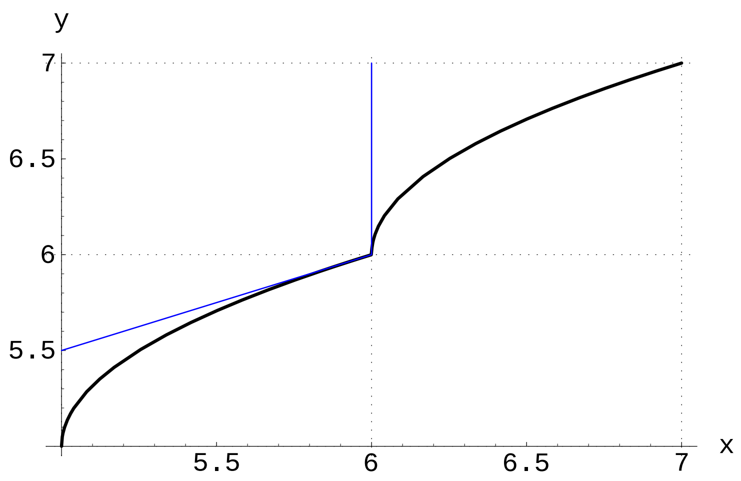


Figura 14: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ nell'intervallo $[5, 7]$.

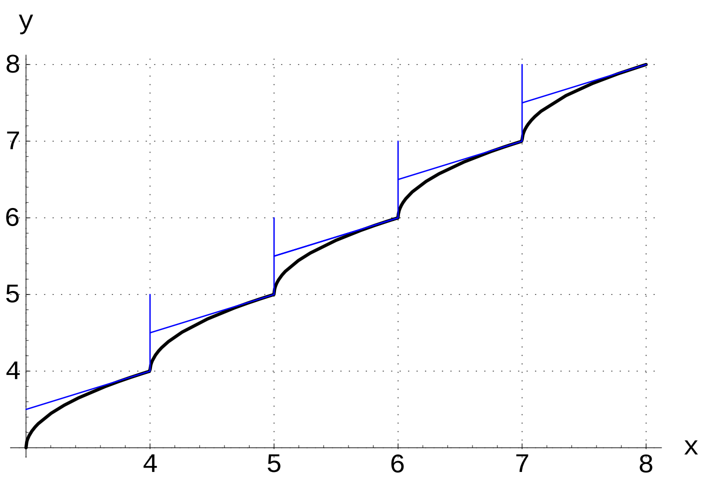


Figura 15: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$. La funzione è ovunque continua, mentre la derivata prima è discontinua nei punti di ascissa intera.

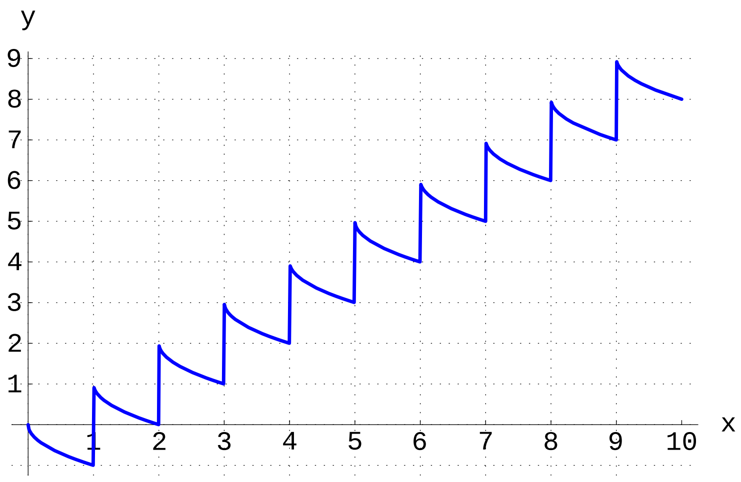


Figura 16: Diagramma cartesiano della funzione la cui espressione analitica è data dall'equazione (45)

Esercizio 17 *Studiare la derivabilità della funzione:*

$$f(x) = [x] - \sqrt{x - [x]}, \quad x \in [0, +\infty) \tag{45}$$

Soluzione 18 *Grafichiamo la funzione. A tale scopo si osservi che*

$$\begin{aligned}
&x \in (0,1) \Longrightarrow f(x) = -\sqrt{x} \\
&x \in (1,2) \Longrightarrow f(x) = 1 - \sqrt{x-1} \\
&x \in (2,3) \Longrightarrow f(x) = 2 - \sqrt{x-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x \in (n, n+1) \Longrightarrow f(x) = n - \sqrt{x-n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

donde il grafico di $f(x)$ *è:*

$$\Gamma = \lim_{n \to +\infty} \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k,$$

essendo Γ_k *la curva di equazione* $y = k - \sqrt{x-k}$ *di estremi* $P_k(k,k)$, $Q_k(k+1, k-1)$ *(vedere figura 16).*
Da ciò vediamo che la funzione ha una discontinuità di prima specie in $x_n = n$. *Per dimostrare scriviamo l'espressione analitica della* $f(x)$ *a destra e a sinistra per ogni* n*:*

$$\begin{aligned}
&f(x) = n - 1 - \sqrt{x - (n-1)},\ x \in (n-1, n) \\
&f(x) = n - \sqrt{x-n}, \quad x \in (n, n+1)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
f(n^-) &= \lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n} \left[n - 1 - \sqrt{x - (n-1)} \right] = n - 2 \\
f(n^+) &= \lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n} \left[n - \sqrt{x-n} \right] = n,
\end{aligned}$$

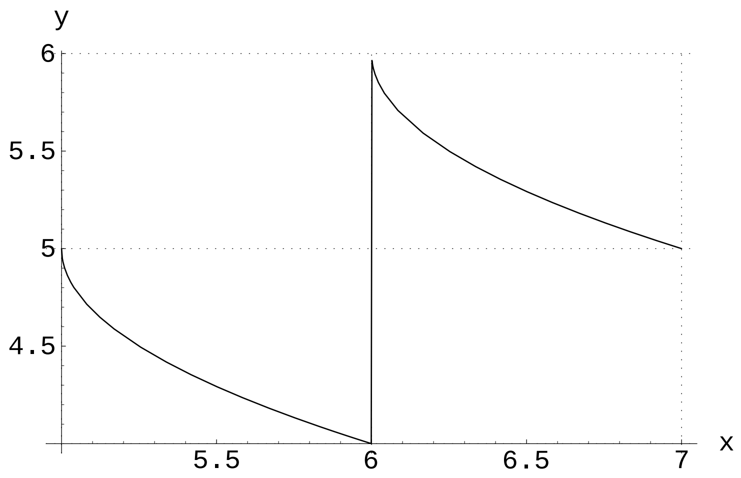


Figura 17: Diagramma cartesiano di $f(x) = [x] - \sqrt{x - [x]}$ nell'intervallo $[5, 7]$.

perciò $x_n = n$ è un punto di discontinuità di prima specie; il salto di discontinuità è $s(n) = +2$.
La funzione non è derivabile in $x_n = n$, in quanto non è possibile determinare il valore assunto in tali punti, possiamo però determinare la derivata a destra e a sinistra rispettivamente.

$$\begin{aligned} f'_-(n) &= \lim_{x \to n^-} \frac{n - 1 - \sqrt{x - (n-1)} - (n-2)}{x - n} \\ &= \lim_{x \to n^-} \left[\frac{1 - \sqrt{x - (n-1)}}{x - n} \cdot \frac{1 + \sqrt{x - (n-1)}}{1 + \sqrt{x - (n-1)}} \right] \\ &= -\lim_{x \to n^-} \frac{1}{1 + \sqrt{x - (n-1)}} = -\frac{1}{2}; \\ f'_+(n) &= \lim_{x \to n^+} \frac{n - \sqrt{x - n} - n}{x - n} = -\lim_{x \to n^+} \frac{1}{\sqrt{x - n}} = -\infty \end{aligned} \tag{46}$$

Dalle (46) vediamo che in ogni punto x_n la derivata sinistra è $-1/2$, la derivata destra è $-\infty$. Per l'interpretazione geometrica vedere la figura 17.

I due casi precedenti si specializzano quando entrambe le derivate sono infinite e di segno opposto. Il grafico della funzione si decompone ancora attraverso la (38) e l'angolo tra le due semirette tangenti è in valore assoluto pari a π. Il punto P_0 è chiamato **cuspide** della curva Γ.

***

Se il rapporto incrementale non è regolare a sinistra o a destra (o entrambi), significa che intorno a x_0 compie infinite oscillazioni che non si smorzano.

Esempio 19 *Sia:*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{47}$$

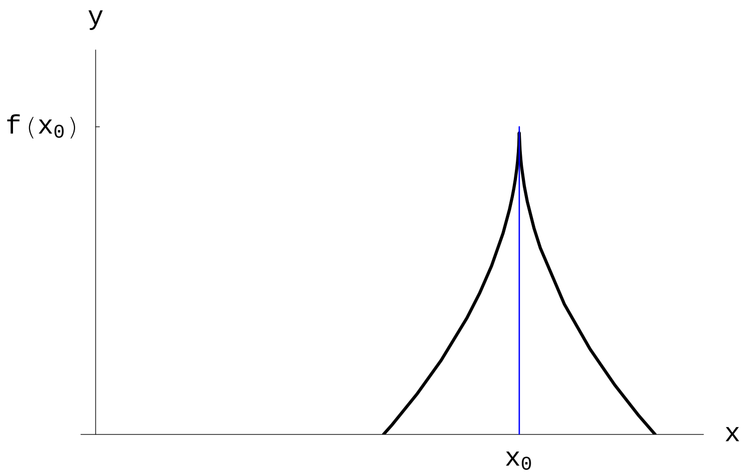


Figura 18: Diagramma cartesiano di una funzione con $f_{-}(x_0) = +\infty$. $f_{+}(x_0) = -\infty$.

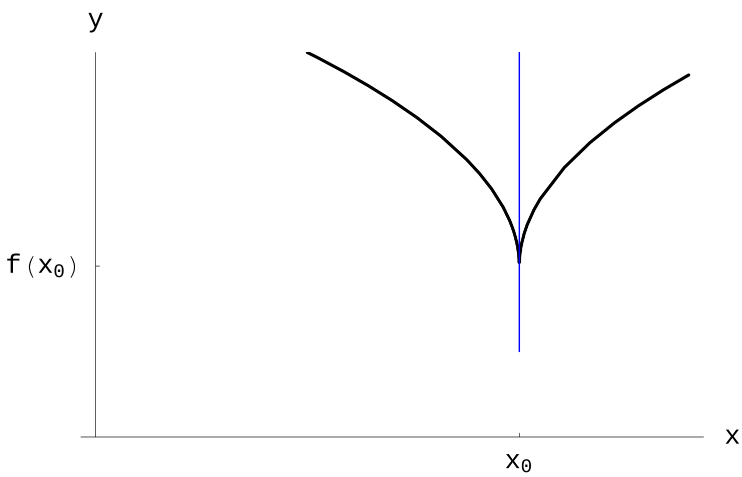


Figura 19: Diagramma cartesiano di una funzione con $f_{-}(x_0) = -\infty$. $f_{+}(x_0) = +\infty$.

Il rapporto incrementale della (47) relativo al punto $x_0 = 0$, *è:*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sin\frac{1}{x}$$

Come è noto, la funzione $\sin(x^{-1})$ *non è regolare in* $x_0 = 0$. *Quindi il grafico della funzione (47) è privo di retta tangente nell'origine.*

Esercizio 20 *Provare che il grafico della funzione:*

$$f(x) = x\arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0 \tag{48}$$
$$f(x) = 0, \quad x = 0$$

ha un punto angolo nell'origine. Scrivere quindi le equazioni delle due semirette tangenti.

Soluzione 21 *Iniziamo col verificare la continuità di* $f(x)$ *in* $x_0 = 0$. *Risulta:*

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 0\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

donde la continuità in x_0. *Possiamo quindi determinare le derivate:*

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2}$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^-}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

donde l'asserto. Le equazioni richieste sono:

$$y = \frac{\pi}{2}x, \quad \textit{semiretta tangente a destra}$$
$$y = -\frac{\pi}{2}x, \quad \textit{semiretta tangente a sinistra}$$

Il grafico è in figura 20

1.3 Differenziale

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo (a, b). Se la funzione è derivabile in $x_0 \in (a, b)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{49}$$

Nella (49) è:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \tag{50}$$

che per un assegnato x_0 è una funzione di Δx. In tal modo $\Delta f(\Delta x)$ è un infinitesimo nel limite $\Delta x \to 0$. Precisamente: un infinitesimo di ordine superiore a Δx, se $f'(x_0) = 0$, dello

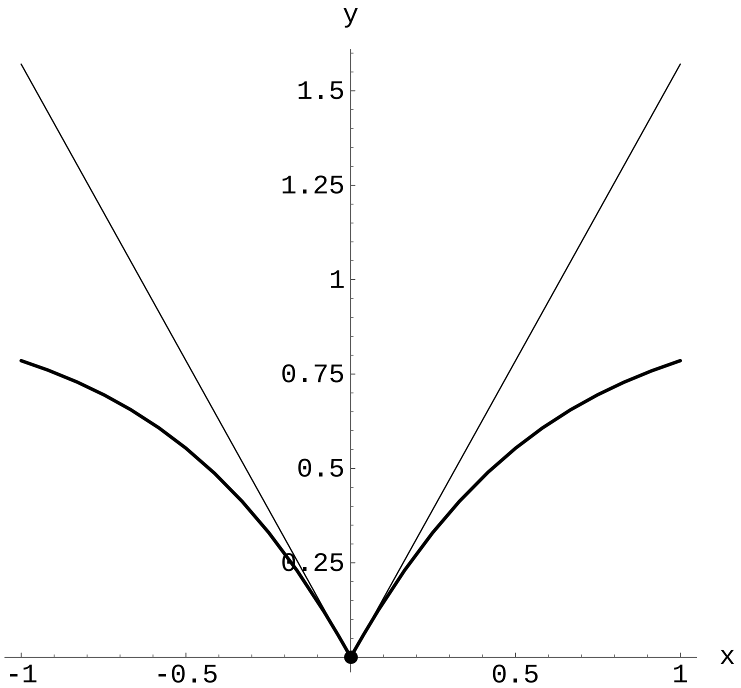


Figura 20: Diagramma cartesiano della funzione data dall'equazione (48)

stesso ordine, se $f'(x_0) \neq 0$. Inoltre, dalla teoria degli infinitesimi sappiamo che la funzione lineare di Δx:

$$p_1(\Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x, \tag{51}$$

è la parte principale dell'infinitesimo Δf. La differenza:

$$f_1(\Delta x) = \Delta f - f'(x_0)\,\Delta x, \tag{52}$$

è un infinitesimo di ordine superiore a Δx. Quindi l'incremento della funzione $f(x)$ si decompone:

$$\Delta f = \underbrace{f'(x_0)\,\Delta x}_{\text{p.p}} + \underbrace{f_1(\Delta x)}_{\text{infinit. sup.}} \tag{53}$$

Definizione 22 *La parte principale $p_1(\Delta x)$ dell'infinitesimo Δf, è* ***il differenziale della funzione*** *$f(x)$* ***nel punto*** *x_0 e si indica con df:*

$$df \overset{def}{=} f'(x_0)\,\Delta x$$

L'arbitrarietà del punto x_0 implica:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ df &= f'(x)\,\Delta x \end{aligned} \tag{54}$$

Osservazione 23 *Se $f(x) = x$, la seconda delle (54) si scrive:*

$$dx = \Delta x$$

In altri termini, il differenziale della variabile indipendente coincide con il suo incremento. Quindi la seconda delle (54) diventa per qualunque funzione $f(x)$ derivabile:

$$df = f'(x)\, dx \tag{55}$$

Utilizzando la **notazione di Landau**[3], la (53) si scrive:

$$\Delta f = df + o(dx) \tag{56}$$

Per quanto detto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Applicando la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < \Delta x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |o(\Delta x)| < \varepsilon |\Delta x|$$

In altri termini, intorno al punto $\Delta x = 0$ è definitivamente $|o(\Delta x)| < \varepsilon |\Delta x|$, per ogni $\varepsilon > 0$. Tale circostanza ci permette di trascurare nella (56) il termine di ordine superiore $o(\Delta x)$ in un intorno sufficientemente piccolo di $\Delta x = 0$. Abbiamo perciò l'uguaglianza approssimata:

$$\Delta f = df, \tag{57}$$

valida per $|\Delta x| < \delta_\varepsilon$. Nel limite di validità della (57), l'incremento Δf della funzione $f(x)$ risulta essere una funzione lineare dell'incremento Δx della variabile indipendente. Tale approssimazione è perciò nota come **linearizzazione della funzione** $f(x)$ ed ha un'interpretazione geometrica immediata. Indichiamo (figura 1.3) con M un generico punto della retta tangente nelle immediate vicinanze del punto $P(x, f(x))$. Il differenziale df si indentifica con $y_M - f(x)$ quando l'ascissa di M assume il valore $x + \Delta x$.

1.4 Regole di derivazione

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $X \subset \mathbb{R}$. Dalla (55):

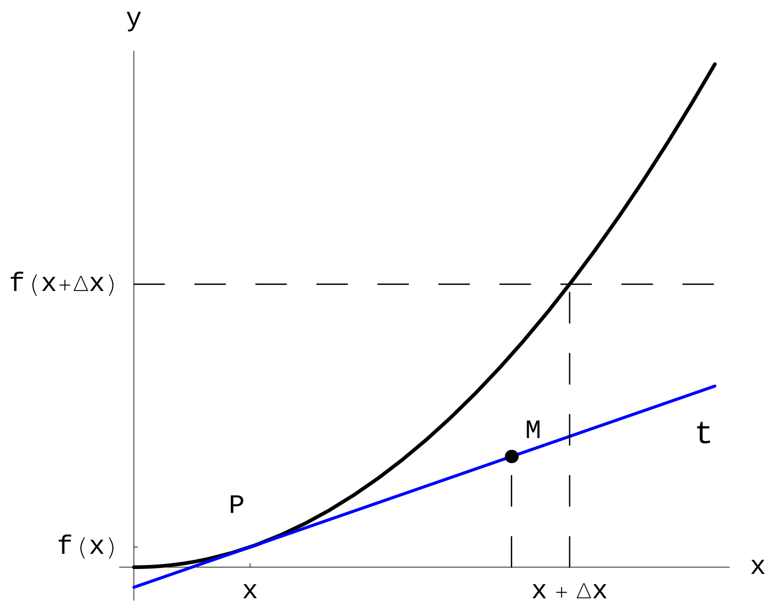
$$f'(x) = \frac{df}{dx} \tag{58}$$

Tale equazione esprime la derivata prima utilizzando la cosiddetta *notazione differenziale*. Tenendo poi conto che $y = f(x)$, si scrive:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{59}$$

Alternativamente:

[3]Se $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $h(x)$, si scrive: $g = o(h)$. Se invece è dello stesso ordine: $g = O(h)$.



