Università degli studi di Cassino – relazione finale corso di fondamenti di automatica

Elaborato J

Relazione di Fondamenti di automatica

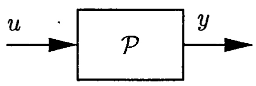
Docente del corso:
Stefano Chiaverini

Riccardo Galletti

Matr. 1265

Elaborato J

Per l'impianto $\mathcal{P}$

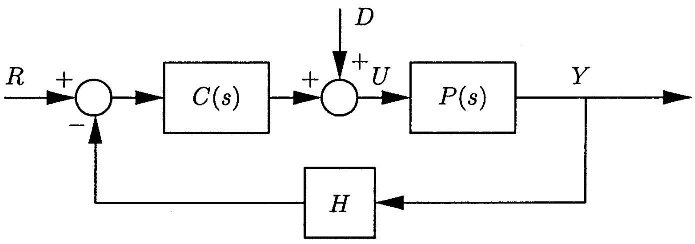


caratterizzato dal modello implicito ingresso-uscita lineare e stazionario

$$\frac{\mathrm{d}^3 y(t)}{\mathrm{d}t^3} + 10\,\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 25\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 30\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + 15\,u(t),$$

si ricavi la funzione di trasferimento $P(s) = Y(s)/U(s)$.

Con riferimento allo schema di controllo in retroazione



determinare $C(s)$ e H in modo tale che:

- $r(t) = 4\,\delta_{-3}(t) \quad \Rightarrow \quad y_d(t) = 12\,\delta_{-3}(t);$
- $r(t) = 4\,\delta_{-3}(t) \quad \Rightarrow \quad e_{A,\infty} = 15;$
- il sistema a ciclo chiuso sia astatico nei confronti dell'ingresso non manipolabile $d(t) = \delta_{-1}(t)$.

Per il sistema a ciclo chiuso così ottenuto si analizzino le proprietà di stabilità al variare del guadagno k_C e si determini l'intervallo dei valori di k_C che ne assicurano la stabilità asintotica.

Si modifichi, infine, $C(s)$ in modo da soddisfare l'ulteriore specifica:

- $F(\jmath\omega) \quad : \quad m_\varphi = 40°, \quad \omega_t = 5\,\mathrm{rad/s}.$

Con riferimento al sistema in retroazione ottenuto considerando la $C(s)$ modificata, si valuti inoltre mediante l'applicazione dei legami globali:

- la sovraelongazione percentuale alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso;
- il tempo di salita alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso;
- il tempo di assestamento alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso;
- il tempo all'emivalore alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso;
- il periodo della prima oscillazione alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso.

Con l'ausilio di uno strumento di simulazione, infine, si verifichi nel dominio del tempo la correttezza dell'analisi e della sintesi svolta nei domini operativi s e ω.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

In esame si ha lo studio dell'impianto P caratterizzato dal modello implicito ingresso-uscita lineare e stazionario:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 25\frac{dy(t)}{dt} = 30\frac{du(t)}{dt} + 15u(t)$$

Trasformiamo secondo Laplace, tenendo conto del fatto che le condizioni iniziali sono nulle:

$$(s^3 + 10s^2 + 25s)Y(s) = (30s + 15)U(s) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{30s + 15}{s^3 + 10s^2 + 25s} = \frac{30s + 15}{s(s+5)^2}$$

La F.d.t. trovata presenta un polo nell'origine e due poli identici a parte reale negativa, poiché $s_1 = 0$, $s_2 = -5 = s_3$.

CONTROLLO IN RETROAZIONE

Il progetto del controllore riguarda la creazione della struttura dei blocchi di f.d.t. C e H affinché l'uscita Y segua l'andamento voluto Y_d. I riferimenti dati impongono:
$r(t) = 4\delta_{-3}(t) \Rightarrow y_d(t) = 12\delta_{-3}(t)$ e $r(t) = 4\delta_{-3}(t) \Rightarrow e_{A,\infty}(t) = 15$

