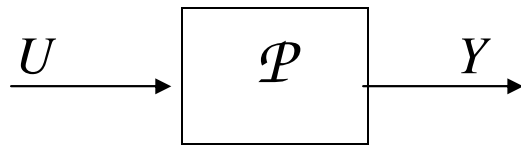


1. Assegnato l'impianto P così schematizzato:



e caratterizzato dal seguente modello implicito ingresso-uscita:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 40 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 400 \frac{dy(t)}{dt} = 500 \frac{du(t)}{dt} + 1000u(t)$$

si ricavi la funzione di trasferimento $P(s)=Y(s) / U(s)$.

Per trovare tale funzione di trasferimento devo spostarmi nel dominio operativo di Laplace, dove le operazioni di derivazione diventano operazioni algebriche. Infatti:

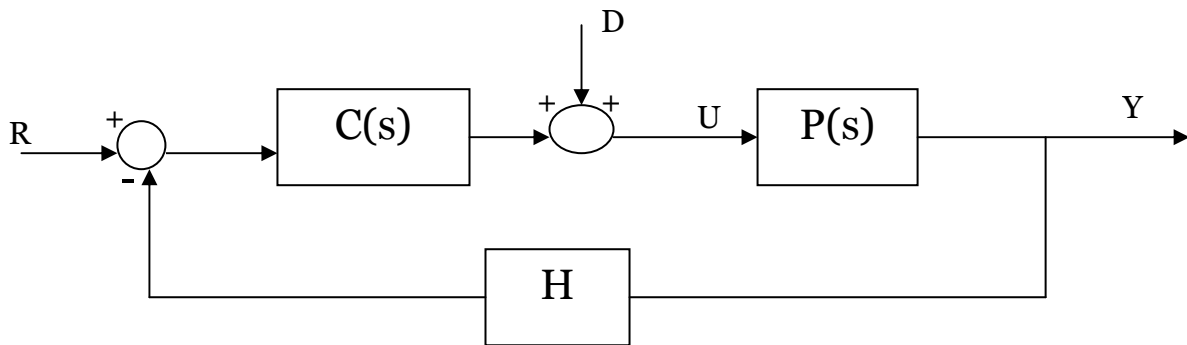
- $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$
- $\mathcal{L}[dy(t)/dt] = s Y(s)$
- $\mathcal{L}[d^2 y(t)/dt^2] = s^2 Y(s)$
- $\mathcal{L}[d^3 y(t)/dt^3] = s^3 Y(s)$
- $\mathcal{L}[u(t)] = U(s)$
- $\mathcal{L}[du(t)/dt] = s U(s)$

Sostituendo tali espressioni nel modello ottengo:

$$s^3 Y(s) + 40s^2 Y(s) + 400s Y(s) = 500s U(s) + 1000U(s) \Rightarrow$$

$$P(s) = Y(s)/U(s) = \frac{500s + 1000}{s^3 + 40s^2 + 400s} = \frac{500s + 1000}{s(s + 20)^2}$$

2. Con riferimento a questo schema di controllo in retroazione



3. Determinare C(s) e H in modo tale da soddisfare le specifiche:

$$r(t)=5\delta_{-3}(t) \rightarrow y_d(t)=10\delta_{-3}(t)$$

$$r(t)=5\delta_{-3}(t) \rightarrow e_{A,\infty}=0.8$$

Per calcolare H devo passare nel dominio operativo “s”.

$$L[\alpha\delta_{-3}(t)]=\alpha/s^3$$

Quindi ho $\mathbf{R(s)=5/s^3}$ e $\mathbf{Y_d(s)=10/s^3}$

A questo punto per trovare H sfrutto il fatto che il riferimento R(s) è proporzionale all’uscita desiderata Y_d(s) tramite k_d. In questo modo sono in grado di calcolarmi il valore di k_d.

$$K_d = Y_d(s)/R(s) = 2$$

Io sto ipotizzando che il trasduttore sia istantaneo ossia H=H₀.

In tal caso l’unico modo che ho per rendere l’errore a regime nullo o costante è avere

$$K_d H - 1 = 0$$

Quindi il valore di H è:

$$\mathbf{H = 1/k_d = 1/2}$$

Per calcolare C(s) invece devo far riferimento alla tabella seguente che evidenzia il tipo di errore che ho a regime in conseguenza ad un determinato riferimento e al numero di poli che ho in C(s).

| k \ h | 0 | 1 | 2 | |
|-------|---------------------------|-------------------|-------------------|--------------------------------|
| 0 | $(k_d^2 R_0)/(k_d + G_0)$ | ∞ | ∞ | k=0 → r(t)=δ _{.1} (t) |
| 1 | 0 | $(k_d^2 R_0)/G_0$ | ∞ | k=1 → r(t)=δ _{.2} (t) |
| 2 | 0 | 0 | $(k_d^2 R_0)/G_0$ | k=2 → r(t)=δ _{.3} (t) |

Essendo il riferimento di ordine 3 (k=2) significa che per avere un errore a regime costante devo avere una funzione di trasferimento di catena diretta (G(s)=C(s)P(s)) con 2 poli nell'origine (ossia devo avere un sistema di tipo 2). Considerando il fatto che P(s) presenta già un polo nell'origine è sufficiente progettare una C(s) anch'essa con un solo polo nell'origine. La C(s) assume pertanto la forma:

$$C(s) = k_c/s$$

Devo quindi calcolare quanto vale k_c.

Sfrutto il fatto che le specifiche mi richiedono un errore a regime pari a 0.8.

Ho quindi:

$$(k_d^2 R_0)/G_0 = 0.8 \quad (R_0 \text{ è il coefficiente di } R(s) \text{ cioè } 5)$$

Da questa relazione si ricava il valore di G₀ che vale:

$$G_0 = 25$$

Ora poiché

$$G_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 C(s)P(s) = 2.5k_c$$

Si ricava pertanto il valore di k_c:

$$k_c = 25/2.5 = 10$$

Un'ulteriore specifica richiede che il sistema sia astatico nei confronti dell'ingresso non manipolabile

$d(t) = \delta_{-1}(t)$. Affinché il sistema sia astatico è necessario che $k < h_1$, dove h_1 è il numero di poli nell'origine presenti in $C(s)$ e k è pari all'ordine dell'ingresso non manipolabile meno uno (ossia $d(t) = D_0 \delta_{-(k+1)}(t)$). Nel mio caso quindi essendo $k=0$ è necessario che $C(s)$ abbia un polo nell'origine. Tuttavia l'aver dovuto soddisfare la specifica dell'errore a regime pari ad 0.8 ha fatto sì che $C(s)$ presenti già un polo nell'origine. Quindi il sistema è già astatico.