$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \qquad (60)$$

La (60) definisce l'**operatore di derivazione**, già introdotto in una sezione precedente:

$$D = \frac{d}{dx} \qquad (61)$$

Abbiamo:

$$Df(x) = f'(x) \qquad (62)$$

D è un operatore, quindi il significato della (63) è: *il risultato dell'applicazione dell'operatore D è la funzione $f'(x)$.*
Nell'ipotesi in cui la derivata $f'(x)$ sia a sua volta una funzione derivabile in X (senza perdita di generalità), è possibile definire la derivata di $f'(x)$ ovvero la **derivata seconda** di $f(x)$:

$$D(f'(x)) = f''(x) \qquad (63)$$

Tenendo conto delle equazioni (23)-(24), è possibile definire l'operazione di derivazione n-*esima:*

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x) \qquad (64)$$

Evidentemente:

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n} \qquad (65)$$

Definizione 24 *La funzione $f(x)$ è indefinitamente derivabile in X se $\forall n \in \mathbb{N}, \exists f^{(n)}(x)$.*

***

L'operatore (63) è lineare:

- Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni derivabili in X:

$$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x) \tag{66}$$

- Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$D(\lambda f(x)) = \lambda D(f(x)) \tag{67}$$

***

Applicando la definizione di derivata, si dimostrano le seguenti *regole di derivazione:*

- Derivata del prodotto[4].

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{68}$$

- Derivata del rapporto.

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \tag{69}$$

- Derivata della reciproca.

  Ponendo $f(x) = 1$ nella (69):

$$D\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2},$$

  o ciò che è lo stesso:

$$D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \tag{70}$$

- Derivata della funzione composta.

  Se $x = x(t)$, allora $f(x(t))$. Applicando la definizione di derivata, è facile convincersi che:

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{71}$$

***

Applicando la definizione di derivata è possibile determinare le derivate delle principali funzioni lineari. Riportiamo di seguito tali derivate:

[4]In tal senso la (66) esprime la regola di derivazione della somma due funzioni, immediatamente generalizzabile a n funzioni.

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x > 0)$
$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$
$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$
$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}\text{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln x$

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$
$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$, $(x > 0, a > 0)$
$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$
$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$
$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$\frac{d}{dx}\coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\frac{d}{dx}\text{Arcsinh}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\frac{d}{dx}\text{Arccosh}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(x > 1)$
$\frac{d}{dx}\text{Arctanh}x = \frac{1}{1-x^2}$, $(|x| < 1)$
$\frac{d}{dx}\text{Arccoth}x = -\frac{1}{x^2-1}$, $(|x| > 1)$

1.5 Esercizi proposti

1.5.1 Introduzione

1. Determinare la velocità media di variazione della funzione $f(x) = x^4$ nell'intervallo $[a, b]$. Si consideri $a = 1$, $b = 4$.

2. L'equazione oraria del moto di una particella è $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$, essendo t il tempo espresso in secondi, e s l'ascissa curvilinea espressa in centimetri. Determinare la velocità media nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ con $t_1 = 1\,\text{s}$, $t_2 = 5\,\text{s}$.

3. Determinare in $x = 1$ il rapporto incrementale della funzione $f(x) = 2^x$. Graficare il rapporto così ottenuto su carta millimetrata.

4. Sia $T(t)$ la temperatura istantanea di un corpo in un ambiente a temperatura più in bassa. Dare la definizione di: 1) *velocità media di raffredamento*; 2) *velocità istantanea di raffredamento.*

5. Si modellizzi una barra non omogenea attraverso un segmento di lunghezza L. Introducendo un riferimento cartesiano della retta contenente tale segmento, risulta che la massa della barra è una funzione $m(x)$ con $x \in [0, L]$. Determinare: 1) l'espressione della densità lineare media nell'intervallo $[x, x + \Delta x]$; 2) l'espressione della densità lineare in $x \in [0, L]$.

6. Assegnata la funzione $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$ e i punti $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, determinare (applicando le regole di derivazione) $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$.

7. Sia $f(x) = x^3$. Come è noto, tale funzione è definita in $\mathbb{R}$. Determinare in punti $x \in \mathbb{R} : f'(x) = f(x)$.

8. Una particella si muove con equazione oraria $s(t) = 2e^{-t}$, essendo t il tempo espresso in s, e s l'ascissa curvilinea espressa in cm. Determinare: a) la velocità della particella a $t_1 = 3\,\text{s}$; b) l'ascissa $s(t)$ dopo un tempo infinitamente lungo.

9. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $y = \sin x$ nel punto $(\pi, 0)$.

10. Assegnate le due funzioni:

$$f_1(x) = \frac{1}{x},\ f_2(x) = 2x$$

scrivere le equazioni delle rette tangenti alle curve $\Gamma_1) y = f_1(x)$, $\Gamma_2) y = f_2(x)$ nel punto $P_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Determinare poi la misura in gradi dell'angolo tra le suddette tangenti.

1.5.2 Differenziale

1. Assegnata la funzione:

$$f(x) = 3x^2 - x$$

Determinare il differenziale di f nonché l'incremento Δf per $x = 1$, $\Delta x = 10^{-2}$.

2. Indicando con x la misura del lato di un quadrato, la sua superficie sarà data da:

$$S(x) = x^2$$

Determinare il differenziale e l'incremento della funzione $S(x)$ dandone un'interpretazione geometrica, determinando poi gli eventuali valori di x per i quali nel limite per $\Delta x \to 0$, l'incremento ΔS non è equivalente al differenziale dS.

3. Si dimostri che nel limite per $|\Delta x| \to 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\Delta x} &\backsimeq \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \\ \sqrt[3]{x+\Delta x} &\backsimeq \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned} \tag{72}$$

4. Un resistore R è attraversato da una corrente di intensità I. Determinare approssimativamente la variazione dell'intensità di corrente causata da fluttuazioni di R.

1.5.3 Derivazione di funzioni algebriche

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. $f(x) = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$
3. $f(x) = -\frac{5x^3}{a}$
4. $f(t) = at^m + bt^{m+n}$
5. $s(t) = (t^2 - 3)^4$
6. $f(x) = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$
7. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$
8. $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0.5x^4$

9. $f(x) = (1-5x)^6$
10. $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$
11. $f(x) = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$
12. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$
13. $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$
14. $f(x) = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$
15. $f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}}$
16. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$
17. $f(x) = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$
18. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$
19. $f(x) = x^p \sqrt[n]{x^m}$
20. $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2}$
21. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$
22. $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$
23. $f(x) = \frac{1}{x^p \sqrt[n]{x^m}}$
24. $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$
25. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$
26. $f(x) = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$
27. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$
28. $f(x) = (x^2 + 4)(2x^2 - 1)^3$
29. $f(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$
30. $f(x) = \frac{a+bx}{a_1+b_1x}$
31. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$
32. $f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$
33. $f(x) = \frac{ax^6+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
34. $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$

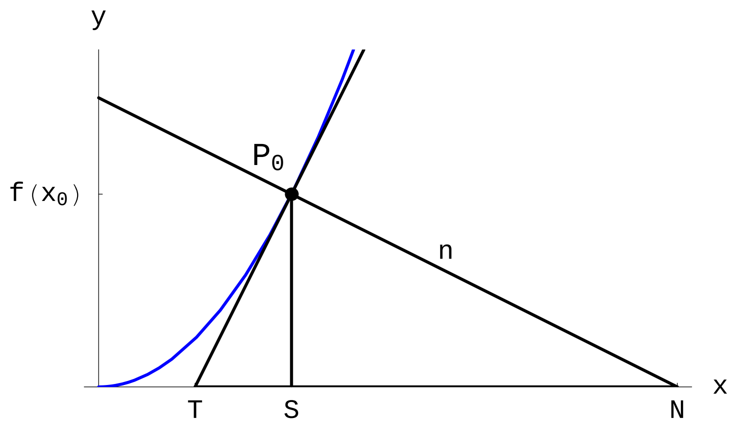


Figura 21: Diagramma cartesiano della funzione $f(x)$.

35. $f(x) = 2x^2\sqrt{2-x}$
36. $f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$
37. $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$
38. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$
39. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$
40. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
41. $f(x) = (x^2+3)^4(2x^3-5)^3$
42. $f(x) = \frac{x^2+2}{3-x^2}$
43. $f(x) = \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$

1.5.3.1 Applicazioni geometriche

1.5.3.1.1 Definizioni Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[a,b]$. Supponiamo che la funzione sia ivi derivabile.
Assegnato il riferimento monometrico ortogonale $R(0xy)$, indichiamo con Γ il diagramma cartesiano della funzione. Preso ad arbitrio $x_0 \in [a,b]$, consideriamo il punto $P_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$. Quindi tracciamo la retta tangente e la retta normale a Γ in P_0 (vedere fig. 21).
Le equazioni delle suddette rette sono:

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \end{aligned} \tag{73}$$

Ciò premesso, abbiamo la seguente

Definizione 25 $S_t = \overline{TS}$ = *lunghezza della sottotangente*
$S_n = \overline{SN}$ = *lunghezza della sottonormale*
$n = \overline{P_0 N}$ = *lunghezza della normale.*

Risulta:

$$\overline{P_0 S} = |f(x_0)|$$
$$\frac{\overline{P_0 S}}{\overline{TS}} = |f'(x_0)|,$$

donde le lunghezze sopra definite si esprimono in funzione di $f(x_0)$ e di $f'(x_0)$:

$$S_t = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \tag{74}$$
$$S_n = |f(x_0) f'(x_0)|$$
$$n = |f(x_0)| \sqrt{1 + f'(x_0)^2}$$

***

1. Assegnata l'equazione:
$$x^2 - xy + y^2 = 27, \tag{75}$$
esplicitare la variabile y, ottenendo l'espressione analitica di due funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$. Determinare le coordinate dei punti in cui la retta tangente è: a) parallela all'asse x; b) parallella all'asse y.

2. Assegnata la curva Γ di equazione $y = f(x)$ con:
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4,$$
scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale a Γ in $P_0(x_0 = 2, y_0 = 4)$

3. Assegnata la curva di equazione:
$$x^2 + 3xy + y^2 = 5, \tag{76}$$
a) determinare i punti P nei quali la retta tangente è parallela all'asse x; b) scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale in $P_0(x_0 = 1, y_0 = 1)$.

4. Si consideri l'ellisse Γ di equazione:
$$4x^2 + 9y^2 = 40 \tag{77}$$
Scrivere le equazioni delle tangenti a Γ con coefficiente angolare $m_0 = -2/9$.

5. Scrivere l'equazione della retta tangente tracciata dal punto $P_1(x_1 = 2, y_1 = -2)$ all'iperbole Γ di equazione:
$$x^2 - y^2 = 16 \tag{78}$$

6. Assegnate le curve $\Gamma_1)\ y = f_1(x)$ e $\Gamma_2)\ y = f_2(x)$ con:
$$f_1(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \tag{79}$$
$$f_2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - x - 1,$$
scrivere le equazioni delle rette parallele all'asse y passanti per i punti di Γ_k tali che le rispettive tangenti sono parallele.

7. Assegnata la parabola:
$$y^2 = 2px, \tag{80}$$
dimostrare che l'equazione della generica retta tangente è
$$y = mx + \frac{p}{m}, \text{ per } m \neq 0$$

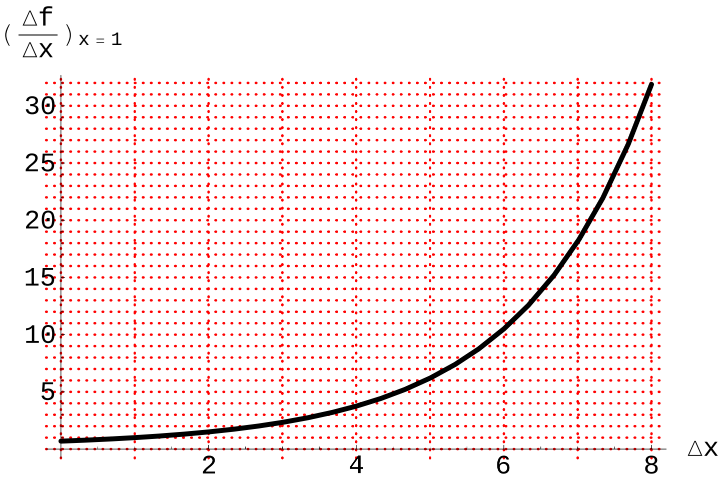
8. Assegnata la curva $y = f(x)$ con:
$$f(x) = \frac{5 - 2x}{x - 1}, \tag{81}$$
determinara la lunghezza della sottotangente, della sottonormale e della normale in $P_0(x_0, f(x_0))$ essendo $x_0 = 2$.

9. Determinare l'angolo acuto sotto cui si intersecano le due curve:
$$\Gamma_1)\ y^2 = 4x$$
$$\Gamma_2)\ 2x^2 = 12 - 5y$$

10. Assegnate le curve $\Gamma_k) y = f_k(x)$ con $k = 1, 2$ e:
$$f_1(x) = x^3 + 2 \tag{82}$$
$$f_2(x) = 2x^2 + 2,$$
provare che esse hanno una tangente orizzantale in comune nel punto $P_1(x_1 = 0, y_1 = 2)$ e che nel punto $P_2(x_2 = 2, y_2 = 10) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ le tangenti formano un angolo $\beta = \arctan \frac{4}{97}$.

11. Si consideri la curva di equazione $y = 2x^3 + 12x^2 + 5x + 9$. Si determinino le coordinate cartesiane dei punti di tale curva in cui la retta tangente passa per l'origine del riferimento cartesiano.

12. Assegnate le circonferenze:
$$\gamma_1)\ x^2 + y^2 - 4x = 0, \ \ \gamma_2)\ x^2 + y^2 = 8, \tag{83}$$
determinare l'angolo acuto di interesezione.



1.5.4 Soluzioni

1.5.4.1 Introduzione

1. La velocità media di variazione è il rapporto incrementale:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^4-a^4}{b-a}=\left(b^2+a^2\right)(b+a)$$

   Per $a=1$, $b=4$:

$$\left.\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|_{(a,b)=(1,4)}=85$$

2. La velocità media della particella è il rapporto incrementale della funzione $s(t)$. Abbiamo:

$$\Delta s=s(t_2)-s(t_1)=70-10=60$$

   L'incremento della variabile indipendente è $\Delta t=t_2-t_1=4\,\mathrm{s}$, donde la velocità media:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=15\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

3. L'incremento della funzione è:

$$\Delta f=2^{x+\Delta x}-2^x=2^x\left(2^{\Delta x}-1\right)$$

   Il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=2^x\frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

   Nel punto $x=1$:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x=1}=\frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

   il cui grafico è in figura 3.

4. La velocità media di raffredamento è il rapporto incrementale della funzione $T(t)$:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t},$$

mentre la velocità istantanea di raffredamento è la derivata di $T(t)$ che viene indicata con il simbolo $\dot{T}(t)$[5]. Quindi:

$$\dot{T}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}$$

5. La densità lineare media è il rapporto incrementale di $m(x)$ relativo all'incremento Δx. Quindi, la sua espressione è:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}$$

La densità lineare è la derivata di $m(x)$:

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x} \tag{84}$$

Esprimendo m in g, e la lunghezza in cm, la densità (84) risulta essere espressa in $\text{g}\cdot\text{cm}^{-1}$.

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\rho(x)=\frac{dm}{dx}$$

Quindi:

$$dm=\rho(x)\,dx \tag{85}$$

La (85) ha una semplice interpretazione fisica: $\rho(x)\,dx$ è la massa elementare contenuta nel segmento infinitesimo di estremi x e $x+dx$.

6. Risulta:

$$f'(x)=2(x-2)^2\left(3x^3-8x^2+6x-1\right)$$

Quindi:

$$f'(0)=-8,\ f'(1)=f'(2)=0$$

7. La derivata prima è:

$$f'(x)=3x^2$$

La richiesta è:

$$f'(x)=f(x)\Longleftrightarrow 3x^2=x^3,$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1=0\ (\text{molteplicità } 2)$$
$$x_2=3$$

[5] Si legge T *punto*. È utilizzato il punto al posto dell'apice ogni volta che la variabile indipendente è il tempo t.

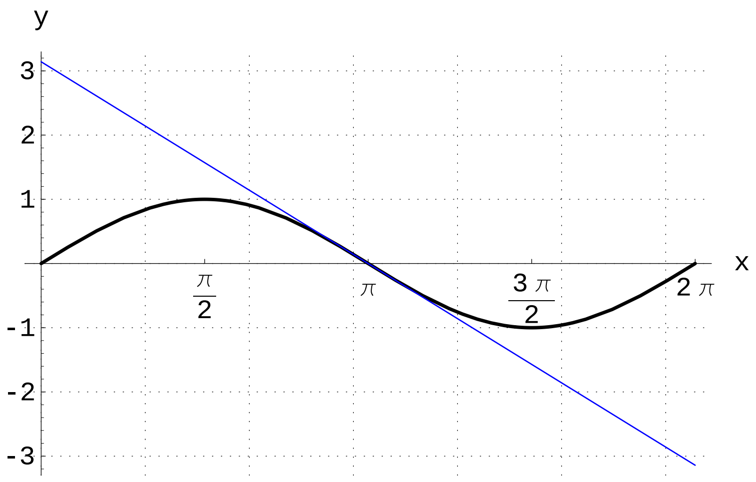


Figura 22: Grafico di $\Gamma) y = \sin x$ e della retta tangente a Γ in $(\pi, 0)$.