Quindi:
calcoliamo K_d e H(s) tale che:
$r(t) = 4\delta_{-3}(t) \Rightarrow y_d(t) = 12\delta_{-3}(t)$ nel dominio di Laplace equivalgono a :

$$R(s) = \frac{4}{s^3} \qquad Y_D(s) = \frac{12}{s^3}$$

poiché $Y_D(s) = K_d \cdot R(t)$ si ha

$$K_d = \frac{Y_d}{R(s)} = \frac{12}{s^3} \cdot \frac{s^3}{4} = 3$$

da cui ricavo H(s) come:

$$H(s) = \frac{1}{K_d} = \frac{1}{3}$$

La seconda specifica può essere soddisfatta con diverse scelte del controllore. Esse sono:
A) Introduzione di poli nell'origine;
B) Attribuzione di un opportuno guadagno di Bode Kc;

Calcoliamo quindi C(s) tale che $r(t) = 4\delta_{-3}(t) \Rightarrow e_{A,\infty}(t) = 15$:
Per avere un errore a regime finito occorre avere l'uguaglianza: $k = h$
dove k indica l'ordine (diminuito di 1 unità) del riferimento, mentre h è il numero dei poli nell'origine nella G(s), ossia la F.d.T di catena diretta.
Nel nostro caso abbiamo:
k=2, cioè abbiamo come riferimento una rampa parabolica, e dobbiamo avere h=2.
Dato che l'impianto già possiede un polo nell'origine, dobbiamo inserirne uno nel controllore C(s), che quindi assumerà una struttura del tipo:

$$C(s) = \frac{K_c}{s}$$

$e_{A,\infty}(t) = 15$ ma dato che $e_{A,\infty}(t) = \frac{K_d{}^2 \cdot R_0}{K_a} = \frac{3^2 \cdot 4}{K_a}$ si ha $K_a = \frac{36}{15} = 2.4$; inoltre essendo

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot G(s) \Rightarrow K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{K_c}{s} \frac{30s + 15}{s(s+5)^2} = K_c \frac{15}{25} = K_c \frac{15}{25}$$

cioè $K_c \frac{3}{5} = 2.4 \Rightarrow K_c = 4$

Per vedere se il sistema a ciclo chiuso è astatico nei confronti di $d(t) = \delta_{-1}(t)$, (gradino unitario), devo verificare la seguente disuguaglianza: $h_1 > k$, dove h_1 sta ad indicare il numero dei poli dell'origine di C(s) e k è l'ordine, diminuito di un'unità, dell'ingresso non manipolabile.
Dunque:

$$C(s) = \frac{K_c}{s^{h_1}} = \frac{4}{s} \rightarrow h_1 = 1 \qquad D(s) = \frac{D_0}{s^{k+1}} = \frac{1}{s} \rightarrow k = 0$$

Quindi è verificata la relazione $h_1 > k$ che rende il sistema astatico nei confronti di d(t).

⇒ PROPRIETA' DI STABILITA'

Per l'analisi della stabilità del sistema è necessario conoscere i poli della f.d.t. a ciclo chiuso, pari a:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)} = \frac{C(s) \cdot P(s)}{1 + C(s) \cdot P(s) \cdot H(s)}$$

Occorre dunque analizzare le radici dell'equazione:

$$1 + F(s) = 1 + C(s) \cdot P(s) \cdot H(s) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{K_c}{s} \cdot \frac{30s + 15}{s(s+5)^2}$$

Tali radici si ricavano risolvendo l'equazione:

$num[1+F(s)]=0 \leftrightarrow 3s^2(s+5)^2+K_c\cdot(30s+15)=0 \Rightarrow 3s^2(s^2+10s+25)+30K_cs+15K_c)=0$

cioè $3s^4+30s^3+75s^2+30K_cs+15K_c=0$

Se e solo se tutti i poli della f. d. t. ad anello chiuso hanno parte reale strettamente negativa il sistema è asintoticamente stabile in quanto la risposta in transitorio tende a 0 nel tempo.
Il criterio che mi permette di dterminare, in modo semplice quanto veloce, il segno dei poli senza risolvere l'equazione è il ***criterio di Routh***.
In particolare, condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare e stazionario sia asinntoticamente stabile è che gli elementi della prima colonna della tabella di Routh associata al polinomio caratteristico siano tutti dello stesso segno.
Costruiamo, a questo punto, la tabella di Routh:

4	3	75	15 K_c
3	30	30 K_c	0
2	c	c'	0
1	d	0	0
0	e	0	0

Ricaviamo c, c', d, e:

$$c=-\frac{1}{30}\cdot\det\begin{bmatrix}3 & 75\\ 30 & 30K_c\end{bmatrix}=\frac{2250-90K_c}{30}=75-3K_c$$

$$c'=-\frac{1}{30}\cdot\det\begin{bmatrix}3 & 15K_c\\ 30 & 0\end{bmatrix}=15K_c$$

$$d=-\frac{1}{c}\cdot\det\begin{bmatrix}30 & 30K_c\\ c & c'\end{bmatrix}=-\frac{1}{75-3K_c}\cdot\det\begin{bmatrix}30 & 30K_c\\ 75-3K_c & 15K_c\end{bmatrix}$$

$$=\frac{30\cdot(75-3K_c)K_c-450K_c}{75-3K_c}=30K_c-\frac{150K_c}{25-K_c}$$

$$e = -\frac{1}{d}\cdot\det\begin{bmatrix} c & c' \\ d & 0 \end{bmatrix} = c' = 15K_c$$

Per la condizione imposta sulla stabilità otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} K_c < 25 \\ 30K_c - \dfrac{150K_c}{25-K_c} > 0 \\ K_c > 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 75 - 3K_c > 0 \\ 30K_c - \dfrac{150K_c}{25-K_c} > 0 \\ 15K_c > 0 \end{array} \Longleftrightarrow$$

Dato che 25-Kc>0, basta imporre che $750K_c - 30K_c^2 - 150K_c > 0$ cioè che $K_c(600 - 30K_c) > 0$, cioè $(600 - 30K_c) > 0$.
In sintesi, condizione per avere asintotica stabilità sul sistema a ciclo chiuso è che

$$0 < K_c < 20$$

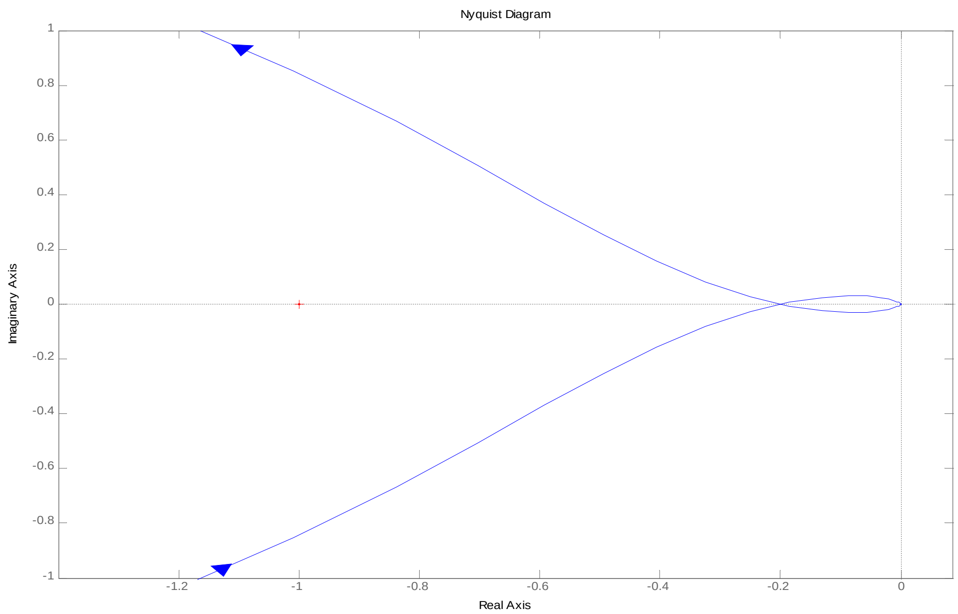
Essendo K_c pari a 4 e dunque appartenente all'intervallo [0,20], possiamo affermare che il nostro sistema è asintoticamente stabile.

Per avere un riscontro dei risultati ottenuti, ai fini della stabilità del sistema, si ricorre ad un metodo di indagine basato sulla conoscenza della f.d.t di anello F(s): il *criterio di Nyquist*.

Secondo tale metodo condizione necessaria e sufficiente per garantire l'asintotica stabilità del sistema a ciclo chiuso è che il diagramma di Nyquist completo della F(jω) circondi il punto critico (-1, j0), senza toccarlo, un numero di volte pari al numero di poli a parte reale strettamente positiva della F(s). Il numero dei circondamenti è contato positivamente in senso antiorario, negativamente in senso orario.

Nel nostro caso $F(s) = C(s)\cdot P(s)\cdot H(s) = \frac{1}{3}\cdot\frac{K_c}{s}\cdot\frac{30s+15}{s(s+5)^2}$ possiamo vedere che non ha poli a parte reale positiva, ma ha un polo nell'origine con molteplicità 2.