4. Si richiede ora l'analisi delle proprietà di stabilità al variare di k_c del sistema a ciclo chiuso ottenuto.

Per studiare la stabilità di un sistema a ciclo chiuso posso procedere in due modi. Posso utilizzare la tabella di Routh, oppure posso usare il criterio di Nyquist.

Cominciamo con Routh.

Devo innanzitutto determinare la funzione di trasferimento a ciclo chiuso $W(s)$.

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)}$$

A me servono i poli di $W(s)$, che altro non sono che gli zeri di $1+F(s)$. Se i poli di $W(s)$ sono tutti a parte reale negativa allora il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile.

$$1+F(s) = 1 + H \cdot C(s) \cdot P(s) = 1 + \frac{k_c}{2s} \frac{500s + 1000}{s^3 + 40s^2 + 400s}$$

da cui

$$1+F(s) = \frac{s^4 + 40s^3 + 400s^2 + 250k_c s + 500k_c}{s^4 + 40s^3 + 400s^2}$$

Per vedere se i poli di $W(s)$ sono tutti a parte reale negativa sfruttiamo la tabella di Routh (non devo avere variazioni di segno sulla prima colonna).

| | | | | |
|---|--|----|-----------|-----------|
| 4 | | 1 | 400 | 500 k_c |
| 3 | | 40 | 250 k_c | 0 |
| 2 | | A | B | 0 |
| 1 | | C | 0 | 0 |
| 0 | | D | 0 | 0 |

$$A = -\frac{1}{40} \left| \begin{array}{cc} 1 & 400 \\ 40 & 250k_c \end{array} \right| = \frac{16000 - 250k_c}{40}$$

$$B = -\frac{1}{40} \left| \begin{array}{cc} 1 & 500k_c \\ 40 & 0 \end{array} \right| = 500k_c$$

$$C = -\frac{40}{16000-250k_c} \left| \begin{array}{cc} 40 & 250k_c \\ 16000-250k_c & 500k_c \end{array} \right| = \frac{k_c(5k_c-256)}{kc-64_c}$$

$$D = B=500k_c$$

La tabella diventa:

| | | | |
|---|---------------------------------|-------------------|-------------------|
| 4 | 1 | 400 | 500k _c |
| 3 | 40 | 250k _c | 0 |
| 2 | $\frac{16000-250k_c}{40}$ | 500k _c | 0 |
| 1 | $\frac{k_c(5k_c-256)}{kc-64_c}$ | 0 | 0 |
| 0 | 500k _c | 0 | 0 |

Affinché tutti i poli di W(s) siano a parte reale negativa non devo avere variazioni di segno sulla prima colonna.

Dato che i primi due elementi della prima colonna sono positivi anche gli altri tre devono essere positivi.

Quindi:

$$16000-250k_c > 0 \rightarrow k_c < 64$$

$$\frac{k_c(5k_c-256)}{kc-64_c} > 0 \rightarrow k_c < 0 \wedge k_c > \frac{256}{5} \vee k_c > 64$$

$$500k_c > 0 \rightarrow k_c > 0$$

L'intersezione delle tre condizioni mi dice che affinché il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile devo avere un k_c che varia così:

$$0 < k_c < \frac{256}{5} = (51.2)$$

Quindi il sistema a ciclo chiuso quando k_c=10 è stabile perché 10 appartiene a tale intervallo.

Verifichiamo tale risultato con Nyquist.

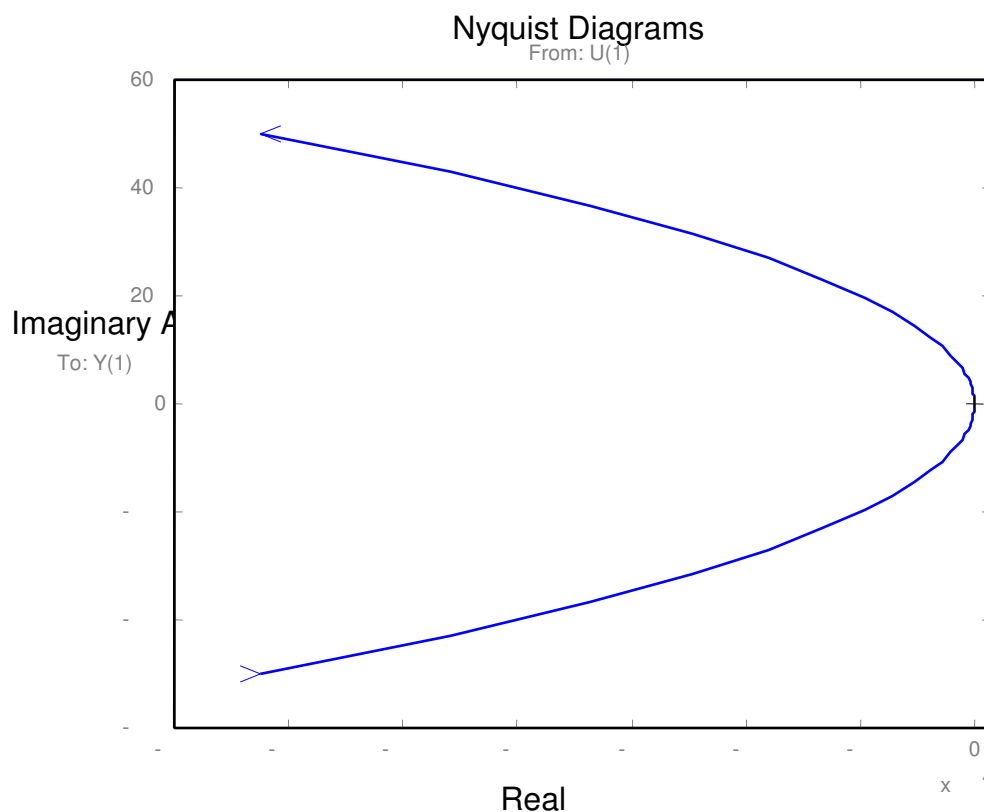
L'intervallo di k_c trovato con Routh trova un'immediata conferma se si effettua il diagramma di Nyquist (completo) di $F(j\omega)$.

Affinché vi sia asintotica stabilità devo avere che il diagramma completo di $F(j\omega)$ circonda il punto critico un numero di volte pari al numero di poli a parte reale positiva presenti in $F(s)$. **$F(s)$ non ha poli a parte reale positiva pertanto $p_p=0$.**

Quindi se il numero di circondamenti è zero ho asintotica stabilità.