8. La velocità è:

$$\dot{s}(t) = -2e^{-t}$$

A $t = t_1$:

$$\dot{s}_1 = \dot{s}(t_1) = -\frac{2}{e^3}$$

La posizione della particella a $t = +\infty$:

$$s_\infty = \lim_{t \to +\infty} s(t) = -2 \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$$

Da ciò segue che la particella si muove nel verso delle ascisse decrescenti impiegando un tempo infinito a raggiungere l'origine delle coordinate.

9. La derivata è $f'(x) = \cos x$, da cui $m_0 = -1$. Quindi l'equazione della tangente:

$$x + y - \pi = 0$$

Il grafico è in figura 9.

10. Determiniamo le coordinate del punto $P_0(x_0, y_0) = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

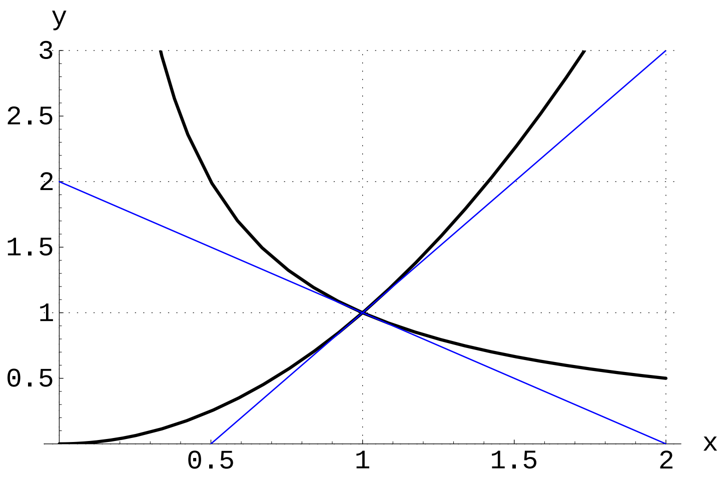
$$x^2 = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = 1$$

Quindi è $P_0(1, 1)$ .Le derivate sono:

$$f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f_2'(x) = 2x$$

Da cui i coefficienti angolari delle rette tangenti:

$$m_1 = -1, \quad m_2 = 2$$



Le misure in radianti degli angoli tra l'asse x e le singole tangenti $(t_1,\, t_2)$:

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4},\ \theta_2 = \arctan 2$$

La misura in radianti dell'angolo tra t_1e t_2 :

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arctan 2 + \frac{\pi}{4}$$

In gradi:

$$\Delta\theta = 108^\circ\ 26'.1$$

Il grafico è in figura 10.

1.5.4.2 Differenziale

1. Risulta:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x)\\ &= \left[3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)\right] - \left(3x^2 - x\right)\end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di Δf nelle potenze di Δx è

$$\Delta f = (6x-1)\,\Delta x + 3\,(\Delta x)^2$$

donde:

$$df = (6x-1)\,\Delta x$$

Per $x = 1$, $\Delta x = 10^{-2}$:

$$df = 5\times 10^{-2},\ \Delta f = 5\times 10^{-2} + 3\times 10^{-4}$$

Il grafico è in figura 23.

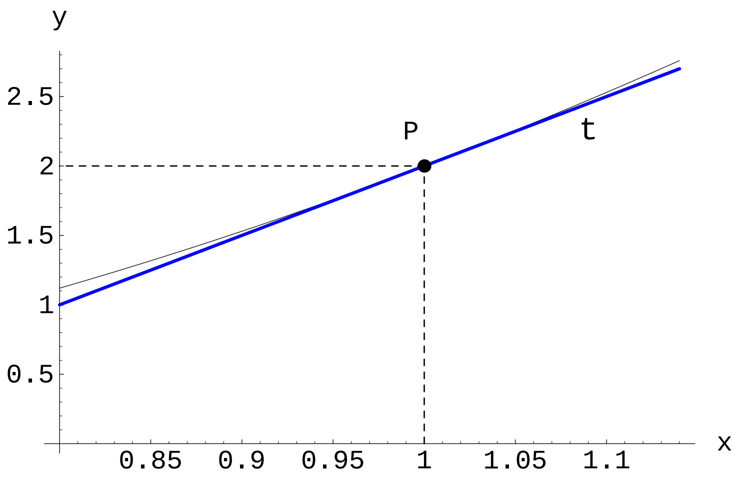


Figura 23: Grafico di $f(x) = 3x^2 - x$, con retta tangente nel punto $P(x = 1, y = f(1))$.

2. L'incremento di $S(x)$ è:

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(x + \Delta x) - S(x) \\ &= (x + \Delta x)^2 - x^2, \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di ΔS nelle potenze di Δx è

$$\Delta S = (2x)\,\Delta x + (\Delta x)^2 \tag{86}$$

Il differenziale:

$$dS = 2x\Delta x$$

L'interpretazione geometrica è in 24.

Dalla (86) segue che per $x = 0$, è:

$$\Delta S = (\Delta x)^2$$

Quindi per $x = 0$ la funzione $S(x)$ non è linearizzabile.

3. Iniziamo con la prima delle (72), ponendo:

$$f(x) = \sqrt{x},$$

il cui differenziale è:

$$df = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}},$$

donde:

$$\Delta f \backsimeq \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \qquad \text{per} \quad |\Delta x| \to 0$$

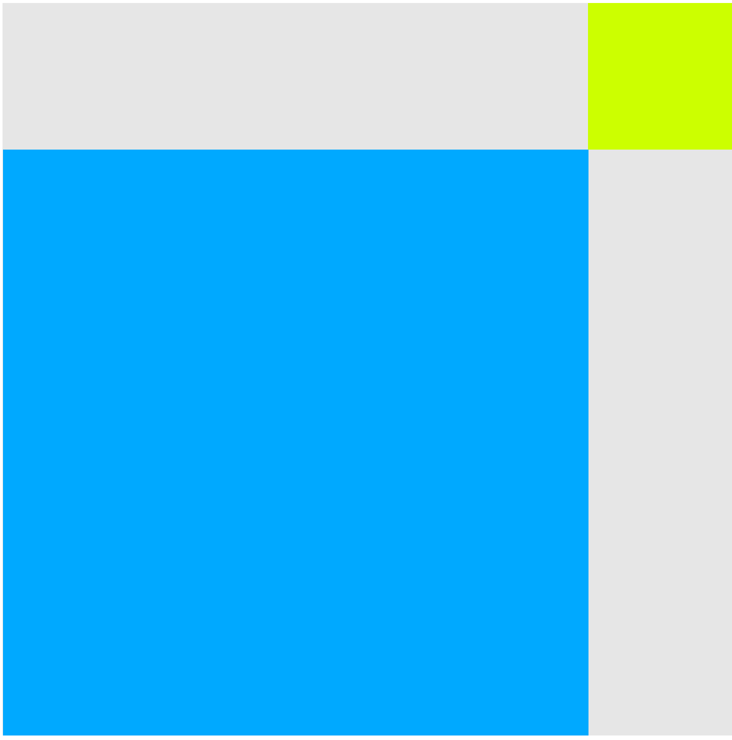


Figura 24: Il rettangolo azzurro ha lato di misura x, quindi superficie $S(x) = x^2$. Se la variabile indipendente varia da x a $x + \Delta x$, la superficie varia di $\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. La grandezza $2x\Delta x$ è la somma delle superfici in grigio, mentre l'infinitesimo di ordine superiore $(\Delta x)^2$ è la misura della superficie del rettangolino verde.

cioè la prima delle (72). Per la seconda, poniamo:

$$g(x) = \sqrt[3]{x},$$

il cui differenziale è:

$$dg = \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x}},$$

donde:

$$\Delta g \backsimeq \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x}}$$

cioè la seconda delle (72).

4. Per la legge di Ohm:

$$I = \frac{V}{R}, \tag{87}$$

essendo V la differenza di potenziale ai capi di R. Abbiamo:

$$dI = -\frac{V}{R^2}dR = -I\frac{dR}{R},$$

donde nel limite per $\Delta R \to 0$:

$$\Delta I \backsimeq -\frac{I}{R}\Delta R$$

1.5.4.3 Derivazione di funzioni algebriche

1. $f'(x) = 2ax + b$
2. $f'(x) = 5x^4 + 20x^3 - 20x = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$
3. $f'(x) = -\frac{15x^2}{a}$
4. $f'(x) = amt^{m-1} + (m+n)\,bt^{(m+n)-1}$
   $= t^{m-1}\left[am + b(m+n)\,t^n\right]$
5. $\dot{s}(t) = 4(t^2-3)^3 \cdot 2t = 8t(t^2-3)^3$
6. $f'(x) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$
7. $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2$
8. $f'(x) = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$
9. $f'(x) = 6(1-5x)^4 \cdot (-5) = -30(1-5x)^4$
10. $f'(x) = 4(3x - x^3 + 1)^3(3 - 3x^2) = 12(1-x^2)(3x - x^3 + 1)^3$
11. $f'(x) = \frac{1}{2}(3 + 4x - x^2)^{-1/2}(4 - 2x) = \frac{2-x}{\sqrt{3+4x-x^2}}$

12. $f'(x) = -\frac{1}{x2} - \frac{4}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

13. $f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}$

14. $f'(x) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2}$

15. $f(x) = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4};$
$f'(x) = -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4}$
$= -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$

16. $f'(x) = 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$

17. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} - x^{-3/2}$

18. $f(x) = 3^{1/3}x^{2/3} - \frac{1}{\sqrt{5}}x^{-1/2}$
$f'(x) = 3^{1/3}\frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$
$= \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2\sqrt{5x^3}}$

19. $f(x) = x^{p+\frac{m}{n}}$; $f'(x) = \left(p + \frac{m}{n}\right) x^{p+\frac{m}{n}-1} = \left(p + \frac{m}{n}\right) x^{p-1}x^{m/n} = \frac{np+m}{n}x^{p-1}\sqrt[n]{x^m}$

20. $(p = 2, n = 3, m = 2) \Longrightarrow f'(x) = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}$

21. $f(x) = x^{-m/n} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m+n}{n}} = -\frac{m}{nx\sqrt[n]{x^m}}$

22. $f'(x) = -\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}$

23. $f'(x) = -\left(p + \frac{m}{n}\right) x^{-\left(p+\frac{m}{n}\right)-1} = -\frac{np+m}{nx^{p+1}\sqrt[n]{x^m}}$

24. $f'(x) = -x^{-3} - 2x^{-3/2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^{3/2}}$

25. $f(x) = -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} = -x^{-3/2}\left(1 + 2x^{1/6}\right) = -\frac{1+2x^{1/6}}{x^{3/2}}$

26. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$

27. $f'(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+3}}$

28. $f'(x) = 2x\left(1 - 2x^2\right)^2\left(23 + 8x^2\right)$

29. $f'(x) = \frac{-2(3+2x)-2(3-2x)}{(3+2x)^2}$
$= -\frac{12}{(3+2x)^2}$

30. $f'(x) = \frac{b(a_1+b_1x)-b_1(a+bx)}{(a_1+b_1x)^2}$
$= \frac{a_1b-ab_1}{(a_1+b_1x)^2}$

31. $f'(x) = \frac{2\left(x^2-5x+5\right)-(2x-5)(2x+3)}{(x^2-5x+5^2)}$
$= -\frac{2x^2+6x-25}{(x^2-5x+5^2)^2}$

32. $f'(x) = -\frac{4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x^2}$

33. $f'(x) = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$

34. $f'(x) = 5\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$

35. $f'(x) = 4x\sqrt{2-x} + 2x^2\frac{(-1)}{2\sqrt{2-x}} = \frac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$

36. $f'(x) = \sqrt{3-2x^2} + x\frac{(-4x)}{2\sqrt{3-2x^2}} = \frac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$

37. $f'(x) = \sqrt{x^2-2x+2} + (x-1)\frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$
$= \frac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

38. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x\left(1+\sqrt{x}\right)}}$

39. $f'(x) = \frac{\sqrt{1-4x^2}-x\cdot\frac{(-8x)}{2\sqrt{1-4x^2}}}{1-4x^2} = \frac{1}{(1-4x^2)^{3/2}}$

40. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$

41. $f'(x) = 2x\left(x^2+3\right)^3\left(2x^3-5\right)^2\left(17x^3+27x-20\right)$

42. $f'(x) = \frac{2x\left(3-x^2\right)+2x\left(x^2+2\right)}{(3-x^2)^2} = \frac{10x}{(3-x^2)^2}$

43. $f'(x) = 4\left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^3 \frac{3x^2\left(2x^3+1\right)-6x^2\left(x^3-1\right)}{(2x^3+1)^2} = \frac{36x^2}{(2x^3+1)}\left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^3$

1.5.4.4 Applicazioni geometriche

1. Scriviamo la (75) nella forma:

$$y^2 - xy + x^2 - 27 = 0,$$

che risolta rispetto a y:

$$y = \frac{1}{2}\left[x \pm \sqrt{108-3x^2}\right]$$

Abbiamo perciò le due funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\left[x + \sqrt{108-3x^2}\right] \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\left[x - \sqrt{108-3x^2}\right] \end{aligned} \qquad (88)$$

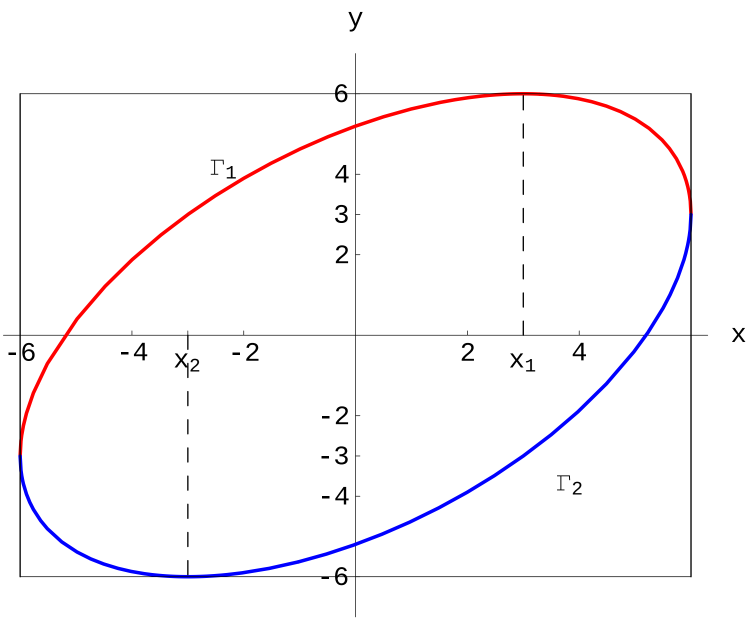


Figura 25: Grafico di Γ_k) $y = f_k(x)$.

entrambe definite in $X = [-6, 6]$. Indichiamo con Γ_k) $y = f_k(x)$ i grafici di singola funzione. Le dervate sono:

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{3x}{\sqrt{108 - 3x^2}}\right] \tag{89}$$
$$f_2'(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{3x}{\sqrt{108 - 3x^2}}\right]$$

La derivata $f_1'(x)$ si annulla in $x_1 = +3$, pertanto la retta tangente a Γ_1 è ivi parallela all'asse x. La derivata $f_2'(x)$ si annulla in $x_2 = -3$, pertanto la retta tangente a Γ_2 è ivi parallela all'asse x

Dalle (89) vediamo che per $|x| \to 6$, $|f_k(x)| \to +\infty$; quindi nei punti $x_1' = +6$, $x_2' = -6$ la retta tangente è parallela all'asse y. Il grafico è in figura 1.

2. La derivata della funzione $f(x)$ è:

$$f'(x) = 3x^2 - 4,$$

che in $x_0 = 2$ assume il valore $f'(x_0) = 4$, per cui il coefficiente angolare della retta tangente t a Γ nel punto P_0 è $m_0 = 4$. Il coefficiente angolare della retta normale nel medesimo punto è:

$$m_0' = -\frac{1}{m_0} = -\frac{1}{4},$$

da cui le equazioni delle rette t e n:

$$t)\ 4x - y - 4 = 0$$
$$n)\ x + 4y - 18 = 0$$

Il grafico è in figura 26.

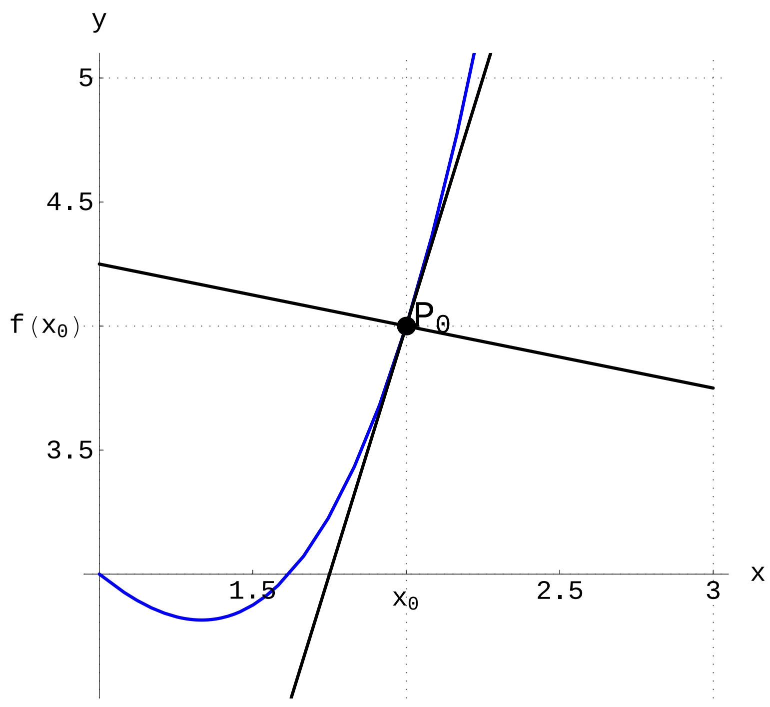


Figura 26: Grafico di Γ) $y = x^3 - 2x^2 + 4$ e delle rette t, n.