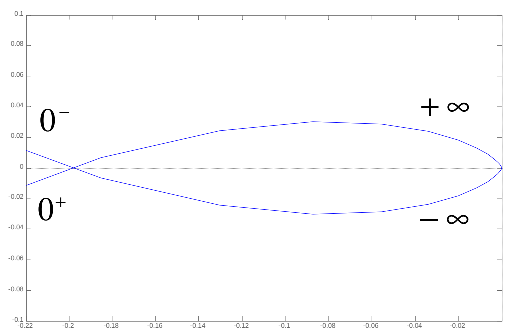
Tracciamo il diagramma di Nyquist con $K_c = 4$;

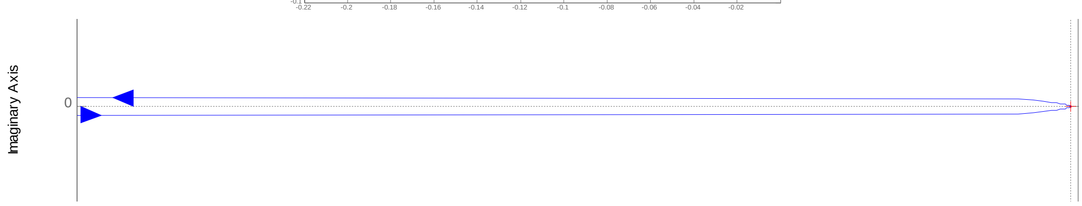


Come potevamo aspettarci, in prossimità della pulsazione $\omega = 0$ abbiamo una singolarità nell'applicazione del suddetto criterio. Sfruttando il diagramma ottenuto in Matlab e tenendo conto che $F(j\omega) = \dfrac{40j\omega + 20}{(j\omega)^4 + 10(j\omega)^3 + 25(j\omega)^2} = \dfrac{\widetilde{F}(j\omega)}{(j\omega)^2}$ e che $\lim_{\omega \to 0} \angle \widetilde{F}(j\omega) = 0$

Si ha: $\lim_{\omega \to 0^+} \angle F(j\omega) = -\pi$ e $\lim_{\omega \to 0^-} \angle F(j\omega) = +\pi$

Si nota dunque che per ω tendente a 0^+ il diagramma di Nyquist tende asintoticamente al semiasse reale negativo, e per ω tendente a 0^- tende asintoticamente al semiasse reale >0.