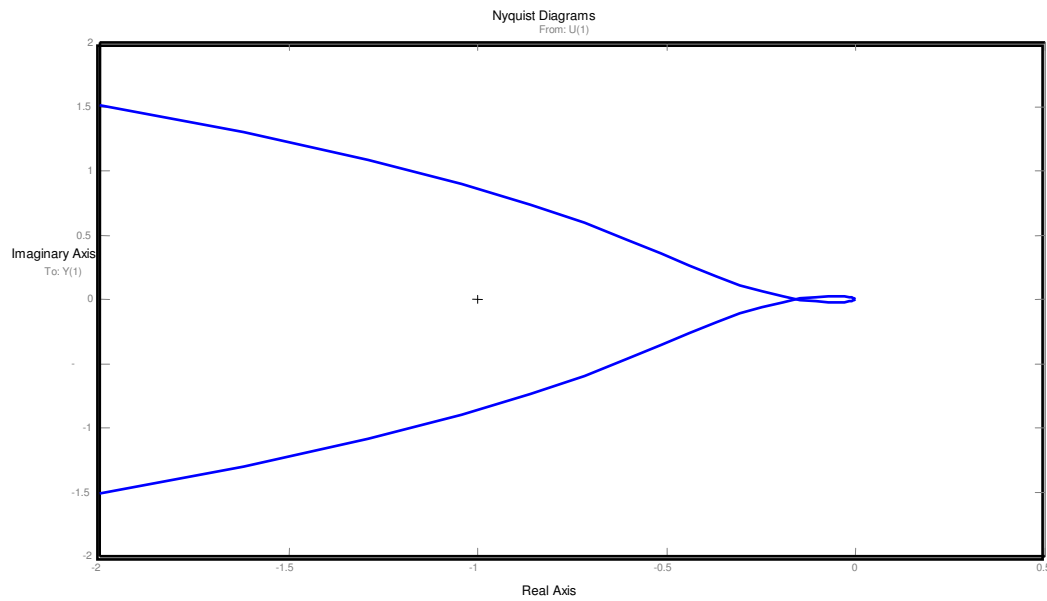
Di seguito sono riportati alcuni diagrammi per k_c diversi:

$k_c = 10$



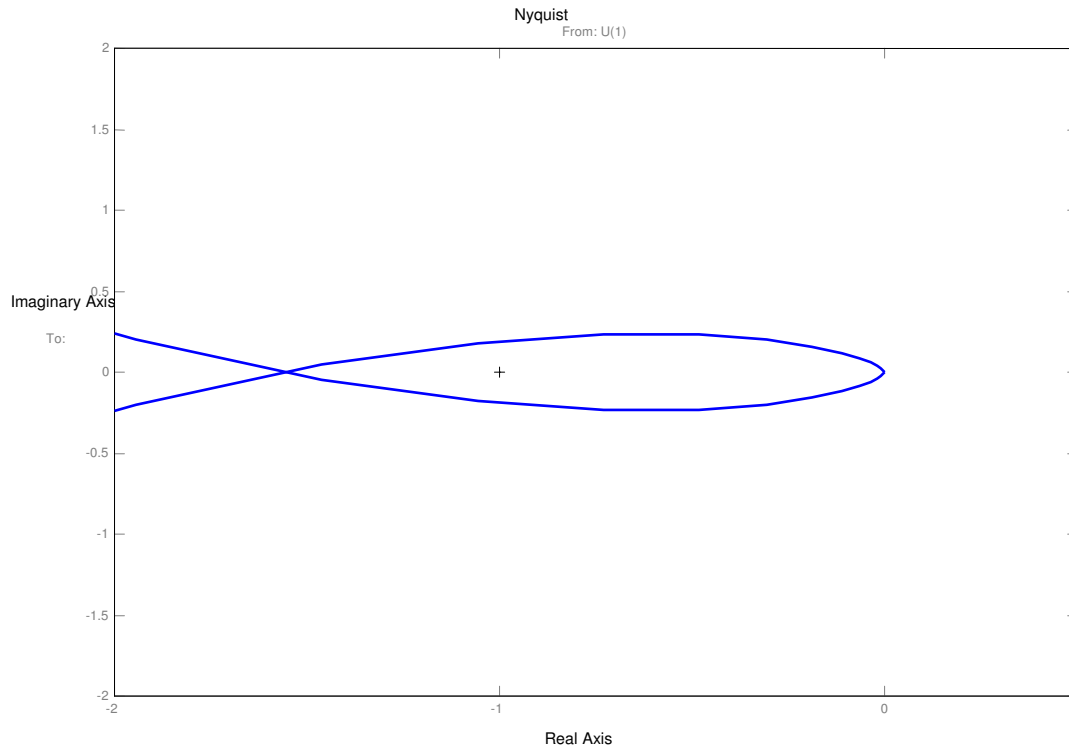
Essendo presenti in $F(s)$ 2 poli nell'origine significa che devo chiudere il grafico da 0^- a 0^+ in senso orario con 2 mezzi giri (ossia un giro).

Ingrandendo intorno al punto critico ottengo:



E' evidente dall'ultimo grafico come per $k_c = 10$ sono in una situazione di asintotica stabilit . Per $k_c=52$ devo avere instabilit  secondo i risultati ottenuti con Routh. Questo   confermato anche da Nyquist:

$k_c=52$



In questo caso ho due circondamenti in senso orario ($c = - 2$). Essendo $p_p \neq c$ ho instabilità.

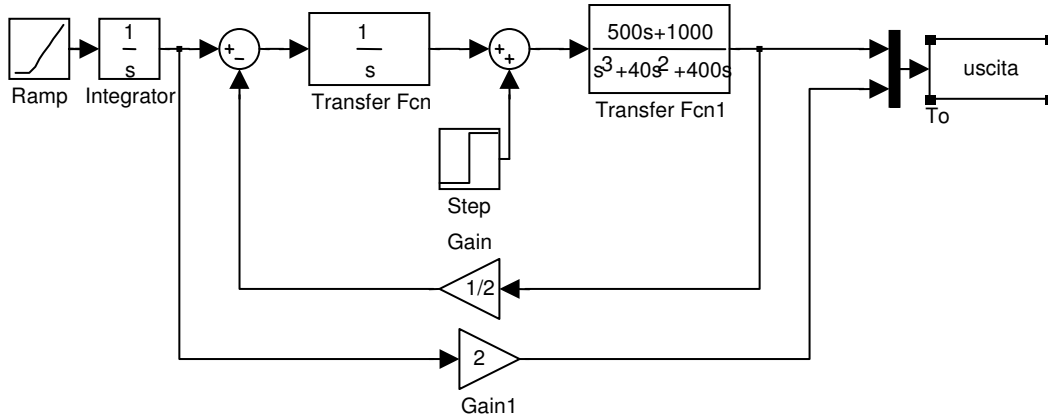
E' chiaro quindi come al crescere di k_c il sistema tende verso l'instabilità. Il valore massimo che k_c può assumere si trova prendendo l'ascissa dell'intersezione della curva con l'asse reale (K). Trovato K il k_c massimo è $-1/K$.