3. Esplicitando la variabile y nella (76):

$$\Gamma_k) y = f_k(x), \quad k = 1, 2$$

essendo

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[-3x + \sqrt{5(x^2+4)}\right]$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[-3x - \sqrt{5(x^2+4)}\right]$$

le derivate:

$$f_k'(x) = \frac{1}{2}\left[-3 \pm \frac{5x}{\sqrt{5(x^2+4)}}\right]$$

Risulta:

$$\nexists x \in \mathbb{R} : f_k'(x) = 0,$$

per cui:

$$\nexists P \in \Gamma_k : \text{la tangente a } \Gamma_k \text{ in } P \text{ è parallela all'asse } x$$

Le equazioni richieste:

$$\begin{aligned} t_1)\ & y = 2 - x \\ n_1)\ & y = x \\ t_2)\ & y = -4 + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{35}}\right)(x-1) \\ n_2)\ & y = -4 - \frac{2(x-1)}{1+\sqrt{\frac{3}{35}}} \end{aligned}$$

4. La (77) è equivalente a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{90}$$

essendo $a = \sqrt{10}$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{10}$, il semiasse maggiore e il semiasse minore, rispettivamente. Per scrivere le equazioni richieste, differenziamo rispetto a x, primo e secondo membro della (90):

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy = 0,$$

da cui:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{9}\frac{x}{y}$$

Indichiamo con (x_0, y_0) il punto di Γ in cui la retta tangente ha coefficiente angolare $m_0 = -2/9$. Deve essere:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = -\frac{4}{9}\frac{x_0}{y_0} = -\frac{2}{9}$$

Otteniamo quindi:

$$y_0 - 2x_0 = 0 \tag{91}$$

Inoltre:

$$(x_0, y_0) \in \Gamma \Longrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow x_0^2 - 1 = 0 \tag{92}$$

Le (91)-(92) compongono il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_0 - y_0 &= 0 \\ x_0^2 + 0 &= 1 \end{aligned} \tag{93}$$

Le soluzioni di (93) sono:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (1, 2) \\ (x_0', y_0') &= (-1, -2) \end{aligned} \tag{94}$$

Le equazioni delle tangenti a Γ per i punti (93) sono:

$$t_\pm)\ y = -\frac{2}{9}x \mp \frac{20}{9} \tag{95}$$

Il grafico è in figura 27.

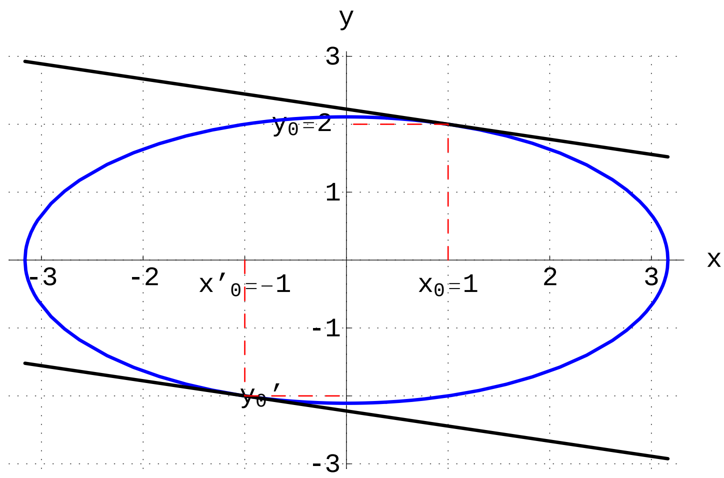


Figura 27: Grafico di Γ) $4x^2 + 9y^2 = 40$ e delle rette $t_\pm$.

5. Differenziamo rispetto a x primo e secondo membro della (78):

$$xdx - ydy = 0,$$

donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Se m_0 è il coefficiente angolare della tangente t:

$$m_0 = \frac{x_0}{y_0} \tag{96}$$

essendo (x_0, y_0) le coordinate di $P_0 = t \cap \Gamma$. L'appartenenza di tale punto a Γ implica:

$$x_0^2 - y_0^2 = 16, \tag{97}$$

che a sua volta implica:

$$x_0 + y_0 \neq 0 \tag{98}$$

Osserviamo che $P_1\,(x_1 = 2, y_1 = -2) \in t$, donde:

$$y + 2 = m_0\,(x - 2) \tag{99}$$

D'altro canto $P_0 \in t$, donde:

$$y_0 + 2 = m_0\,(x_0 - 2) \tag{100}$$

Sostituendo nella (100) il valore di m_0 dato dalla (96):

$$y_0^2 - x_0^2 + 2\,(y_0 + x_0) = 0 \tag{101}$$

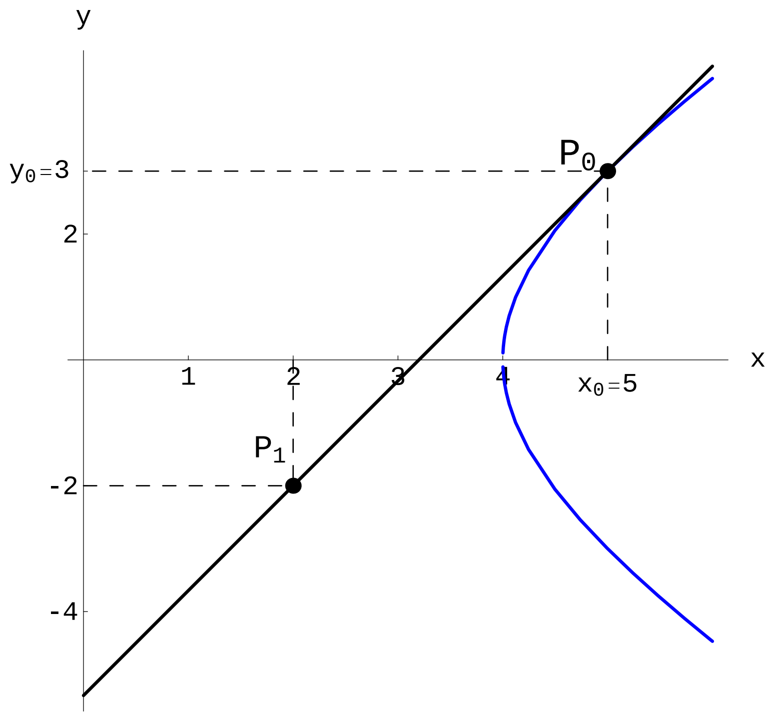


Figura 28: Grafico di Γ) $x^2 - y^2 = 16$ e della retta t.

Tenendo conto della (98), l'ultima equazione equivale a:

$$x_0 - y_0 = 2 \tag{102}$$

Le equazioni (97)-(97) compongono il sistema:

$$\begin{aligned} x_0^2 - y_0^2 &= 16 \\ x_0 - y_0 &= 2, \end{aligned} \tag{103}$$

che ammette l'unica soluzione:

$$(x_0, y_0) = (5, 3),$$

da cui l'equazione di t:

$$y = 3 + \frac{5}{3}(x - 5) \tag{104}$$

Il grafico è in figura 28.

6. Derivando le (79):

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 3x^2 + 4x - 4 \\ f_2'(x) &= 2x^2 + 6x - 1 \end{aligned} \tag{105}$$

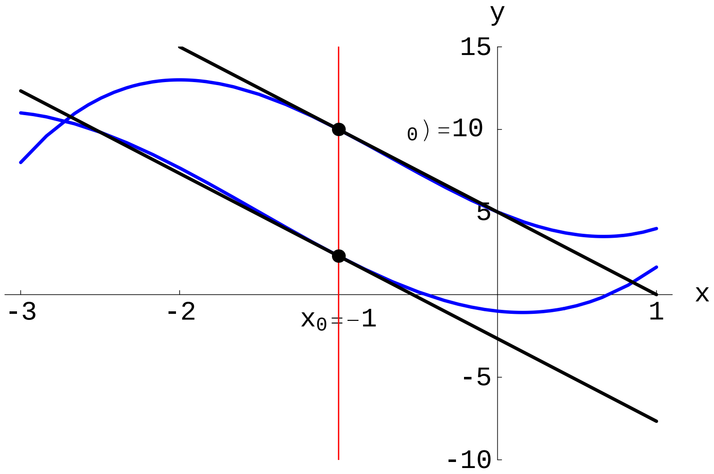


Figura 29: Grafico di Γ_1 e Γ_2 nell'intervallo $[-3, 1]$

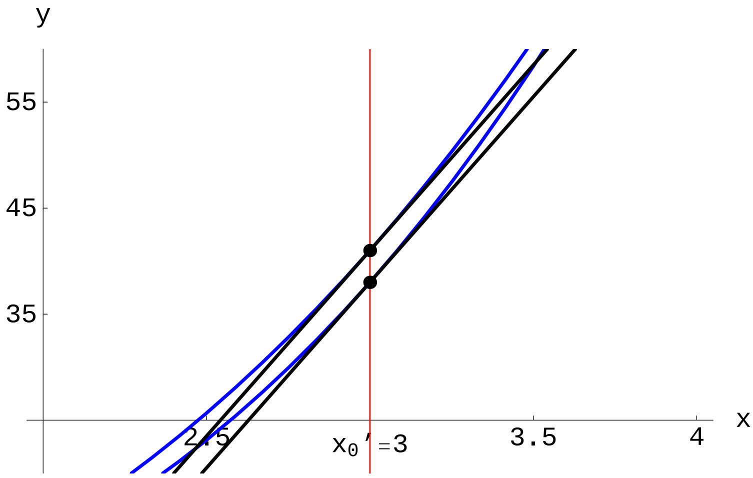


Figura 30: Grafico di Γ_1 e Γ_2 nell'intervallo $[2, 4]$

Le ascisse dei punti $P \in \Gamma_k$ tali che le rette tangenti rispettivamente a Γ_1 e Γ_2 risultano parallele, sono le soluzioni dell'equazione:

$$f_1'(x) = f_2'(x), \tag{106}$$

le cui soluzioni sono:

$$x_0 = -1, x_0' = 3$$

Quindi le equazioni richieste sono:

$$x = x_0, \ x = x_0'$$

Il grafico è in 29 - 30

7. Differenziamo rispetto a x primo e secondo membro della (80):

$$ydy = 2pdx,$$

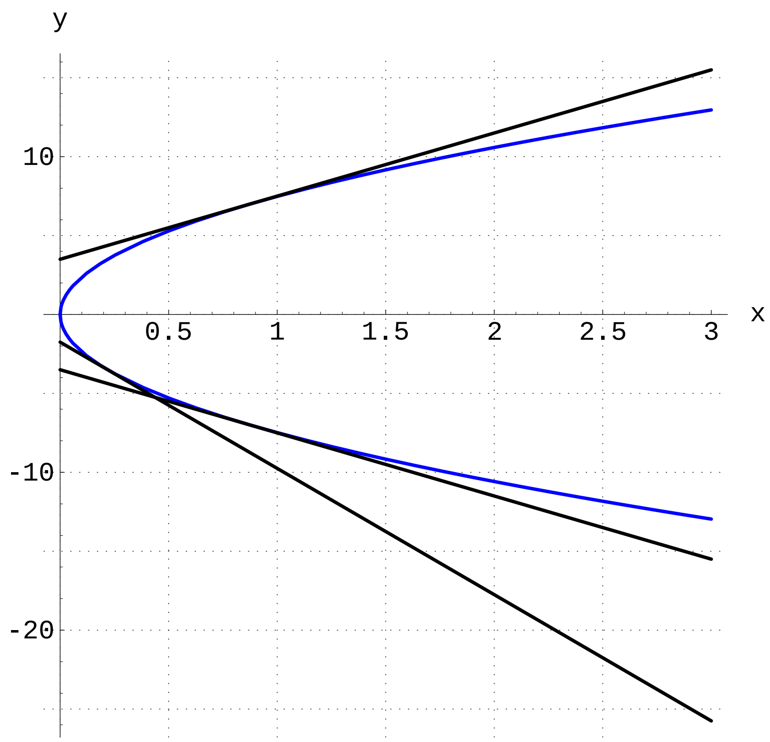


Figura 31: Grafico di $\Gamma)\ y^2 = 2px$.

quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y} = m \tag{107}$$

L'equazione della retta tangente è:

$$y = \frac{2p}{y}x + n \tag{108}$$

Risolvendo la (108) rispetto a n:

$$\begin{aligned} n &= \frac{2p}{y}x \\ &= \frac{2px}{\sqrt{4px}} \\ &= \frac{y}{2} \\ &= \frac{p}{m}, \end{aligned}$$

donde:

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

Il grafico è in figura 31.

8. La derivata di $f(x)$ è:

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$$

In $x_0 = 2$:

$$f(x_0) = 1,\ f'(x_0) = -3$$

Sostituendo nelle (74):

$$\begin{aligned} S_t &= \left| \frac{1}{-3} \right| = \frac{1}{3} \\ S_n &= |1 \cdot (-3)| = 3 \\ n &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

9. Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di interesezione di Γ_1, Γ_2; occorre risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x \\ 2x^2 &= 12 - 5y, \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono:

$$(1, 2), (4, -4)$$

Quindi i punti di intersezione sono:

$$P_1 (x_1 = 1, y_1 = 2),\ P_2 (x_2 = 4, y_2 = -4)$$

L'angolo α sotto cui si interesecano le curve altro non è che l'angolo tra le rispettive rette tangenti, donde:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, \tag{109}$$

essendo m_k i coefficienti angolari delle tangenti. Per il calcolo di m_k, poniamo:

$$f_1(x) = 2\sqrt{x}, f_2(x) = -2\sqrt{x},\ g(x) = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x^2 \tag{110}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} f_1'(x_1) &= 1 = m_1 \\ g'(x_1) &= -\frac{4}{5} = m_2, \end{aligned}$$

che sostituiti nella (109):

$$\tan \alpha = 9 \Longrightarrow \alpha \backsimeq 83^\circ.7$$

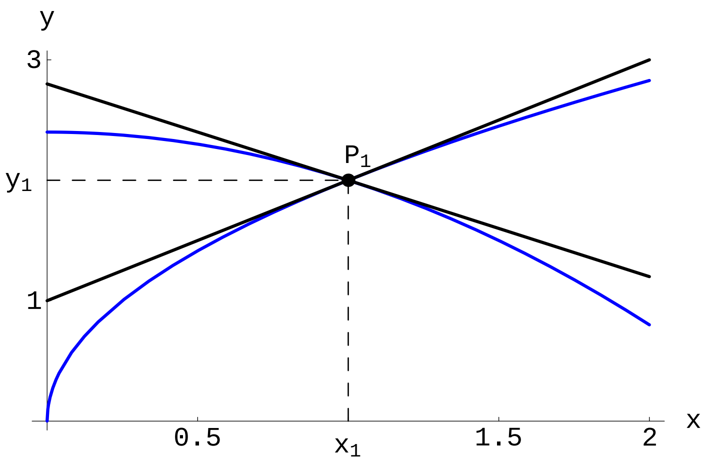


Figura 32: Intersezione in $P_1\,(x_1 = 1, y_1 = 2)$.

Nel punto P_2:

$$f_2'(x_2) = -\frac{1}{2} = m_1'$$
$$g'(x_2) = -\frac{16}{5} = m_2'$$

L'angolo di intersezione è:

$$\tan\beta = \frac{27}{26} \Longrightarrow \beta \backsimeq 46^\circ.1$$

Il grafico è in figura 32 - 33

10. Deriviamo le (82):

$$f_1'(x) = 3x^2$$
$$f_2'(x) = 4x$$

In $x_1 = 0$ si annullano entrambe: $f_1'(x_1) = f_2'(x_2) = 0$: $\alpha = \arctan\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \arctan 0 = 0$. Nel punto $x_2 = 2$:

$$f_1'(x_2) = 12 = m_1'$$
$$f_2'(x_2) = 8 = m_2',$$

donde:

$$\beta = \arctan\frac{m_1' - m_2'}{1 + m_1'm_2'}$$
$$= \arctan\frac{4}{97}$$

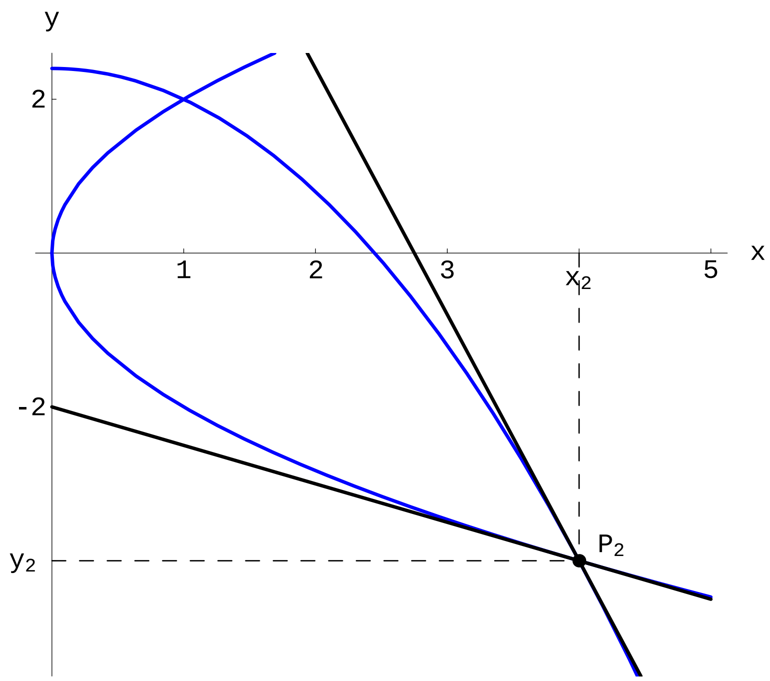


Figura 33: Intersezione in $P_2\,(x_2 = 4, y_2 = -4)$.