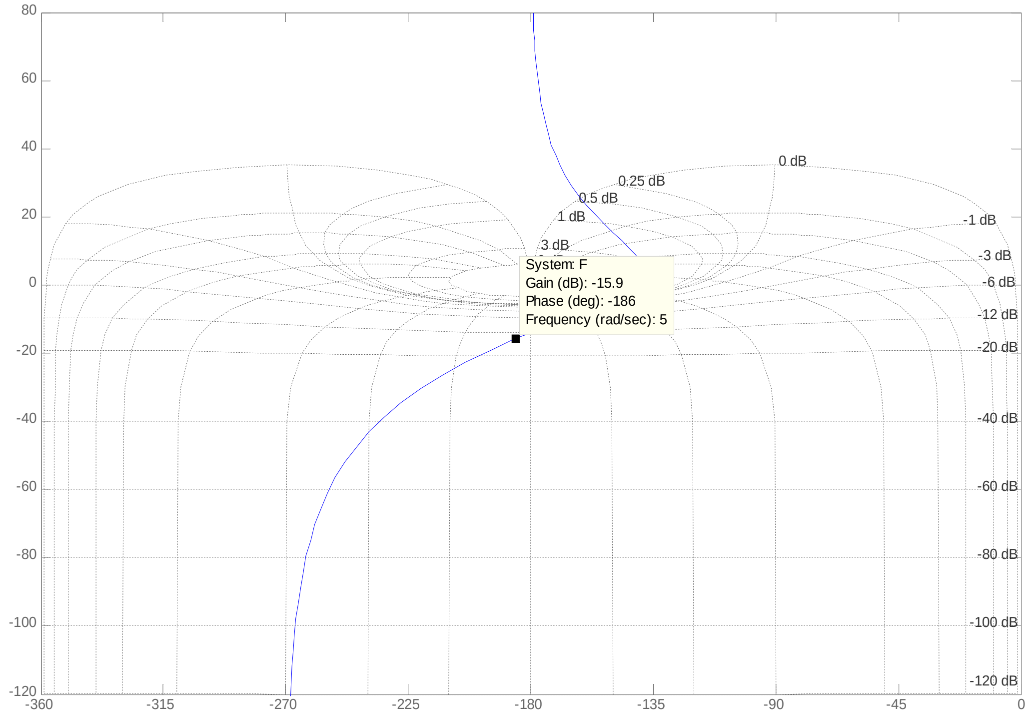


e dunque, chiudendo il grafico con due mezzi giri orari da 0- a 0+ il numero dei circondamenti del punto critico rimane pari a zero. Essendo zero il numero dei poli a parte reale >0 di F(s) (si ricorda che l'aggiramento in senso antiorario nel dominio ci fa considerare, ai fini dell'applicazione del criterio di Nyquist, il polo nell'origine come polo a parte reale negativa), il criterio di Nyquist è verificato.

Dato che il diagramma di Nyquist interseca l'asse negativa dei reali in corrispondenza di -0.1978, siamo in presenza di una stabilità regolare, assicurata per valori del guadagno d'anello aperto $\widetilde{K} < \frac{1}{0.1978} = 5.06$. Ciò significa che posso moltiplicare $K_c = 4$ al massimo per 5.06. Arrivo cioè a circa 20, cioè quanto mi aveva detto il criterio di Routh.

AZIONE CORRETTRICE

Dal diagramma di Nichols della F(jω) si ha:



Dunque si ricava che il punto di lavoro alla $\omega_t = 5$ rad/s si trova in corrispondenza di: $|F(j\omega)| = -15.9dB$ e $\angle F(j\omega) = -186°$.

Considerato che $m_\varphi = 40°$ e quindi $\angle F(j\omega) = -\pi + m_\varphi = -140°$ la correzione da apportare prevede un'amplificazione di 15.9 dB e un anticipo di fase pari a 46°.
Dovremo utilizzare una rete anticipatrice, caratterizzata da una f.d.t. pari a :