Dal diagramma fatto per $k_c=1$ si ricava, grazie all'ausilio del matlab, che $K=-0.0193$

Quindi:
$$k_c^{\max} = - \frac{1}{-0.0193} = 51.8$$

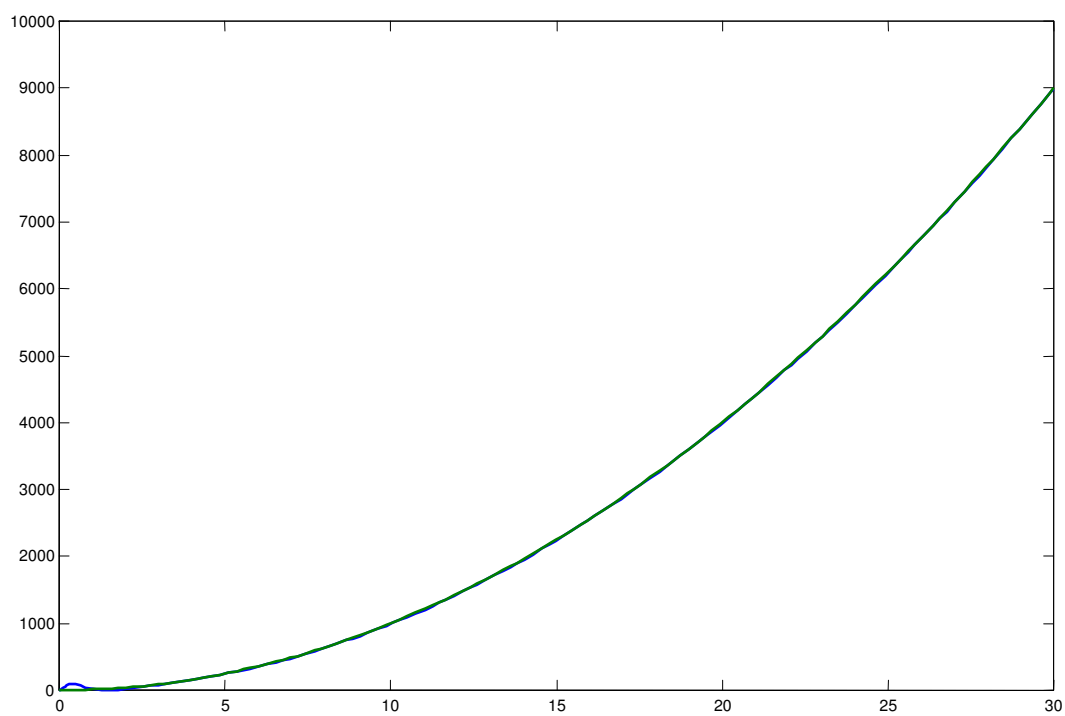
Ricavo pertanto che ho asintotica stabilità per:

Possiamo pertanto affermare che il sistema a ciclo chiuso presenta stabilità regolare.



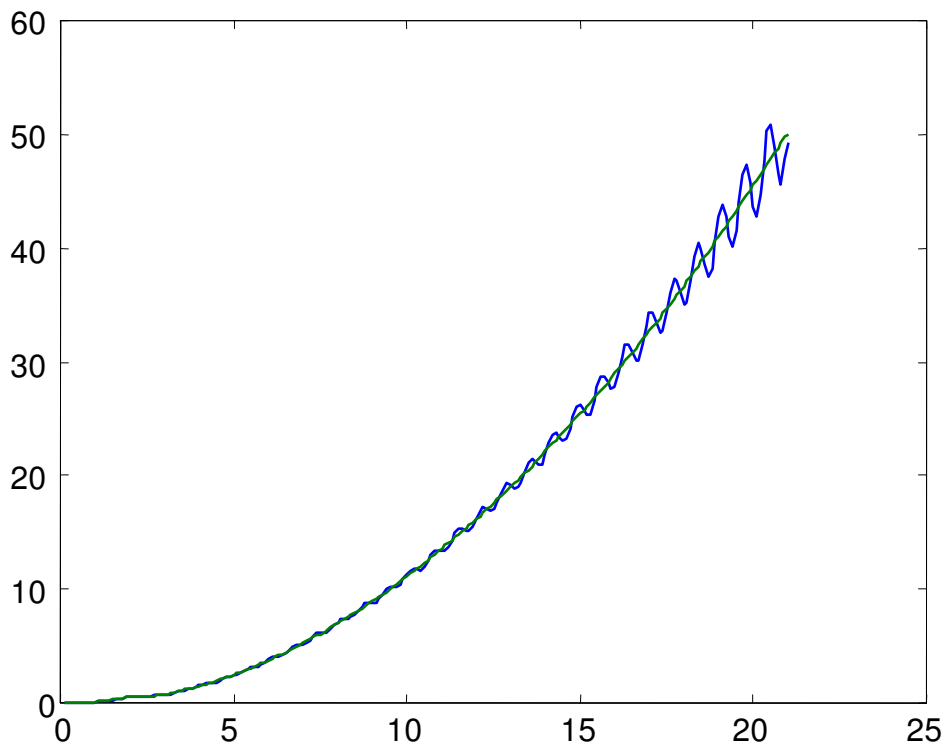
$k_c=10$

$$0 < k_c < 51.8$$



E' presente asintotica stabilità.