11. Poniamo:

$$f(x) \stackrel{def}{=} 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9, \tag{111}$$

la cui derivata è:

$$f'(x) = 6x^2 + 26x + 5$$

Nel punto $(\xi, \eta) \in \Gamma)y = f(x)$, il coefficiente angolare della retta tangente è:

$$m = 6\xi^2 + 26\xi + 5 \tag{112}$$

L'appartenenza di (ξ, η) a Γ implica:

$$\eta^2 = 2\xi^3 + 13\xi^2 + 5\xi + 9 \tag{113}$$

L'equazione della retta tangente per l'origine è:

$$t)\ y = mx$$

D'altro canto $(\xi, \eta) \in t$, donde:

$$\eta = m\xi \tag{114}$$

Le (112)-(113)-(114) compongono il sistema:

$$\begin{aligned} 2\xi^3 + 13\xi^2 + 5\xi + 9 &= \eta^2 \\ 6\xi^2 + 26\xi + 5 &= m \\ \xi &= \frac{\eta}{m}, \end{aligned} \tag{115}$$

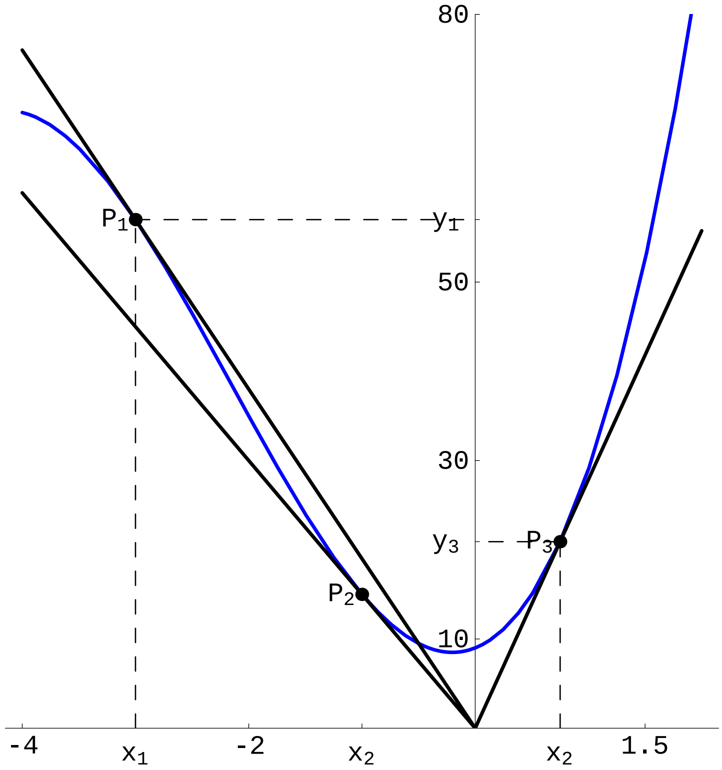


Figura 34: Grafico di Γ) $y = f(x)$ e delle rette tangenti passanti per l'origine.

Eliminando le variaibili m, η in (115):

$$4\xi^3 + 13\xi^2 - 9 = 0 \iff (\xi + 1)\left(4\xi^2 + 9\xi - 9\right) = 0,$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = \frac{3}{4} \tag{116}$$

Il grafico è in figura 34.

12. Le (83) possono essere rappresentate dalle funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\sqrt{-x^2 + 4x} \\ f_2(x) &= -f_1(x) \\ g_1(x) &= -\sqrt{8 - x^2} \\ g_2(x) &= -g_1(x) \end{aligned} \tag{117}$$

L'intersezione avviene nei punti $P_1(x_1 = 2, y_1 = -2)$, $P_2(x_2 = 2, y_2 = 2)$. Derivando le

(117):

$$f_1'(x) = -\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$
$$f_2'(x) = -f_1'(x)$$
$$g_1'(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$$
$$g_2'(x) = -g_1'(x),$$

donde i coefficienti angolari delle tangenti in P_1 :

$$m_1 = 0$$
$$m_2 = 1$$

Quindi:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

In P_2:

$$m_1' = 0$$
$$m_2' = -1$$

da cui:

$$\beta = \frac{\pi}{4}$$

Il grafico è in figura 35.

1.5.5 Derivazione di funzioni trigonometriche

1. $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$
2. $f(x) = \sin kx$
3. $f(x) = \cos 5x$
4. $f(x) = 2\sin 2x$
5. $f(x) = 4\cos\frac{x}{2}$
6. $f(x) = \tan 3x$
7. $f(x) = 4\tan 5x$
8. $f(x) = \frac{1}{4}\cot 8x$
9. $f(x) = \sin 5x - \cos 3x$
10. $f(x) = \tan x - \cot x$

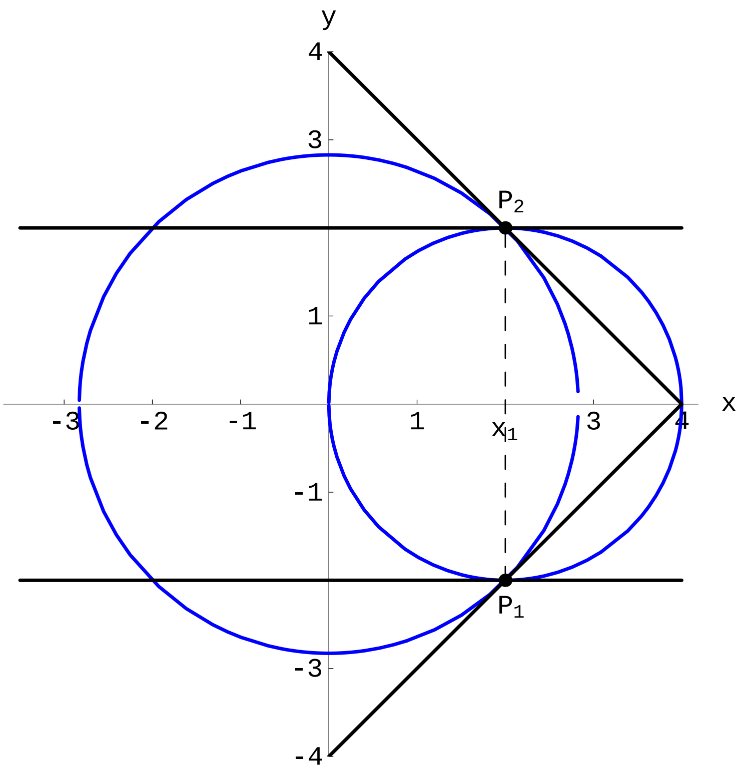


Figura 35: Grafico di γ_k e delle tangenti nei punti di intersezione.

11. $f(x) = 2\sin x - 3\tan x$
12. $f(x) = \tan x^2$
13. $f(x) = \cot(1 - 2x^2)$
14. $f(x) = \sec^3\sqrt{x}$
15. $f(x) = \sqrt{\csc 2x}$
16. $f(x) = 9\sec\frac{x}{3}$
17. $f(x) = \frac{1}{4}\csc 4x$
18. $f(x) = x^2\sin x$
19. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
20. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
21. $f(x) = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$
22. Calcolare la derivata terza di $f(x) = x\sin x$
23. Calcolare la derivata seconda di $f(x) = \tan^2(3x - 2)$
24. $f(x) = \sin x - x\cos x + x^2 + 4x + 3$

25. $f(x) = \sqrt{\sin x}$
26. $f(x) = \sin \frac{2}{x}$
27. $f(x) = \cos(1 - x^2)$
28. $f(x) = \cos(1 - x)^2$
29. $f(x) = \sin^2(3x - 2)$
30. $f(x) = \sin^3(2x - 3)$
31. $f(x) = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x$
32. $f(x) = \frac{1}{(\sec 2x - 1)^{3/2}}$
33. $f(x) = \frac{\tan(2x)}{1 - \cot(2x)}$
34. $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$
35. Sia $y(x) = A \sin kx + B \cos kx$, essendo A, B, k costanti. Mostrare che la funzione $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

36. Assegnate le curve $\Gamma_1)\ y = f_1(x)$, $\Gamma_2)\ y = f_2(x)$, essendo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 \sin^2 x \\ f_2(x) &= \cos 2x, \end{aligned} \tag{118}$$

si determinino gli angoli acuti di interesezione tra Γ_1 e Γ_2 nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

1.5.5.1 Applicazioni

1. In una data località ad un certo istante l'angolo di elevazione del sole è 45° e diminuisce di 1/4 rad/ h. Determinare la velocità di crescita dell'ombra su terreno orizzontale di un palo alto $h = 16\,\mathrm{m}$.

1.5.6 Soluzioni

1. $f'(x) = 5\cos x - 3\sin x$
2. Osserviamo che per la regola di derivazione delle funzioni composte:
$$\frac{d}{dx}\sin\phi(x) = \phi'(x)\cos x$$
Nel caso in esame: $\phi(x) = kx$:
$$f'(x) = k\cos kx$$
3. $f'(x) = -5\sin 5x$
4. $f'(x) = 4\cos 2x$
5. $f'(x) = -2\sin\frac{x}{2}$
6. $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$
7. $f'(x) = \frac{20}{\cos^2 5x}$
8. $f'(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2 8x}\cdot 8 = -\frac{2}{\sin^2 8x}$
9. $f'(x) = 5\cos 5x + 3\sin 3x$
10. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2} = \frac{4}{\sin^2 2x}$
11. $f'(x) = 2\cos x - \frac{3}{\cos^2 x}$
12. $f'(x) = \frac{2x}{\cos^2 x}$
13. $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(1-2x^2\right)\left(\frac{-1}{\sin^2(1-2x^2)}\right) = \frac{4x}{\sin^2(1-2x^2)} = 4x\cot^2\left(1-2x^2\right)$
14. $f(x) = \left(\cos\sqrt{x}\right)^{-3} \Longrightarrow f'(x) = -3\left(\cos\sqrt{x}\right)^{-4}\cdot\left(-\sin\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}\frac{\sin\sqrt{x}}{\cos^3\sqrt{x}}$
15. $f(x) = (\sin 2x)^{-1/2} \Longrightarrow$
$f'(x) = -\frac{1}{2}(\sin 2x)^{-3/2}\cdot 2\cdot\cos 2x = -\frac{\cos 2x}{(\sin 2x)^{3/2}} = -\cot 2x\sqrt{\sin 2x}$
16. $f'(x) = 9\frac{d}{dx}\left[\cos\frac{x}{3}\right]^{-1} = 9\left(\cos\frac{x}{3}\right)^{-2}\left(\sin\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = 3\frac{\sin\frac{x}{3}}{\cos^2\frac{x}{3}} = 3\sin\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}$
17. $f'(x)\,\frac{1}{4}(-1)(\sin 4x)^{-2}(\cos 4x) = -\frac{\cos 4x}{\sin^2 4x}$
18. $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$
19. $f'(x) = \frac{\sin x\cdot x-\cos x}{x^2} = \frac{x\sin x-\cos x}{x^2}$
20. $f'(x) = \frac{(\cos-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$
$= \frac{-(\sin x-\cos x)^2-(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2} = \frac{-2\sin^2 x-2\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x-\cos x)^2}$

21. $f'(x) = 2\sin x + 2x\cos x - (2x)\cos x + (x^2 - 2)\sin x = x^2 \sin x$

22. $f'(x) = \sin x + x\cos x$
    $f'(x) = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$
    $f''(x) = 2\cos x - x\sin x = 2\cos x - f(x)$
    $f'''(x) = -2\sin x - f'(x) = -2\sin x - \sin x - x\cos x = -3\sin x - x\cos x$

23. $f'(x) = 2\tan(3x-2) \cdot \frac{3}{\cos^2(3x-2)} = \frac{6\tan(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$
    $f''(x) = \frac{18+2\cos(3x-2)\sin(3x-2)\cdot 18\tan(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$
    $= \frac{18+36\sin^2(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$

24. $f'(x) = x\sin x + 2x + 4x$

25. $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

26. $f'(x) = \left(\cos\frac{2}{x}\right)\left(-\frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{2}{x}\right)$

27. $f'(x) = -\sin(1-x^2)\cdot(-2x) = 2x\sin(1-x^2)$

28. $f'(x) = -\sin(1-x)^2 \cdot 2\cdot(1-x)(-1) = 2(1-x)\sin(1-x)^2$

29. $f'(x) = 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\cdot 3 = 6\sin(3x-2)\cos(3x-2) = 3\sin(6x-4)$

30. $f'(x) = 3\sin^2(2x-3)\cos(2x-3)\cdot 2 = 6\sin^2(2x-3)\cos(2x-3)$
    $= 3\sin(4x-6)\cos(2x-3)$

31. Siamo tentati ad applicare la regola di derivazione di un prodotto. In realtà la funzione si semplifica:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\tan x \sin 2x \\ &= \frac{\sin x}{\cos x}\sin x\cos x \\ &= \sin^2 x, \end{aligned}$$

    donde:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x\cos x \\ &= \sin 2x \end{aligned}$$

32. $f'(x) = D\left[(\cos 2x)^{-1} - 1\right]^{-3/2} = -\frac{3}{2}\left[(\cos 2x)^{-1} - 1\right]^{-5/2}(\cos 2x)^{-2}\cdot 2\cdot\sin 2x$
    $= -3\frac{\sin 2x}{\cos 2x\left[(\cos 2x)^{-1}-1\right]^{5/2}} = -3\frac{\tan 2x\sec 2x}{(\sec 2x - 1)^{5/2}}$

33. $f'(x) = \frac{2\sec 2x(\sec 2x - \csc x\sec x)}{(\cot 2x - 1)^2}$

34. $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x + 2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x = x^2\cos x$

35. La derivata prima è:

$$\frac{dy}{dx} = k\left(A\cos x - B\sin kx\right)$$

La derivata seconda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2\left(A\sin kx + B\cos kx\right) = -k^2 y,$$

donde l'asserto.

36. Determiniamo innanzitutto le ascisse dei punti $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. A tale scopo risolviamo nell'intervallo $(0, 2\pi)$, l'equazione trigonometrica:

$$2\sin^2 x = \cos 2x$$

Per le formule di duplicazione l'equazione precedente diventa:

$$2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

Cioè:

$$\sin x = \pm\frac{1}{2}$$

Osservando che $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono periodiche di periodo π, è facile rendersi conto che le soluzioni nell'intervallo $(0, 2\pi)$ sono:

$$x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5}{6}\pi,\ x_3 = x_1 + \pi = \frac{7}{6}\pi,\ x_4 = x_2 + \pi = \frac{11}{6}\pi$$

Tali punti sono visibili nel grafico di figura 36, da cui vediamo che la simmetria delle curve conserva l'angolo di intersezione nei punti $P_k(x_k, y_k)$ con $k = 1, ..., 4$.
Le derivate di $f_k(x)$ sono:

$$f_1'(x) = 4\sin x\cos x$$
$$f_2'(x) = -2\sin 2x$$

I coefficienti angolari delle rette tangenti in $P_1(x_1, y_1 = 1/2)$ sono:

$$m_1 = \sqrt{3}, m_2 = -\sqrt{3}$$

Quindi l'angolo di intersezione è:

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = -\sqrt{3} \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

L'angolo acuto:

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

Il grafico è riportato in figura 37.

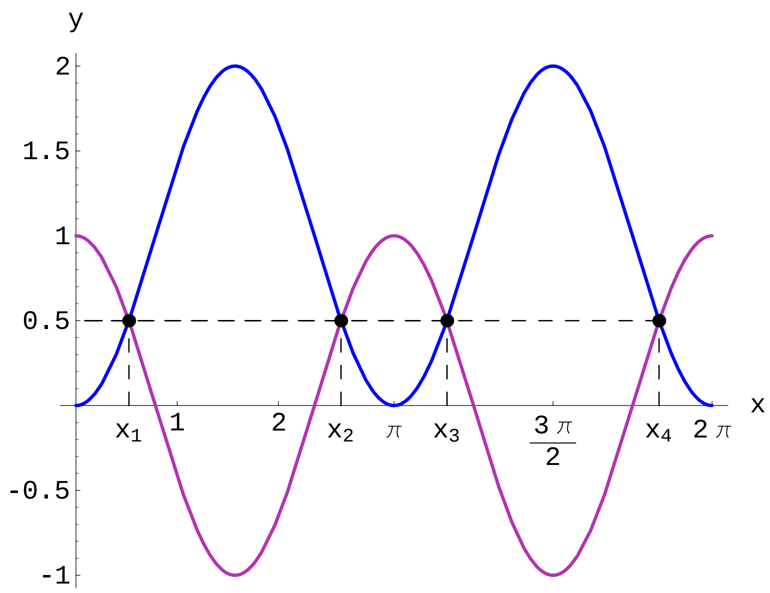


Figura 36: Grafico di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

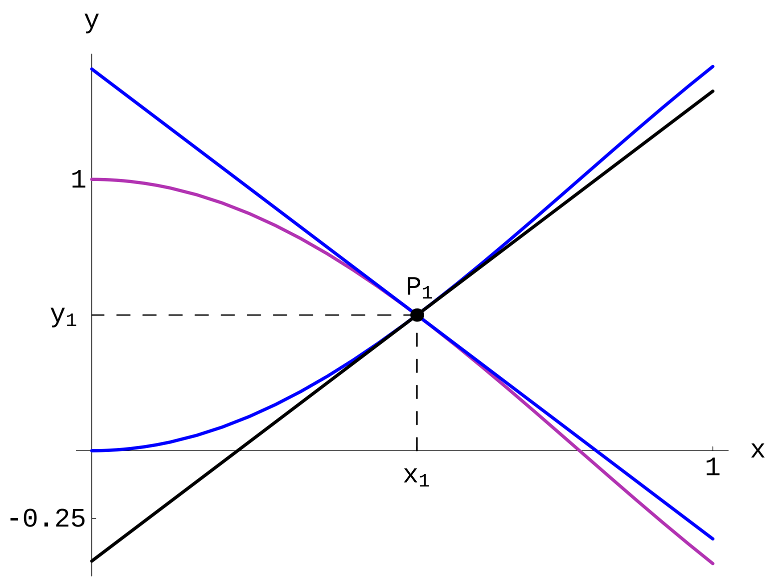


Figura 37: Grafico di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ nell'intervallo $(0, 1)$.