$k_c=58$

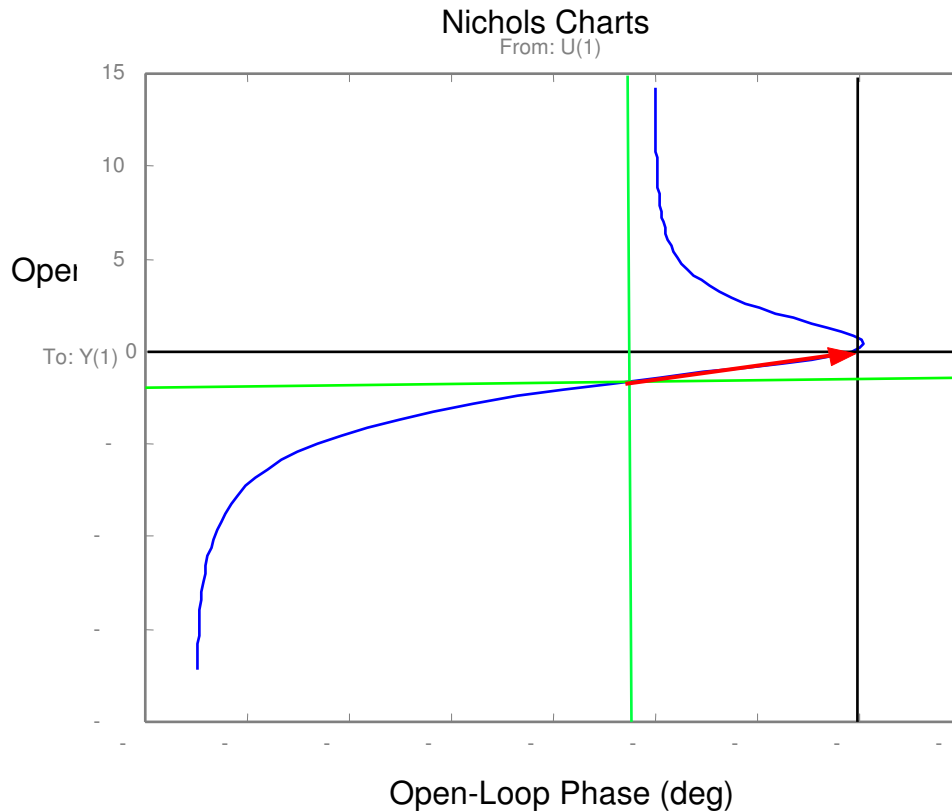


E' presente instabilità.

5. Si modifichi la $C(s)$ in modo da soddisfare l'ulteriore specifica:

$$F(j\omega) : m_{\phi} = 40^{\circ}, \quad \omega_t = 20 \text{ rad/s.}$$

Per soddisfare tale specifica prendo il diagramma di Nichols di $F(j\omega)$ e faccio in modo che il punto caratterizzato dalla pulsazione di 20 rad/s intersechi l'asse delle fasi nella coordinata -140° . Per far ciò è necessario effettuare una correzione opportuna della $C(s)$. Tale correzione è effettuata mediante delle reti corretrici. Tutto si riduce ora nel capire che tipo di rete devo usare. A tale scopo vado a vedere il punto di $F(j\omega)$ a pulsazione 20 rad/s dove si trova.



Il punto di $F(j\omega)$ a pulsazione 20 rad/s ha una **fase di -185.7°** e un **modulo in dB di -16.08** .

Io devo fare in modo che abbia una fase di -140° e un modulo pari a zero (in dB).

La correzione che devo effettuare è evidenziata dalla freccia nera in figura. Devo amplificare di 16.08 dB (6.37 in naturali) e anticipare di 45.7° . **Ho bisogno quindi di una rete anticipatrice.**

$C(s)$ diventa:

$$C(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \hat{\tau}s}{1 + \hat{\alpha}\hat{\tau}s}$$

Non mi resta che calcolare $\hat{\alpha}$ e $\hat{\tau}$ dove:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\hat{\omega}} \frac{M \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} - 1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\hat{\omega}\hat{\tau}M} \sqrt{1 + (\hat{\omega}\hat{\tau})^2 - M^2}$$

Essendo $M = 6.37$ $\varphi = 45.7^\circ$ trovo

$$\hat{\alpha} = 0.0954$$

$$\hat{\tau} = 0.396$$

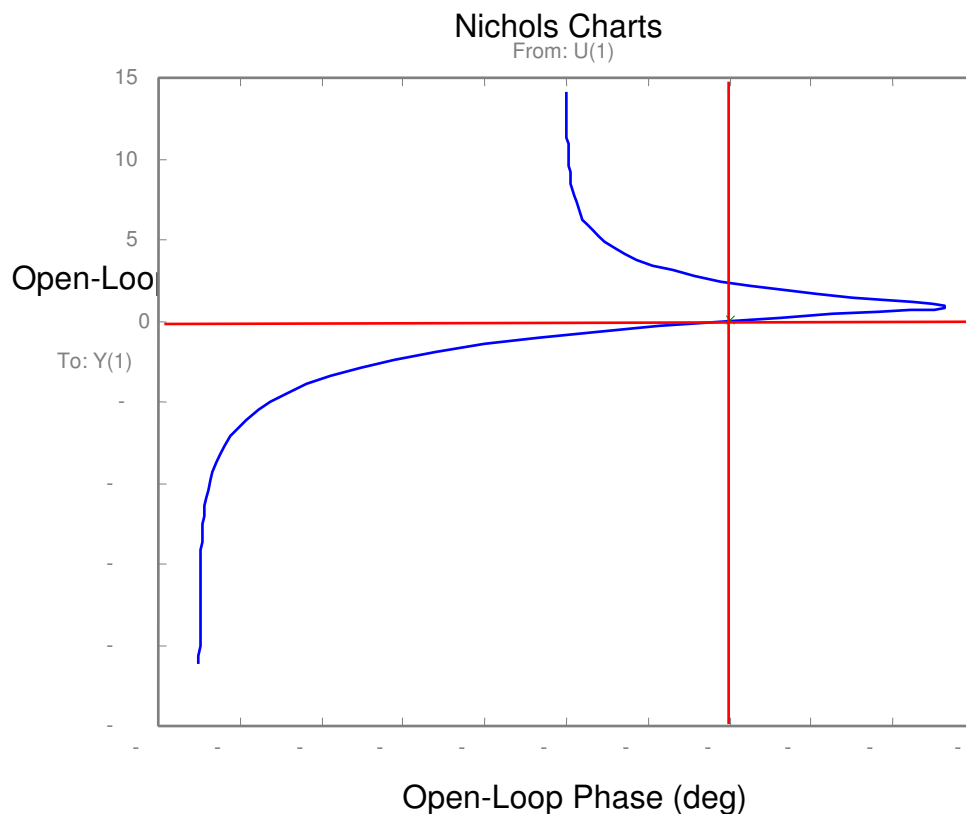
Con tali valori la $C(s)$ modificata è:

$$C_c(s) = \frac{10 + 3.96s}{0.0377s^2 + s}$$

utilizzando tale funzione la $F(s)$ diventa:

$$F_c(s) = P(s)HC_c(s) = \frac{500s + 1000}{s^3 + 40s^2 + 400s} \frac{10 + 3.96s}{0.0377s^2 + s} \frac{1}{2} = \frac{990s^2 + 4480s + 5000}{0.0377s^5 + 2.508s^4 + 55.08s^3 + 400s^2}$$

effettuando il diagramma di Nichols di $F_c(j\omega)$ ottengo:



Con il matlab ho evidenziato con un cerchietto il punto a pulsazione 20 rad/sec scrivendo “nichols(f),hold on , nichols(f,20,'x’)”. Come si vede tale punto ha modulo zero e fase -140°. La correzione è riuscita correttamente.