1.5.6.1 Applicazioni

1. Indichiamo con $L(t)$ e $\alpha(t)$ rispettivamente la lunghezza dell'ombra e l'angolo di elevazione del sole al tempo t. Assumiamo come istante iniziale $t = 0$, l'istante in cui l'angolo è $\pi/4$:

$$\alpha(0) \stackrel{def}{=} \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \tag{119}$$

Sia $h = 16\,\mathrm{m}$ l'altezza del palo. La lunghezza iniziale dell'ombra è:

$$L_0 = \frac{h}{\tan \alpha_0} = h \tag{120}$$

A tutti i tempi:

$$L(t) = \frac{h}{\tan \alpha(t)} \tag{121}$$

Quindi la velocità di crescita dell'ombra:

$$\dot{L}(t) = -\frac{h\dot{\alpha}(t)}{\sin^2 \alpha(t)} \tag{122}$$

Dobbiamo determinare $\alpha(t)$ e $\dot{\alpha}(t)$. Quest'ultima è:

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_0 = -|\dot{\alpha}_0| = -\frac{1}{4}\mathrm{rad/\,h} \tag{123}$$

Siccome $\dot{\alpha}(t)$ =const, segue che $\alpha(t)$ è lineare:

$$\alpha(t) = C_1 + C_2 t$$

C_1 e C_2 sono costanti fissate dalle condizioni iniziali:

$$C_1 = \alpha(0) = \frac{\pi}{4}$$
$$C_2 = -|\dot{\alpha}_0|,$$

donde:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{4},$$

per cui:

$$\dot{L}(t) = \frac{4}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right)} \tag{124}$$

Mentre $L(t)$:

$$L(t) = \frac{16}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right)} \tag{125}$$

Si osservi che nelle (124)-(125) il tempo t è espresso in ore e varia in $(0, \pi)$. Risulta:

$$\lim_{t\to\pi^+} L(t) = \lim_{t\to\pi^+} \dot{L}(t) = +\infty$$

Il grafico di tali funzioni è in figura 38.

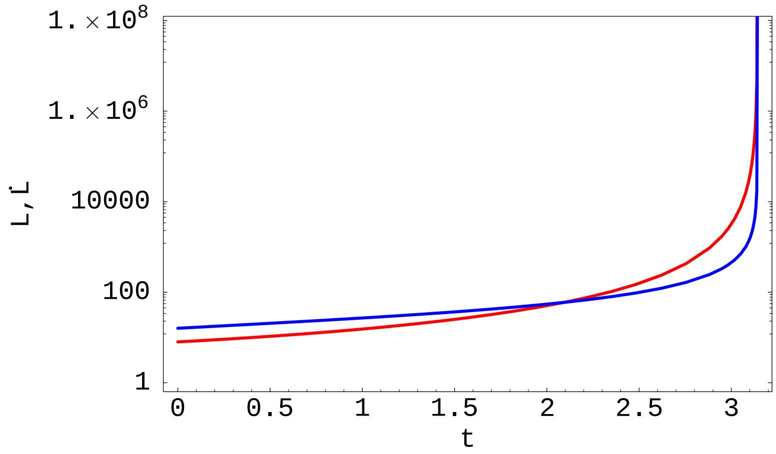


Figura 38: Grafico in scala logaritmica di $L(t)$, $\dot{L}(t)$.

1.5.7 Derivazione di funzioni trigonometriche inverse

1. $f(x) = \arcsin(2x-3)$
2. $f(x) = \arcsin(3x)$
3. $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{2}x\right)$
4. $f(x) = \arccos(x^2)$
5. $f(x) = \arctan(3x^2)$
6. $f(x) = \text{arccot}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
7. $f(x) = \text{arccot}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
8. $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
9. $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
10. $f(x) = \arctan\left(\frac{3}{x}\right)$
11. $f(x) = \arcsin(x-1)$
12. $f(x) = \arctan x + \text{arccot}\, x$
13. $f(x) = x \arcsin x$
14. $f(x) = x^2 \arccos\left(\frac{2}{x}\right)$
15. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + a^2 \arcsin \frac{x-a}{a}$
16. $f(x) = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right)$

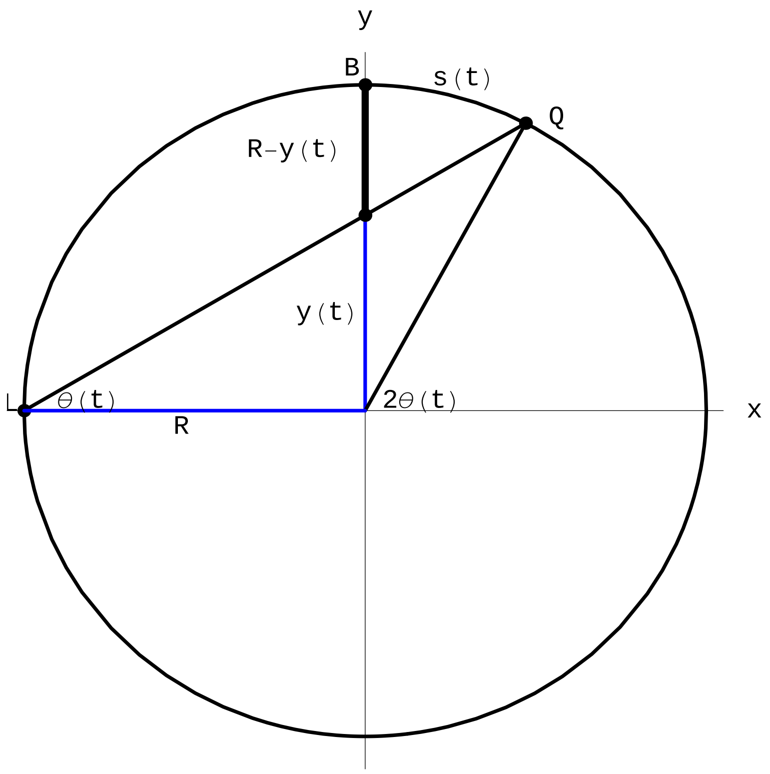


Figura 39: Esercizio 1 di 1.5.6.1

1.5.7.1 Applicazioni

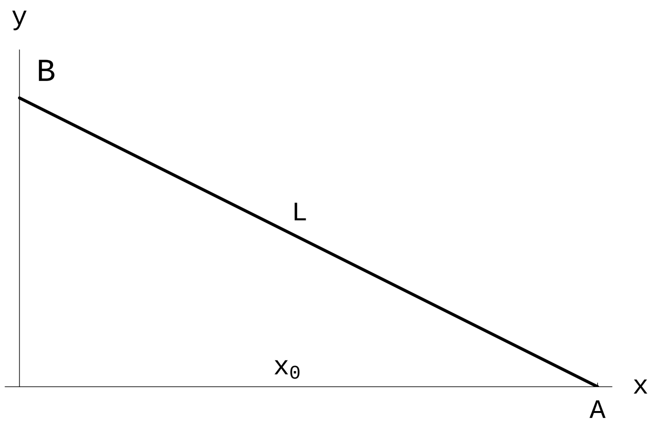
1. Un lampione L illumina un'arena circolare (fig. 39). Un ragazzo, partendo da B, corre ad una velocità costante v_0 verso il centro dell'arena. Dimostrare che la velocità dell'ombra lungo il contorno nell'istante in cui il ragazzo si trova a metà tra B e il centro, dipende linearmente da v_0 ed è indipendente dal raggio dell'arena.

2. Le estremità di un segmento $AB = L = 5\,\mathrm{m}$ scivolano sugli assi coordinati x e y di un riferimento monometrico ortogonale $R\,(Oxy)$. La velocità dell'estremità A è costante ed è pari a $2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Determinare la velocità di B nell'istante in cui l'ascissa di A è $x_0 = 3\,\mathrm{m}$ (fig. 2).

3. Il lato di un rettangolo ha una lunghezza costante a_0, mentre l'altro lato cresce secondo la legge:
$$b\,(t) = b_0 + \dot{b}_0 t,$$
essendo t il tempo, e $b_0, \dot{b}_0$ costanti (lunghezza iniziale e velocità di crescita). Si dimostri che nel limite per $t \to +\infty$, la diagonale cresce con la medesima velocità con cui cresce il lato b.

1.5.8 Soluzioni

1. $f'\,(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+12x-8}} = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$



2. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\frac{d}{dx}(3x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

3. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

4. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\frac{d}{dx}(x^2) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

5. $f'(x) = \frac{1}{1+(3x^2)^2}\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6x}{1+9x^4}$

6. $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = -\frac{(1-x)^2}{1+x^2-2x+1+x^2+2x}\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$

7. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

8. $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{1+x^2}$

9. $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

10. $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{9}{x^2}}\left(-\frac{3}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2+9}$

11. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-x(x-2)}}$

12. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

13. $f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $f'(x) = 2x\arccos\left(\frac{2}{x}\right) + x^2\left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)\right] = 2x\left[\arccos\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right]$

15. $f'(x) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2}}}\frac{1}{a} = \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

16. $f'(x) = \sqrt{2ax-x^2} - \frac{(x-a)^2}{\sqrt{2ax-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = 2\sqrt{2ax-x^2}$

1.5.8.1 Applicazioni

1. Fissiamo un riferimento cartesiano monometrico ortogonale $R(Oxy)$ come in fig. 39. La posizione iniziale del ragazzo è $B(0, R)$, e la sua equazione oraria è:

$$y(t) = R + \dot{y}_0 t, \tag{126}$$

essendo $\dot{y}_0 = -v_0$. La velocità dell'ombra è la velocità del punto Q che compie un moto circolare. Dalla figura 39 vediamo che l'ascissa curvilinea di Q contata a partire da B, è:

$$s(t) = R\left[\frac{\pi}{2} - 2\theta(t)\right] \tag{127}$$

Dalla medesima figura vediamo che l'angolo $\theta(t)$ è:

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{R}\right) \tag{128}$$

Sostituendo nella (127):

$$s(t) = R\left[\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{R - v_0 t}{R}\right)\right] \tag{129}$$

La variabile t varia nell'intervallo $[0, t_1]$, essendo t_1 l'istante di tempo in cui il ragazzo arriva nel centro dell'arena. Evidentemente:

$$t_1 = \frac{R}{v_0}, \; s(t_1) = \frac{\pi R}{2}$$

La (129) può essere riscritta come:

$$s(t) = R\left\{\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left[\frac{y(t)}{R}\right]\right\},$$

la cui derivata è:

$$\dot{s}(t) = -2\frac{R^2 v_0}{R^2 + y^2(t)}, \tag{130}$$

che è la velocità di Q. Il problema richiede il valore di tale velocità quando l'ordinata del ragazzo è $R/2$. Sia $\tau \in (0, t_1)$ l'istante tale che $y(\tau) = R/2$, donde:

$$\begin{aligned}\dot{s}(\tau) &= -2\frac{R^2 v_0}{R^2 + \frac{R^2}{4}} \\ &= \frac{8}{5}v_0\end{aligned}$$

che è la velocità richiesta. Da ciò vediamo che $\dot{s}(\tau)$ è indipendente dal raggio R ed è una funzione lineare di v_0.

Sostituendo l'espressione analitica di $y(t)$ nella (130):

$$\dot{s}(t) = 2\frac{R^2 v_0}{v_0 t^2 + 2Rv_0 t + 2R^2} \tag{131}$$

Si osservi che l'accelerazione di Q è:

$$\ddot{s}(t) = \frac{4v_0^2}{R}\frac{\eta(t)}{(1+\eta^2(t))^2} \tag{132}$$

Nella (132) la variabile adimensionale

$$\eta(t) = \frac{R - v_0 t}{R},$$

che misura l'ordinata del ragazzo in unità $R = 1$. Dalla (132) vediamo che $\ddot{s}(t) = 0$ per $\eta(t) = 0 \Longleftrightarrow t = R/v_0 = t_1$; a ciò corrisponde un punto di massimo per la velocità di Q.

2. Assumiamo $t = 0$ quando l'ascissa di A è pari a x_0, per cui l'equazione del moto di A è:

$$x_A(t) = v_A t + x_0$$

Se $y_B(t)$ è l'ordinata di B, deve essere:

$$x_A(t)^2 + y_B(t)^2 = L^2, \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

donde (tenendo conto che $y_B(t) \geq 0$):

$$y_B(t) = \sqrt{L^2 - x_0^2 - v_A^2 t^2 - 2v_A x_0 t} \tag{133}$$

La velocità di B è la derivata prima rispetto a t della funzione (133):

$$v_B(t) = \dot{y}(t) = -\frac{v_A(v_A t + x_0)}{\sqrt{L^2 - x_0^2 - v_A^2 t^2 - 2v_A x_0 t}}$$

La funzione $y_B(t)$ è definita in $(0, t_*)$ essendo t_* tale che:

$$L^2 - x_0^2 - v_A^2 t^2 - 2v_A x_0 t_* = 0$$

Si osservi che t_* si ricava dalla condizione:

$$x_A(t_*) = L$$

Quindi:

$$t_* = \frac{L - x_0}{v_A} = 1\,\mathrm{s}$$

La richiesta del problema è: deteminare $v_B(t)$ quando $x_A(t) = x_0$, donde è $t = 0$:

$$v_B(0) = -\frac{v_A x_0}{\sqrt{L^2 - x_0^2}} = -\frac{3}{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

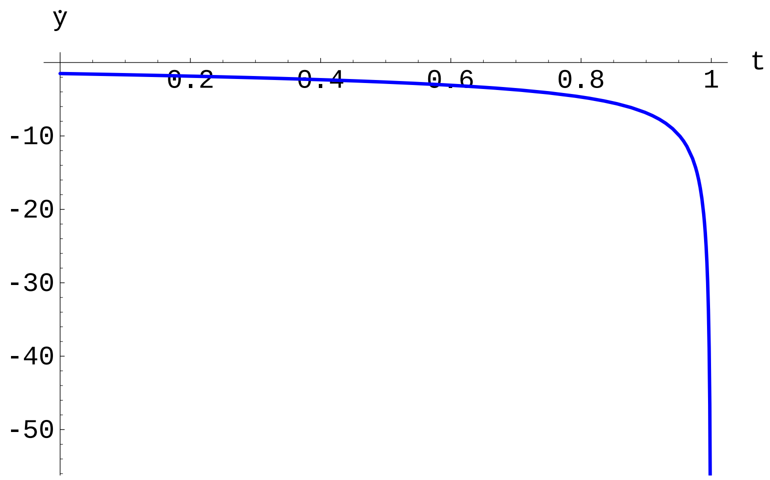


Figura 40:

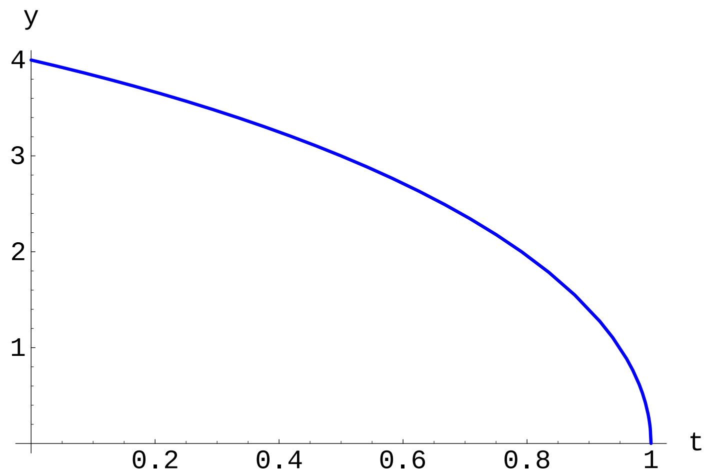


Figura 41:

Osservazione 26 *Come c'era da aspettarsi è $\dot{y}(t) < 0$, $\forall t \in [0, +\infty)$. Fisicamente significa che l'estremità B si muove nel verso delle ordinate decrescenti. Inoltre:*

$$\lim_{t \to t_*^-} \dot{y}(t) = -\infty$$

Il grafico è riportato in figura 40.

mentre il grafico di $y_B(t)$ è in figura 41.

3. La lunghezza della diagonale al generico istante t è:

$$d(t) = \sqrt{a_0^2 + b(t)^2} = \sqrt{d_0 + \dot{b}_0 t^2 + 2b_0 \dot{b}_0 t}, \tag{134}$$

essendo $d_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$. Derivando la (134):

$$\dot{d}(t) = \frac{\dot{b}_0 \left(b_0 + \dot{b}_0 t\right)}{\sqrt{d_0^2 + \dot{b}_0^2 t^2 + 2b_0 \dot{b}_0 t}},$$

per cui:

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{d}(t) = \dot{b}_0 \lim_{t\to+\infty} \frac{b_0 + \dot{b}_0^2 t}{|t| \sqrt{\dot{b}_0 + \frac{d_0^2}{t^2} + 2\frac{b_0 \dot{b}_0}{t}}} = \dot{b}_0$$

1.5.9 Derivazione di funzioni logaritmiche ed esponenziali

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni

1. $f(x) = \lg_a (3x^2 + 4)$
2. $f(x) = \ln (x+5)^2$
3. $f(x) = \ln^2 (x+5)$
4. $f(x) = \ln [(x^2+4)(x^2+1)]$
5. $f(x) = \ln (4x-3)$
6. $f(x) = \ln \sqrt{5-x^2}$
7. $f(x) = \ln (4x^3)$
8. $f(x) = \ln (x^2+x-1)^3$
9. $f(x) = x \ln x - x$
10. $f(x) = \ln \left[\frac{2x^4}{(2x-5)^2}\right]$
11. $f(x) = \ln (\sin ax)$
12. $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
13. $f(x) = e^{-bx}$
14. $f(x) = e^{x^n}$
15. $f(x) = x^3 2^x$
16. $f(x) = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}$
17. $f(x) = \ln \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right)$
18. $f(x) = e^{\sin 4x}$
19. $f(x) = 3^{-x^2}$
20. $f(x) = e^{e^x}$
21. $f(x) = x^7 e^x$
22. $f(x) = (x-1) e^x$

23. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
24. $f(x) = e^x \cos x$
25. $f(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x$
26. $f(x) = x^2 \arcsin x$
27. $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$
28. $f(x) = x^n \ln x - \frac{x^n}{n}$
29. $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

Calcolare con il metodo della derivata logaritmica la derivata prima delle seguenti funzioni

1. $f(x) = x^x$
2. $f(x) = x^{x^2}$
3. $f(x) = \sqrt[x]{x}$
4. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = x^{x^x}$
6. $f(x) = x^{\ln x}$
7. $f(x) = x^{e^{-x^2}}$
8. $f(x) = x^{\sin x}$, tracciando poi il grafico.
9. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$
10. $f(x) = (\arctan x)^x$

Calcolo di derivate seconde

1. $f(x) = e^{-x} \ln x$
2. $f(x) = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$
3. $f(x) = e^{x^2}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{\ln(1 + x^2)}$

1.5.10 Soluzioni

1. $f'(x) = \frac{1}{3x^2+4} \cdot \lg_a e \cdot \frac{d}{dx}(3x^2+4) = \frac{6x}{3x^2+4} \lg_a e = \frac{6x}{(3x^2+4)\ln a}$
2. $f'(x) = \frac{d}{dx}[2\ln(x+3)] = \frac{2}{x+3}$
3. $f'(x) = 2\ln(x+5) \cdot \frac{1}{x+5} = \frac{2\ln(x+5)}{x+5}$
4. $f'(x) = \frac{d}{dx}[\ln(x^2+4) + \ln(x^2+1)] = 2x\left(\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+1}\right) = 2x \cdot \frac{2x^2+5}{(x^2+4)(x^2+1)}$
5. $f'(x) = \frac{4}{4x-3}$
6. $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$
7. $f'(x) = \frac{12x^2}{4x^3} = \frac{3}{x}$
8. $f'(x) = \frac{d}{dx}[3\ln(x^2+x-1)] = \frac{3}{x^2+x-1}(2x+1) = \frac{3(2x+1)}{x^2+x-1}$
9. $f'(x) = \frac{d}{dx}[\ln 2 + 4\ln x - 2\ln(2x-5)] = \frac{4(x-5)}{x(2x-5)}$
10. $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$
11. $f'(x) = \frac{1}{\sin ax}(\cos ax) \cdot a = a\cot ax$
12. $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
13. $f'(x) = -be^{-bx}$
14. $f'(x) = e^{x^n}\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}e^{x^n}$
15. $f'(x) = 3x^2 2^x + x^3 2^x \ln 2 = x^2 2^x (3 + x\ln 2)$
16. $f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-e^{-2ax}}{1+e^{-2ax}} = \frac{2ae^{-2ax}\left(1+e^{-2ax}\right)+2ae^{-2ax}\left(1-e^{-2ax}\right)}{(1+e^{-2ax})^2} = \frac{4ae^{-2ax}}{(1+e^{-2ax})^2} = \frac{4a}{e^{2ax}(1+e^{-2ax})^2} = \frac{4a}{e^{2ax}+e^{-2ax}+2} = \frac{4a}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$
17. $f(x) = \ln g(x);\ g(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x} \Longrightarrow g'(x) = \frac{\cos^2 + \sin x(1+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{\cos x}$
18. $f'(x) = e^{\sin 4x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) = 4e^{\sin 4x}\cos 4x$
19. $f'(x) = -2x3^{-x^2}\ln 3$
20. $f'(x) = e^{g(x)};\ g(x) \overset{def}{=} e^x \Longrightarrow g'(x) = e^x;\ f'(x) = g'(x)\,e^{g(x)} = e^x e^{g(x)} = e^{x+g(x)} = e^{x+e^x}$
21. $f'(x) = x^6 e^x (7+x)$
22. $f'(x) = (x-1)\,e^x$
23. $f'(x) = e^x \frac{x-2}{x^3}$

24. $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$
25. $f'(x) = (2x - 2) e^x + (x^2 - 2x + 2) e^x = x^2 e^x$
26. $f'(x) = e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} = e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
27. $f'(x) = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$
28. $f'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} - x^{n-1} = nx^{n-1}$
29. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$

Derivata logaritmica

1. La funzione è:
$$f(x) = x^x$$
Prendiamo il logarimo di primo e secondo membro:
$$\ln f(x) = x \ln x$$
Quindi deriviamo:
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1,$$
donde:
$$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$
2. $\ln f(x) = x^2 \ln x \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x(2\ln x + 1) \Longrightarrow f'(x) = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$
3. $\ln f(x) = \frac{\ln x}{x} \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-\ln x}{x^2} \Longrightarrow f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$
4. $\ln f(x) = \sqrt{x} \ln x \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (\sqrt{x} \ln x + 2)$
5. $\ln f(x) = \ln\left(x^{x^x}\right) = x^x \ln x \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}(x^x \ln x) = (\ln x) \frac{d}{dx}(x^x) + x^x \frac{1}{x} = x^x (\ln x + 1) \ln x + \frac{x^x}{x}$
$\Longrightarrow f'(x) = x^{x^x + x - 1}\left(x \ln^2 x + \ln x + 1\right)$
6. $\ln f(x) = \ln\left(x^{\ln x}\right) = (\ln x)^2 \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2\frac{\ln x}{x} \Longrightarrow f'(x) = 2f(x)\frac{\ln x}{x} = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x} = 2x^{\ln x - 1} \ln x$
7. $\ln f(x) = e^{-x^2} \ln x \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2xe^{-x^2} \ln x + \frac{e^{-x^2}}{x} \Longrightarrow f'(x) = e^{-x^2} x^{e^{-x^2}-1} (1 - 2x^2 \ln x)$
8. $\ln f(x) = \sin x \ln x \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}(\sin x + x \cos x \ln x) \Longrightarrow f'(x) = x^{\sin x - 1}(\sin x + x \cos x \ln x)$. La funzione $f(x)$ è definita in $(0, +\infty)$ con $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (figura 42)
Essendo $|\sin x| \leq 1$, la funzione compie oscillazione con ampiezza linearmente crescente (grafico inviluppato da $y = x$, figg. 43-44)

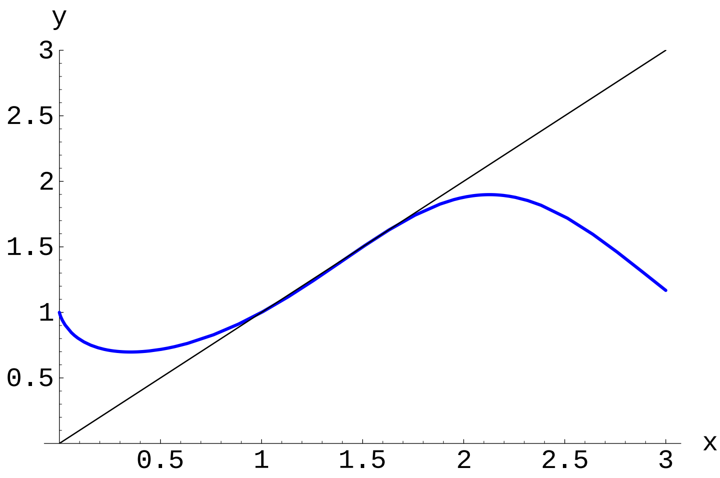


Figura 42:

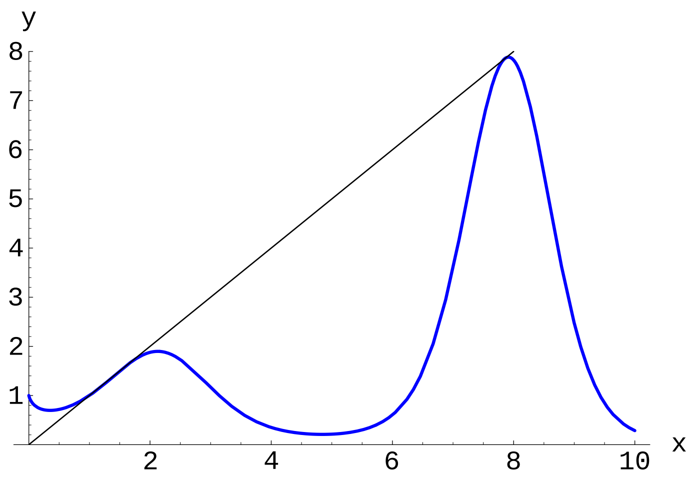


Figura 43:

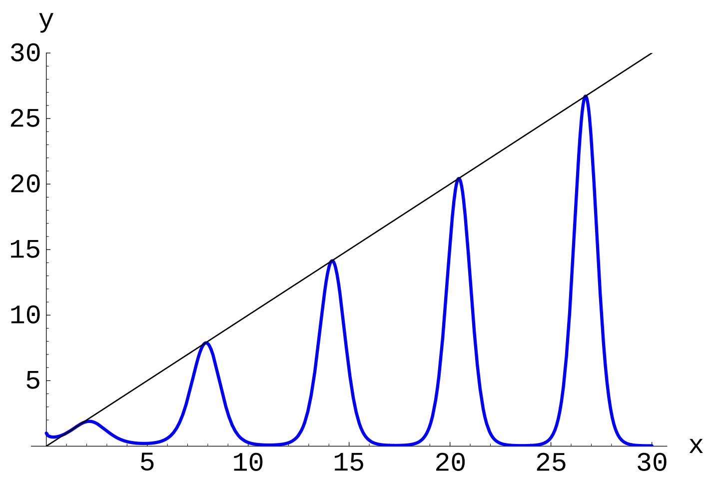


Figura 44:

9. $\ln f(x) = \sin x \ln(\cos x) \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln(\cos x) - \sin x \tan x \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f'(x) = (\cos x)^{\sin x} [\cos x \ln(\cos x) - \sin x \tan x]$

10. $\ln f(x) = x \ln(\arctan x) \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\arctan x) + x \left[\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right] \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f'(x) = (\arctan x)^x \left[\ln(\arctan x) + \frac{x}{(1+x^2)\arctan x}\right]$

Calcolo di derivate seconde

1. $f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x} = -f(x) + \frac{e^{-x}}{x} \Longrightarrow f''(x) = -f'(x) - \frac{xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) - \frac{e^{-x}(1+x)}{x^2} = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$
2. $f'(x) = 8x^7 + 42x^5 - 5;\ f''(x) = 56x^6 + 220x^4 = 14x^4(4x^2 + 15)$
3. $f'(x) = 2xe^{x^2};\ f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$
4. $f(x) = \frac{1}{3}\ln(1 + x^2) \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\frac{x}{1+x^2};\ f''(x) = \frac{2}{3}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

1.5.11 Derivazione di funzioni iperboliche

1. $f(x) = \sinh(ax)$
2. $f(x) = \cosh\left(\frac{1}{4}x\right)$
3. $f(x) = \tanh(1 + x^2)$
4. $f(x) = \coth\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$
5. $f(x) = \frac{x}{\cosh x^2}$
6. $f(x) = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{1}{2}x$
7. $f(x) = \ln\tanh(ax);$ esplicitando il risultato per $a = 2$.
8. $f(x) = \frac{x^2}{\cosh x}$
9. $f(x) = \tanh x - x$
10. $f(x) = \frac{3\coth x}{\ln x}$
11. $f(x) = \arctan x - Arc\tanh x$
12. $f(x) = \arcsin x Arc\sinh x$
13. $f(x) = \frac{Arc\tanh x}{x}$
14. $f(x) = \frac{Arc\coth x}{x}$
15. $f(x) = \frac{Arc\coth x}{1-x^2}$

1.5.12 Funzioni varie

1. Calcolare $f'(x)$ se: a) $f(x) = |x|$, b) $f(x) = x\,|x|$, plottando poi le funzioni assieme alle derivate del primo ordine.
2. Calcolare $f'(x)$ se: a) $f(x) = \sin|x|$, b) $f(x) = |\sin x|$, plottando poi le funzioni assieme alle derivate del primo ordine.
3. $f(x) = \sin^3 5x \cos^3 \frac{x}{3}$
4. $f(x) = -\frac{5}{4(x-3)^4} - \frac{10}{3(x-3)^3} - \frac{1}{2(x-3)^2}$
5. $f(x) = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$
6. $f(x) = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \tan\sqrt{x}$
7. $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$
8. $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$
9. $f(x) = \sqrt{\arctan x} - (\arcsin x)^3$
10. $f(x) = \sqrt{1 + \arcsin x}$
11. $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$
12. $f(x) = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$
13. $f(x) = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$
14. $f(x) = (3 + 2x^2)^4$
15. $f(x) = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x$
16. $f(x) = -\frac{1}{6(1-3\cos x)^2}$
17. $f(x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$
18. $f(x) = \sqrt{\frac{3\sin x - 2\cos x}{5}}$
19. $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 1) + \tan\left(\frac{a}{x}\right)$
20. $f(t) = \cos(\omega t + \phi)$
21. $f(x) = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$
22. $f(x) = a\cot\left(\frac{x}{a}\right)$
23. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
24. $f(x) = \arccos\sqrt{x}$

25. $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$
26. $f(x) = \arctan \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
27. $f(t) = t \sin 2^t$
28. $f(x) = \arccos e^x$
29. $f(x) = \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n} \right)^m$
30. $f(x) = \frac{9}{5(x+2)^5} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}$
31. $f(x) = \ln(\sin x)$
32. $f(x) = \ln(1-x^2)$
33. $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$
34. $f(x) = \ln(e^x + 5\sin x - 4\arcsin x)$
35. $f(x) = \arctan(\ln x) + \ln(\arctan x)$
36. $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$
37. $f(x) = (a+x)\sqrt{a-x}$
38. $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$
39. $f(x) = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$
40. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$
41. $f(x) = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$
42. $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$
43. $f(x) = x^4(a-2x^3)^2$
44. $f(x) = \sqrt{\prod_{k=1}^{3}(x+a_k)}$
45. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+e^x} - 1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x} + 1\right)$
46. $f(x) = \frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^3 x - 5)$
47. $f(x) = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{4}{3}\cot x$
48. $f(x) = \arcsin x^2 + \arccos x^2$
49. $f(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 \arccos x$

50. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

51. $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

52. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

53. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

54. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + \arcsin \frac{x}{a}$

55. $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$

56. $f(x) = \arcsin(1-x) + \sqrt{2x - x^2}$

57. $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$

58. $f(x) = \ln(\arcsin 5x)$

59. $f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$

60. $f(x) = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) - x$

61. $f(x) = \sqrt{e^{ax}}$

62. $f(x) = e^{\sin^2 x}$

63. $F(x) = (2ma^{mx} + b)^p$

64. $F(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$

65. $f(x) = \frac{(\alpha \sin \beta x - \beta \cos x) e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}$

66. $f(x) = -\frac{1}{10} e^{-x} (3 \sin 3x - \cos 3x)$

67. $f(x) = x^n a^{-x^2}$

68. $f(x) = \sqrt{\cos x} e^{\sqrt{\cos x}}$

69. $f(x) = 3^{\cot \frac{1}{x}}$

70. $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$

71. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

72. $f(x) = \ln\left(a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right)$

73. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$

74. $f(x) = \ln \cos\left(\frac{x-1}{x}\right)$

75. $f(x) = -\frac{1}{2\sin^3 x} + \ln \tan x$

76. $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$

77. $f(x) = \ln\ln\left(3 - 2x^2\right)$

78. $f(x) = 5\ln^3(ax + b)$

79. $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right)$

80. $f(x) = \frac{m}{2}\ln\left(x^2 - a^2\right) + \frac{n}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

81. $f(x) = x\sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$

82. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

83. $f(x) = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$

84. $f(x) = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3}\frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$

1.5.13 Soluzioni

1. $f'(x) = a\cosh(ax)$

2. $f'(x) = \frac{1}{4}\sinh\left(\frac{1}{4}x\right)$

3. $f'(x) = 2x\frac{1}{\cosh^2(1+x^2)} = \frac{2x}{\cosh^2(1+x^2)}$

4. $f'(x) = \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}(-\alpha)\,x^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}\sinh^2\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}$

5. $f'(x) = \frac{\cosh x^2 - \left(\sinh x^2\right)(2x)x}{\left(\cosh x^2\right)^2} = \frac{\cosh x^2 - 2x^2\sinh x^2}{\left(\cosh x^2\right)^2}$

6. $f'(x) = \frac{1}{4}\cosh(2x)\cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$; ma $\cosh 2x - 1 = \sinh^2 x \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\sinh^2 x$

7. $f'(x) = \frac{1}{\tanh(ax)}\frac{1}{\cosh^2(ax)}\cdot a = \frac{a}{\sinh(ax)\cosh(ax)}$; $a = 2 \Longrightarrow f'(x) \underset{2\sinh(2x)\cosh(2x)=\sinh(4x)}{=} \frac{4}{\sinh 4x}$

8. $f'(x) = \frac{2x\cosh x - x^2\sinh x}{\cosh^2 x}$

9. $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} - 1$

10. $f'(x) = \frac{-\frac{3}{\sinh^2 x}\ln x - \frac{3\coth x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{-3(x\ln x + \sinh x\cosh x)}{x(\ln x\sinh x)^2}$

11. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1-x^2} = -\frac{2x}{1-x^4}$

12. $f'(x) = \frac{Arc\sinh x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}\,Arc\sinh x + \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{\sqrt{1-x^4}}$

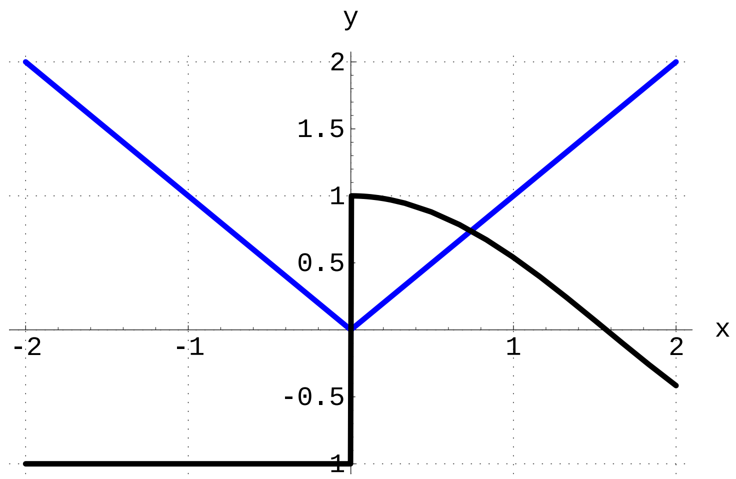


Figura 45:

13. $f'(x) = \frac{\frac{1}{1-x^2}x - Arc\tanh x}{x^2} = \frac{x-\left(1-x^2\right)Arc\tanh x}{x^2}$

14. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2-1} - Arc\coth x}{x^2} = -\frac{x+\left(x^2-1\right)Arc\coth x}{x^2\left(x^2-1\right)}$

15. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{1-x^2}\left(1-x^2\right)+2xArc\tanh x}{\left(1-x^2\right)} = \frac{-1+2x\left(1-x^2\right)Arc\coth x}{\left(1-x^2\right)}$