6. Con riferimento al sistema in retroazione ottenuto considerando la $C(s)$ modificata, si valuti con l'ausilio dei legami globali la sovralongazione percentuale, il tempo di salita, il tempo di assestamento, il tempo all'emivalore e il periodo della prima oscillazione conseguenti ad un ingresso a gradino.

Per poter applicare i legami globali ho bisogno di trovare una serie di parametri che si possono leggere dal diagramma di Bode di $W(j\omega)$ normalizzato al guadagno statico $W(j0)$. Ho bisogno pertanto di $W(s)$.

$$W(s) = \frac{P(s)C_c(s)}{1 + F_c(s)} = \frac{1000 + 500s}{s^3 + 40s^2 + 400s} \frac{10 + 3.96s}{0.0377s^2 + s} =$$

$$= \frac{1980s^2 + 8960s + 10000}{0.0377s^5 + 2.508s^4 + 55.08s^3 + 400s^2} \Rightarrow$$

$$1 + \frac{990s^2 + 4480s + 5000}{0.0377s^5 + 2.508s^4 + 55.08s^3 + 400s^2}$$

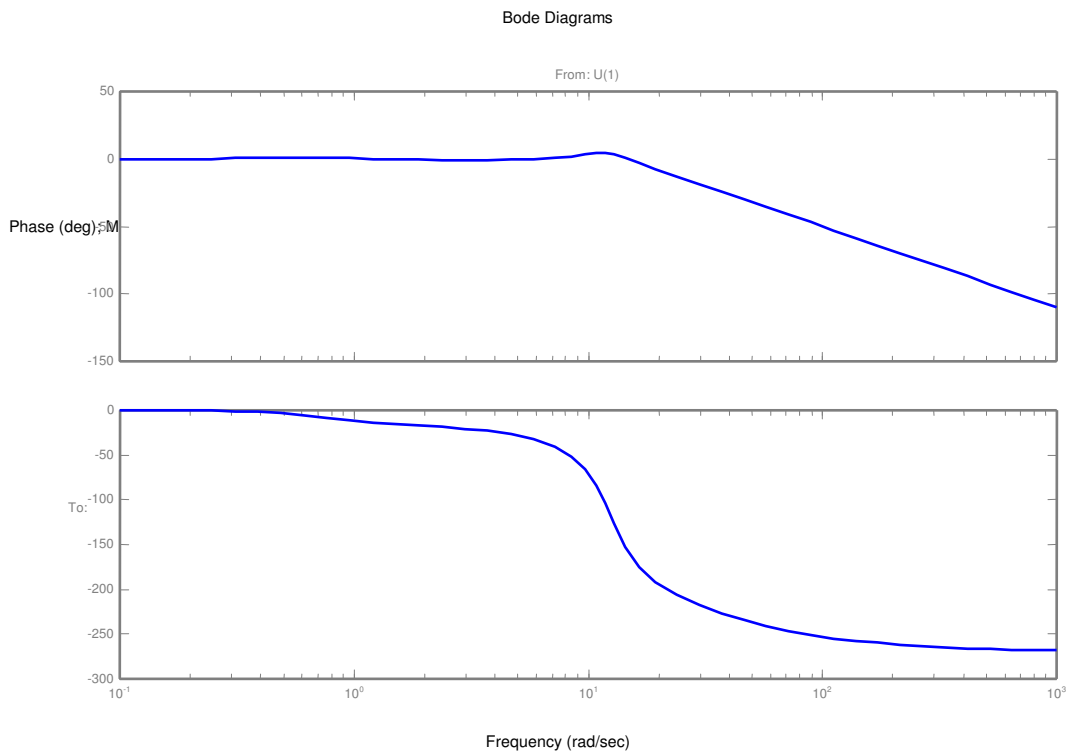
$$\Rightarrow W(s) = \frac{1980s^2 + 8960s + 10000}{0.0377s^5 + 2.508s^4 + 55.08s^3 + 1390s^2 + 4480s + 5000}$$

A me serve $W(s) / W(0)$:

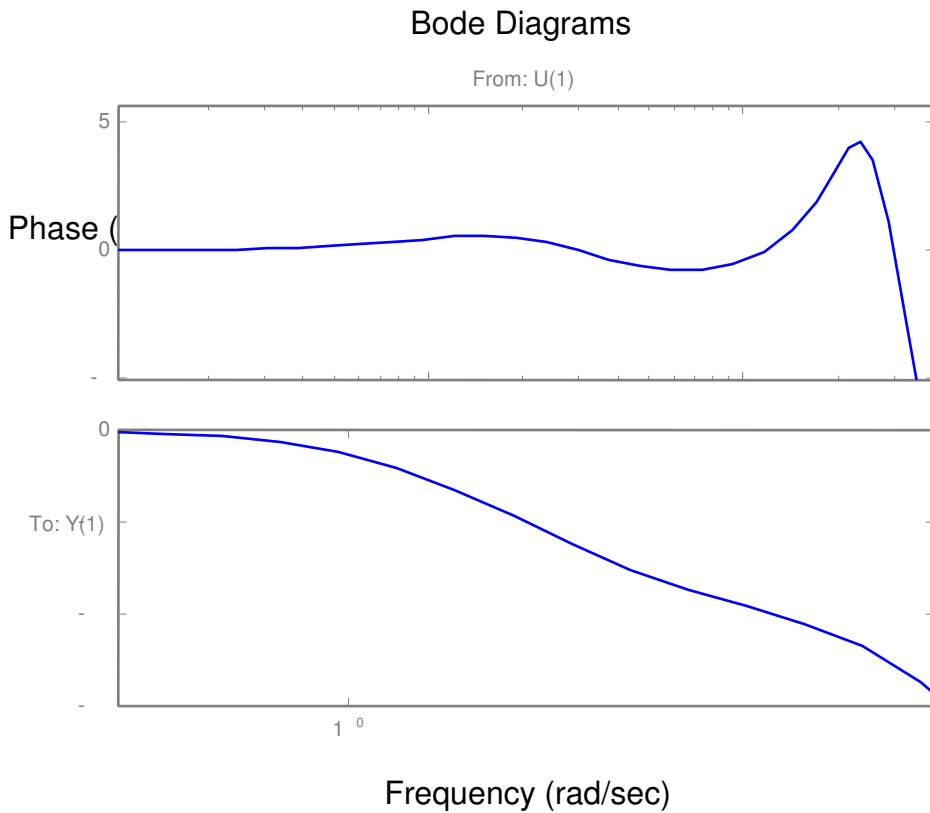
$$W(0)=2$$

$$\frac{W(s)}{W(0)} = \frac{990s^2 + 4480s + 5000}{0.0377s^5 + 2.508s^4 + 55.08s^3 + 1390s^2 + 4480s + 5000}$$