1.5.14 Funzioni varie

1. Se $f(x) = |x|$:

$$x \in (0, +\infty) \Longrightarrow f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$$
$$x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow f(x) = -x \Longrightarrow f'(x) = -1$$

In fig. 45 è riportato il grafico di $f(x)$, $f'(x)$:

Se $f(x) = x|x|$:

$$x \in (0, +\infty) \Longrightarrow f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$$
$$x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow f(x) = -x^2 \Longrightarrow f'(x) = -2x$$

In fig. 46 è riportato il grafico di $f(x)$, $f'(x)$:

2. Se $f(x) = \sin|x|$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}\cos|x|$$

In fig. 47 è riportato il grafico di $f(x)$, $f'(x)$:

Se $f(x) = |\sin x|$:

$$f'(x) = \cos x, \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$
$$f'(x) = -\cos x, \quad \text{altrimenti}$$

In fig. 48 è riportato il grafico di $f(x)$, $f'(x)$:

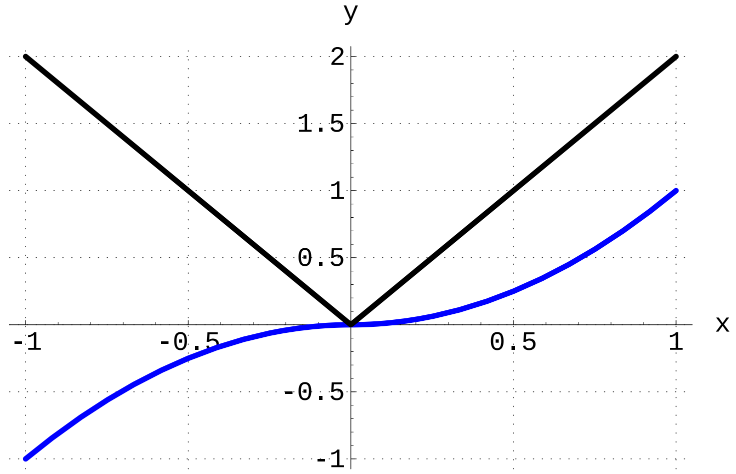


Figura 46:

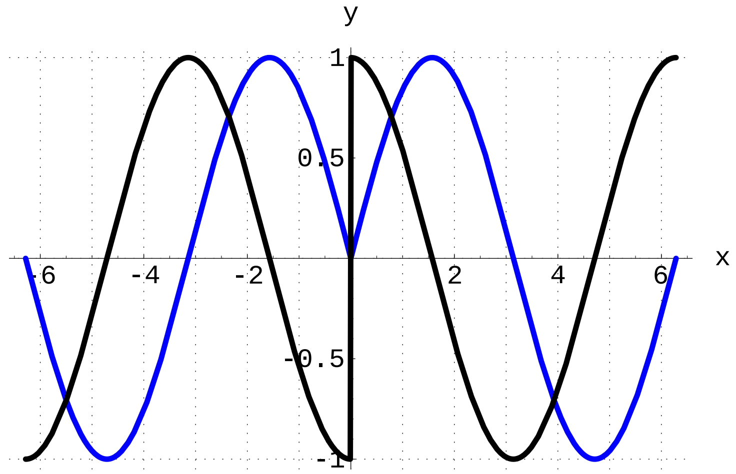


Figura 47:

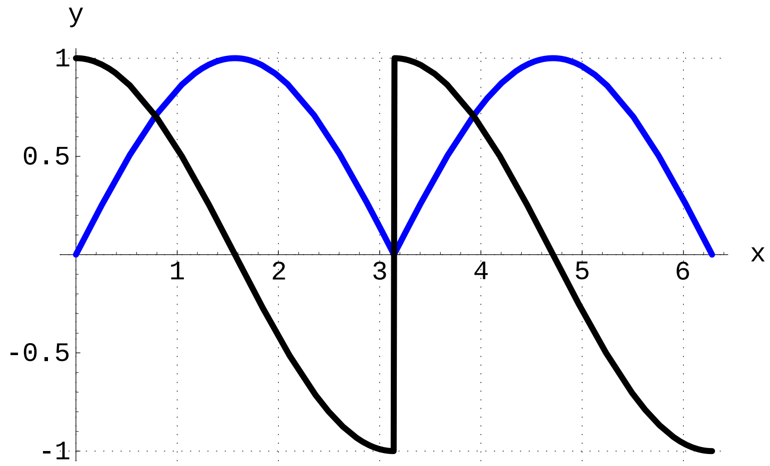


Figura 48:

3. $f'(x) = 3\sin^2 5x\,(\cos 5x)\cdot 5\cdot \cos^3\frac{x}{3} - \sin^3 5x \cos^2\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$

$= 15\sin^2 5x\cos 5x\cos^3\frac{x}{3} - \sin^3 5x\cos^2\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$

4. $f'(x) = \frac{15}{(x-3)^5} + \frac{10}{(x-3)^4} + \frac{1}{(x-3)^3}$

5. $f(x) = \frac{1}{8}\frac{8x^7\left(1-x^2\right)^4 - x^8\cdot 4\left(1-x^2\right)^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^8} = \frac{x^7}{(1-x^2)^5}$

6. $f'(x) = 3\cos 3x - \frac{1}{5}\sin\frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

7. $f'(x) = \frac{1}{3}\left(2e^x - 2^x + 1\right)^{-2/3}\left(2e^x - 2^x\ln 2\right) + \frac{1}{x}\cdot 5\ln^4 x = \frac{2e^x - 2^x\ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x-2^x+1)^2}} + \frac{5\ln^4 x}{x}$

8. $f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{x\left(e^x+1\right)} = \frac{e^x(1+x)+1}{2\sqrt{xe^x+x}}$

9. $f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\arctan x}} - \frac{3(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\arcsin x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1+\arcsin x)}}$

11. $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\sin^2 x\right)^{-2/3}\cdot 2\cdot\sin x\cos x - 3\cos^{-4} x\,(-\sin x) = \frac{2}{3}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} + \frac{3\sin x}{\cos^4 x}$

12. $f'(x) = \frac{3}{56}(-7)(2x-1)^{-8}\cdot 2 - \frac{1}{24}(-6)(2x-1)^{-7}\cdot 2 - \frac{1}{40}(-5)(2x-1)^{-6}\cdot 2$

$= -\frac{3}{4(2x-1)^8} + \frac{1}{2(2x-1)^7} + \frac{1}{4(2x-1)^6} = \frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$

13. $f'(x) = 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2\cdot\frac{a}{c} = \frac{3a(ax+b)^2}{c^3}$

14. $f'(x) = 4\left(3+2x^2\right)\cdot 4x = 16x\left(3+2x^2\right)^3$

15. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(1 - \tan^2 x + \tan^4 x\right)$

16. $f'(x) = -\frac{1}{6}\frac{d}{dx}(1-3\cos x)^{-2} = -\frac{1}{6}(-2)(1-3\cos x)^{-3}\cdot 3\sin x = \frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$

17. $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$

18. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3\sin x - 2\cos x}{5}}}\cdot\frac{3\cos x + 2\sin x}{5} = \frac{3\cos x + 2\sin x}{2}\sqrt{\frac{1}{5(3\sin x - 2\cos x)}}$

19. $f'(x) = (2x-5)\cos\left(x^2 - 5x + 1\right) - \frac{a}{x^2\cos^2\left(\frac{x}{a}\right)}$

20. $f'(t) = -\omega\sin(\omega t + \phi)$

21. $f'(x) = \frac{4\sin 2x\cos 2x}{(1-\cos 2x)^2} = \frac{2\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}$

22. $f'(x) = -a\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}\cdot\frac{1}{a} = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}$

23. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}\cdot(-2)\cdot x^{-3} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

24. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

25. $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}$

26. $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$

27. $f'(t) = \sin 2^t + t\cos 2^t \cdot 2^t \cdot \ln 2 = \sin 2^t + (\ln 2)\, t2^t \cos 2^t$

28. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot e^x = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

29. $f'(x) = m\left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{bnx^{n-1}(a-bx^n)+bnx^{n-1}(a+bx^n)}{(a-bx^n)^2} = m\left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^{m-1} \frac{2abnx^{n-1}}{(a-bx^n)^2}$

30. $f'(x) = -\frac{9}{(x+2)^6} + \frac{12}{(x+2)^4} - \frac{8}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^3-1}{(x+2)^6}$

31. $f'(x) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \cot x$

32. $f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$

33. $f'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}\left(2\ln^2 x - 1\right)$

34. $f'(x) = \frac{e^x+5\cos x-4\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{e^x+5\sin x-4\arcsin x} = \frac{e^x\sqrt{1-x^2}+5\sqrt{1-x^2}\cos x-4}{\sqrt{1-x^2}(e^x+5\sin x-4\arcsin x)}$

35. $f'(x) = \frac{1}{x\left(\ln^2 x+1\right)} + \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$

36. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$

37. $f'(x) = \sqrt{a-x} - \frac{a+x}{2\sqrt{a-x}} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$

38. $f'(x) = \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$

39. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

40. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[6]{x} + 3\sqrt{x^3} + \sqrt[6]{x^7} = \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}$

41. $f'(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3}\left(1+x^3\right)^{5/3} x^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3}\left(1+x^3\right)^{2/3} x^2 =$
$= x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5} - \sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\right) = x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}$

42. $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-3/4} \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-3/4} \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}$

43. $f'(x) = 4x^3\left(a-2x^3\right)^2 + x^4 \cdot 2\left(a-2x^3\right) \cdot \left(-6x^2\right) = 4x^3\left(a-2x^3\right)^2 - 12x^6\left(a-2x^3\right)$
$= 4x^3\left(a-2x^3\right)\left(a-2x^3-3x^6\right)$

44. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\prod_{k=1}^{3}(x-a_k)}} \frac{d}{dx} \prod_{k=1}^{3}(x-a_k) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_2)}{2\sqrt{\prod_{k=1}^{3}(x-a_k)}}$

45. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+1} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

46. $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{5}\cos^6 x - \frac{1}{3}\cos^3 x \right) = -\frac{6}{5}\cos^5 x \sin x + \cos^2 x \sin x = \sin x \cos^2 x \left(1 - \frac{6}{5}\cos^3 x\right)$

47. $f'(x) = -\frac{-\sin x \cdot 3\sin^3 x - \cos x \cdot 9 \sin^2 x \cos x}{9\sin^6 x} - \frac{4}{3}\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x} = \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}$

48. Poniamo $y = x^2$, donde: $f(y) = \arcsin y + \arccos y$. Come è noto: $\arcsin y + \arccos y = \pi/2$, per cui $f(x) = \pi/2 \Longrightarrow f'(x) = 0$

49. $f'(x) = \frac{1}{2}\left[2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x - \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}}(2\arccos x - \arcsin x)$

50. $f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$; con $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \Longrightarrow g'(x) = \frac{2x^3-2x(x^2-1)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$

51. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \arcsin\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2} = \frac{x\arccos x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

52. $f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$; con $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow g'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = (1+x^2)^{-3/2}$;
$\sqrt{1-g^2(x)} = (1+x^2)^{-1/2}$
$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

53. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\frac{b}{a}}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$

54. $f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

55. $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} + a^2\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{a^2-x^2}$

56. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \cdot (-1) + \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$

57. $f'(x) = \arcsin\sqrt{x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \arcsin\sqrt{x}$

58. $f'(x) = \frac{1}{\arcsin 5x} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$

59. $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2\sin 2}{(1-x\cos\alpha)}} \cdot \frac{\sin\alpha(1-x\cos\alpha)+\cos\alpha \cdot x\sin\alpha}{(1-x\cos\alpha)^2} = \frac{\sin\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}$

60. $f'(x) = \sqrt{2}\frac{1}{1+\frac{\tan^2 x}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{2}{2\cos^2 x + \sin^2 x} - 1 = \frac{1}{1+2\cot^2 x}$

61. $f'(x) = \frac{ae^{ax}}{2\sqrt{e^{ax}}}$

62. $f'(x) = e^{\sin^2 x}\sin 2x$. Il grafico di $f(x)$, $f'(x)$ è riportato in figura 49.

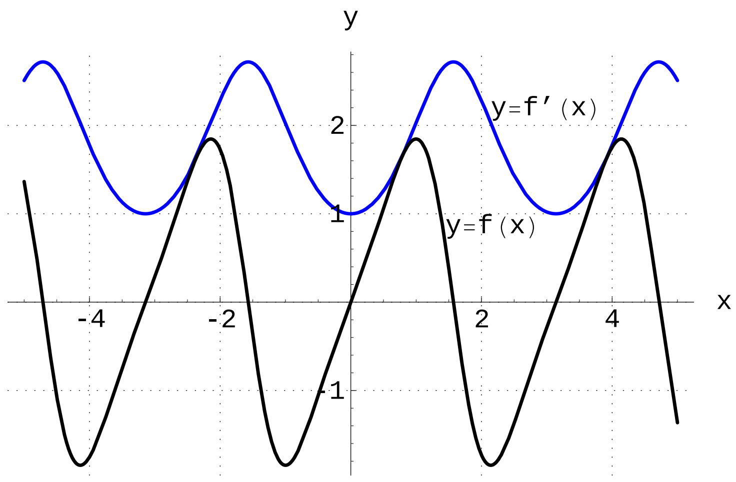


Figura 49:

63. $F'(x) = p\left(2ma^{mx}+b\right)^{p-1}\left(2n^2a^{mx}\ln a\right) = 2pm^2a^{mx}\left(2ma^{mx}+b\right)^p \ln a$

64. $F'(t) = \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t = e^{\alpha t}\left(\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t\right)$

65. $f'(x) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x\right)\right] + e^{\alpha x}\left(\alpha\beta\cos\beta x + \beta^2\sin\beta x\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x$

66. $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{10}\left(3\sin 3x - \cos 3x\right) + \frac{1}{10}e^{-x}\left(9\cos 3x + 3\sin 3x\right) = e^{-x}\cos 3x$

67. $f'(x) = nx^{n-1}a^{-x^2} + x^n\left(-2xa^{-x^2}\ln a\right) = x^{n-1}a^{-x^2}\left(n - 2x^2\ln a\right)$

68. $f'(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}e^{\sqrt{\cos x}} + \sqrt{\cos x}\left(-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}e^{\sqrt{\cos x}}\right) = -\frac{\sin x\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{2}e^{\sqrt{\cos x}}$

69. $f'(x) = 3^{\cot\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3^{\cot\frac{1}{x}}}{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2}\ln 3$

70. $f'(x) = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

71. $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

72. $f'(x) = \frac{1}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}\left(1+\frac{2x+2x}{2\sqrt{2ax+x^2}}\right) = \frac{2x+\sqrt{2ax+x^2}}{\sqrt{2ax+x^2}\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)}$

73. $f'(x) = -2\left(\ln x\right)^{-3}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{2}{x\ln^3 x}$

74. $f'(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)}\cdot(-1)\cdot\sin\left(\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x-x+1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\tan\left(\frac{x-1}{x}\right)$

75. $f'(x) = \left(\sin x\right)^{-3}\cdot\cos x + \frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^3 x\cos x}$

76. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{x}{2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{2}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right) = \sqrt{x^2-a^2}$

77. $f'(x) = \frac{1}{\ln(3-2x^2)}\cdot\frac{1}{3-2x^2}\cdot\left(-6x^2\right) = \frac{6x^2}{(3-2x^2)\ln(3-2x^2)}$
Tale funzione è definita in $X = (-\infty, 1)$; il grafico è riportato in figura 50.

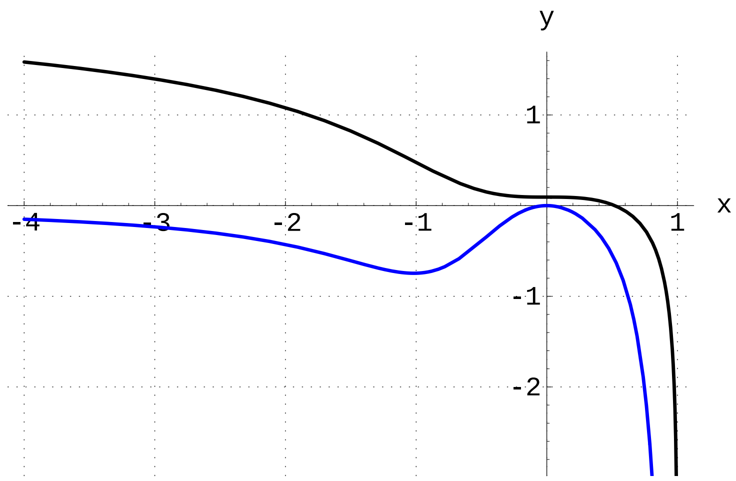


Figura 50: Grafico di $y = \ln\ln(3-2x^2)$ e della derivata prima (rgb=001)

78. $f'(x) = 5 \cdot 3\ln^2(ax+b) \cdot \frac{a}{ax+b} = \frac{15a\ln^2(ax+b)}{ax+b}$

79. $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, essendo $g(x) \stackrel{def}{=} \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow g'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}+1\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-1\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)^2}$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \frac{2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

80. $f'(x) = \frac{m}{2}\frac{2x}{x^2-a^2} + \frac{n}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{x+a-x+a}{(x+a)^2} = \frac{m}{2}\frac{x}{x^2-a^2} + \frac{n}{2a}\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{mx+n}{x^2-a^2}$

81. $f'(x) = \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + x\cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{x}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\ln x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\ln x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\ln x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\ln x) = \sqrt{2}\sin(\ln x)$

82. $f'(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln(g(x))$, con $g(x) \stackrel{def}{=} \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} \Longrightarrow g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1-\sqrt{x^2+1}}{x^2} = -\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

83. $f'(x) = 2^{\arcsin 3x}(\ln 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 + 2(1-\arccos 3x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3$
$= \frac{2^{\arcsin 3x}\ln 8 + 6(1-\arccos 3x)}{\sqrt{1-9x^2}}$

84. $f'(x) = 3^{g(x)} + \frac{1}{3}g(x)^3$, essendo $g(x) \stackrel{def}{=} \frac{\sin ax}{\cos bx} \Longrightarrow g'(x) = \frac{a\cos ax\cos bx + b\sin bx\sin ax}{\cos^2 bx}$,
$f'(x) = 3g'(x)\left[(\ln 3) \cdot 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \frac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx}\right]$