Effettuando il diagramma di Bode di tale funzione ottengo:



Osserviamo che i legami globali si possono utilizzare quando $F(s)$ ha un numero di poli compreso tra 2 e 5 di cui al massimo 2 nell'origine e inoltre $W(s)$ presenta un solo massimo. Io quindi sono proprio al limite perché ho grado 5 e 2 poli nell'origine, ma ho 2 massimi relativi;

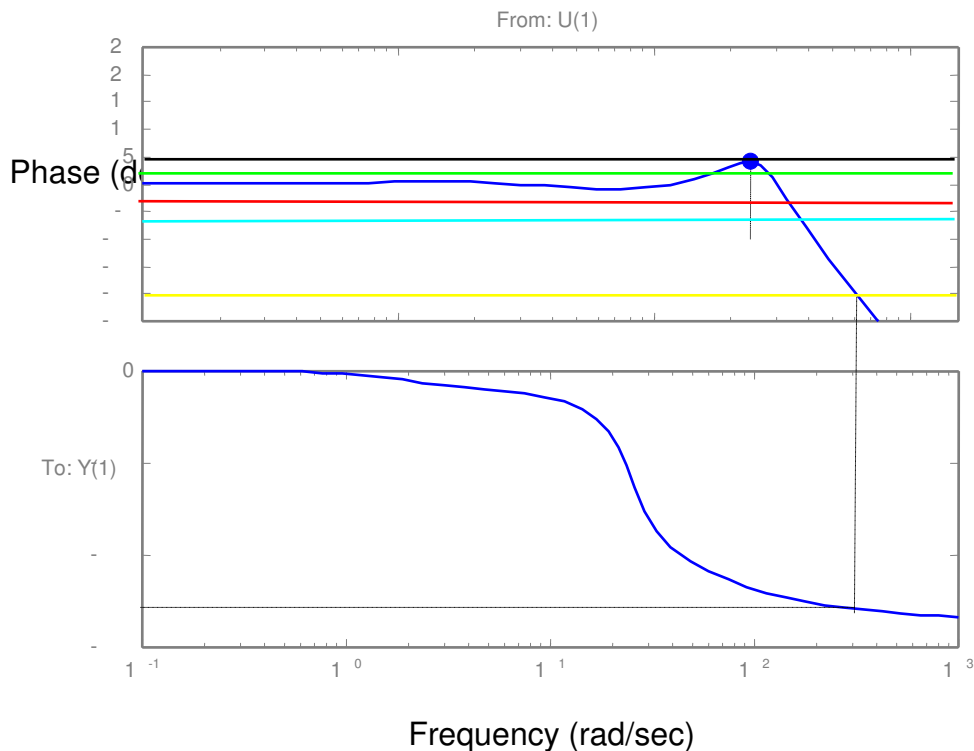


La presenza di 2 massimi relativi porterà ad una discordanza tra i risultati che ricaverò con i legami

globali e quelli letti direttamente dalla risposta indiciale.

Dall' analisi del diagramma di Bode si ricava:

Bode Diagrams



riporto di seguito i valori trovati, tramite il matlab , per ω_3 , ω_6 , ω_{20} , ϕ_{20} , ω' :

$$\left. \begin{array}{l} [\text{modulo}, \text{fase}] = \text{bode}(w, 33.1) \\ \text{modulo} = 0.7107 (=3\text{dB}) \\ \text{fase} = -174.58 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_3 = 33.1 \text{ rad/s}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gg [\text{modulo}, \text{fase}] = \text{bode}(w, 36.7) \\ \text{modulo} = 0.4989 (=6\text{dB}) \\ \text{fase} = 173.97 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_6 = 36.7 \text{ rad/s}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gg [\text{modulo}, \text{fase}] = \text{bode}(w, 61.8) \\ \text{modulo} = 0.1001 (=20\text{dB}) \\ \text{fase} = 141.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_{20} = 61.8 \text{ rad/s} \\ \phi_{20} = -218.4^\circ \end{array}$$

Sempre con l'ausilio del matlab ho trovato che il modulo di risonanza M_r vale **4.22 dB**.

Il valore di ω' è la pulsazione in corrispondenza della quale sono sceso di 3 dB rispetto al modulo di risonanza,; quindi il modulo in corrispondenza di ω' deve valere 1.22 dB (=1.15 in naturali)

$$\begin{array}{l} \gg [\text{modulo}, \text{fase}] = \text{bode}(w, 28.7) \\ \text{modulo} = 1.1507 \\ \text{fase} = -150.97 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \gg [\text{modulo}, \text{fase}] = \text{bode}(w, 28.7) \\ \text{modulo} = 1.1507 \\ \text{fase} = -150.97 \end{array}} \right\} \Rightarrow \omega' = 28.7 \text{ rad/s}$$

Ora devo convertire tutte le pulsazioni in frequenze e devo esprimere M_r in naturali.

$$B_3 = \omega_3 / 2\pi = 5.27 \text{ s}^{-1}$$

$$B_6 = \omega_6 / 2\pi = 5.84 \text{ s}^{-1}$$

$$B' = \omega' / 2\pi = 4.57 \text{ s}^{-1}$$

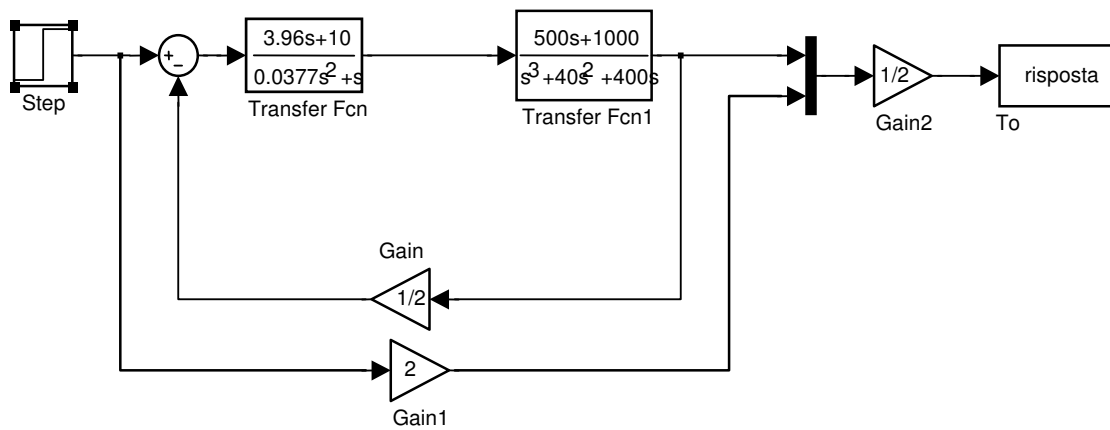
$$M_r = 1.63$$

$$\varphi_{20} = -218.4^\circ$$

Sostituendo tali valori nei legami globali trovo:

- $s \% = [0.42 \ln(M_r B_3 / B_6) + 0.18] * 100 = 34.2 \%$
- $t_r = 0.45 / B_6 = 0.077 \text{ s}$
- $t_{a5\%} = \frac{1}{B_6} (2.16 \frac{M_r B_3}{B_6} - 0.4) = 0.48 \text{ s}$
- $t_e = 0.002 |\varphi_{20}| / B_6 = 0.07 \text{ s}$
- $T = 1.22 / B' = 0.27 \text{ s}$

E' possibile ora mediante la risposta indiciale andare a verificare i parametri trovati con i legami globali.



Nei diagrammi di seguito riportati sono evidenziati i nostri parametri:

Come è ben evidenziato dalle figure il tempo in cui la risposta indiciale ha raggiunto 0.5 è circa 1.07 secondi. Essendo il gradino applicato in $t = 1$ s ho che $t_e = 0.07$ (in accordo con i legami globali).

Per quel che riguarda il periodo T ho trovato che vale circa 0.27 s. (in accordo con i legami globali)

Come si vede il tempo di salita è in accordo con quanto visto con i legami globali (0.077s) mentre la sovraelongazione no, infatti risulta essere pari al 21.58% quando con i legami globali avevo 34.2%.

L'ultimo parametro è il tempo di assestamento:

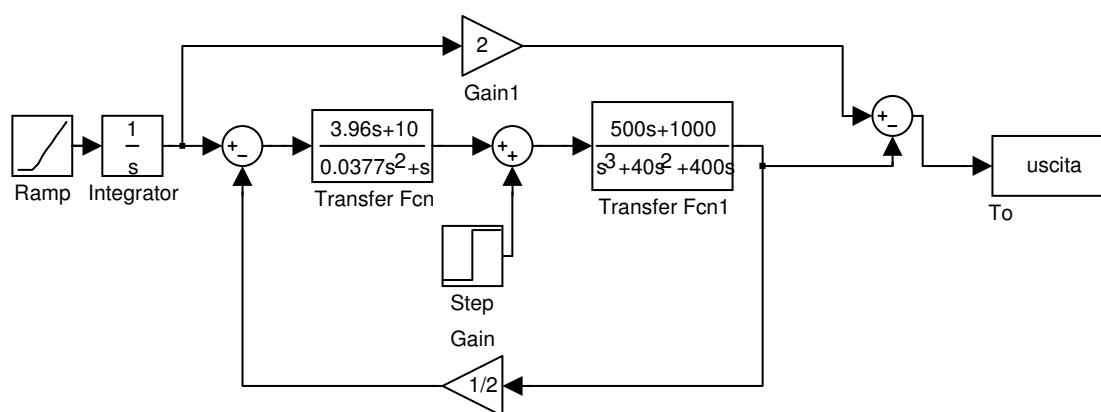
Il tempo di assestamento risulta essere circa 2.14 secondi quando con i legami globali mi era venuto 0.48 secondi.

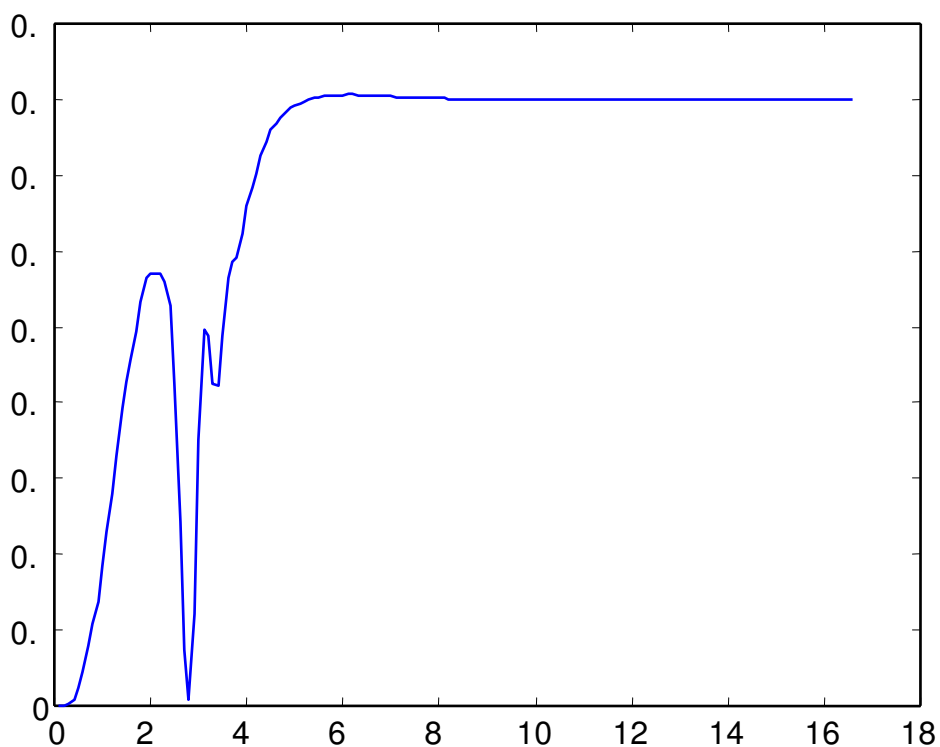
Ho scoperto che gli unici due parametri che non rispecchiano quanto visto con i legami globali sono $s\%$ e t_a .

Se osserviamo bene ci accorgiamo che entrambi, e solo loro, dipendono da M_r . Da ciò si può dedurre che l'errore è legato proprio a M_r .

Il motivo è quello a cui facevo riferimento già in precedenza, ossia la presenza di due massimi relativi che si oppone alle ipotesi necessarie per poter usare i legami globali.

In conclusione evidenzio la correttezza del lavoro effettuato simulando il sistema nel dominio del tempo:





SCARICATO DA WWW.RICCARDOGALLETTI.COM/APPUNTI_GRATIS

- appunti, tesi ed elaborati gratis -