$$\frac{1+s\cdot\tau}{1+\alpha\cdot s\cdot\tau}$$

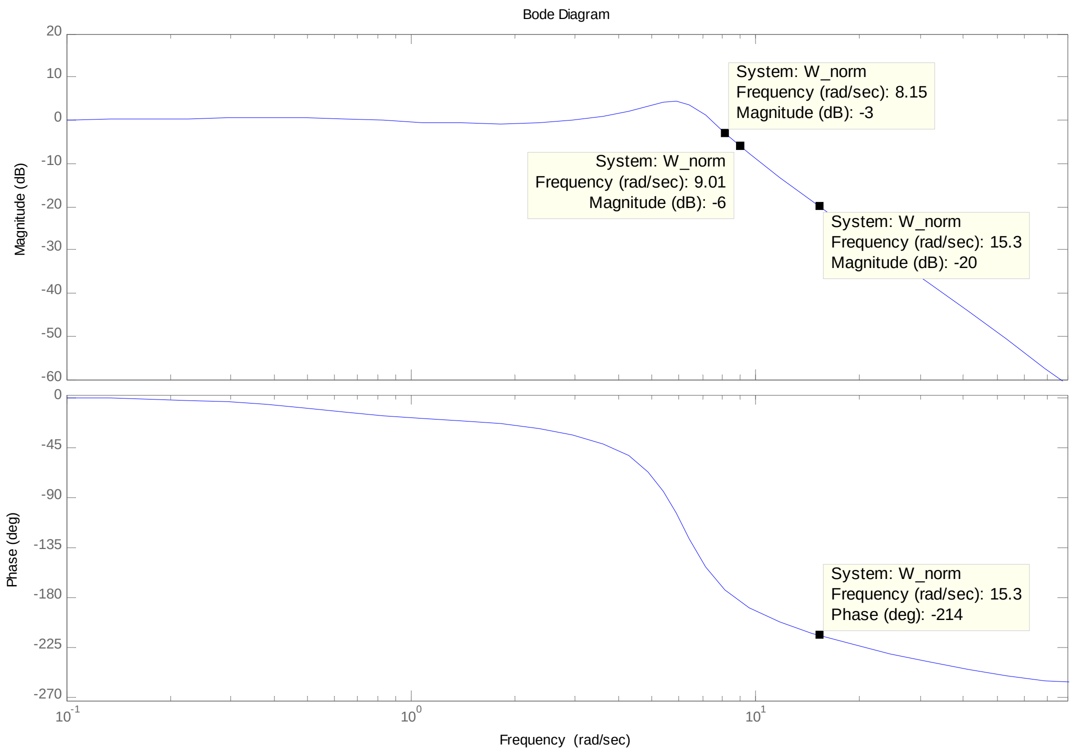
PARAMETRI TEMPORALI CARATTERISTICI

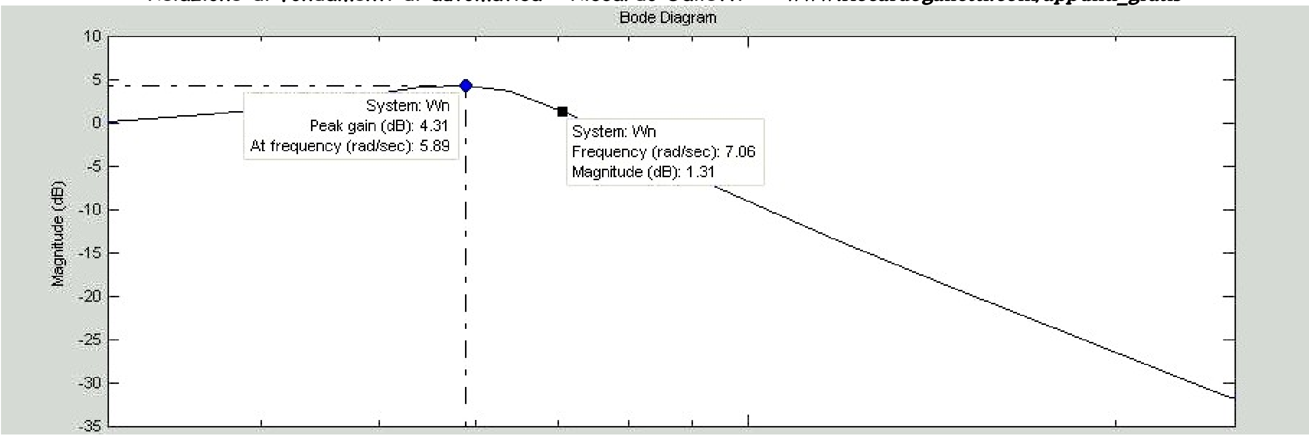
Sfruttando, a questo punto, i parametri ottenuti nel dominio della frequenza e i legami globali otteniamo i corripondenti parametri caratteristici nel dominio del tempo, facendo riferimento alla f.d.t. a ciclo chiuso:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+F(s)} = \frac{C(s)\cdot P(s)}{1+C(s)\cdot P(s)\cdot H(s)} =$$

$$= \frac{27.5\,s^5 + 486.3\,s^4 + 3045\,s^3 + 7631\,s^2 + 6113\,s + 1500}{0.02\,s^8 + 0.74\,s^7 + 10.26\,s^6 + 84.62\,s^5 + 473.8\,s^4 + 1700\,s^3 + 3169\,s^2 + 2038\,s + 500}$$

Il guadagno statico è W(j0)=3, dunque diagrammiamo tramite Bode la W(s) normalizzata:





Da questi ricaviamo:

$\omega_{3dB} = 8.15$ **rad/s** $\Rightarrow$ $B_{3dB} = 1.30$ **Hz**

$\omega_{6dB} = 9.01$ **rad/s** $\Rightarrow$ $B_{6dB} = 1.43$ **Hz**

$\omega_{20dB} = 15.3$ **rad/s** $\Rightarrow$ $\varphi_{20dB} = -214°$

$\omega' = 7.06$ **rad/s** $\Rightarrow$ $B' = 1.12$ **Hz**

$M_r = 4.31$ **dB** $= 1.64$

TEMPO DI SALITA $t_s = \dfrac{0.45}{B_6} = \dfrac{0.45}{1.43} = 0.315$ **s**

TEMPO ALL'EMIVALORE $t_s = 0.002 \cdot \dfrac{|\varphi_{20}|}{B_6} = 0.002 \cdot \dfrac{|-214|}{1.43} = 0.299$ **s**

PERIODO DI PRIMA OSCILLAZIONE $T = \dfrac{1.22}{B'} = \dfrac{1.22}{1.12} = 1.089$ **s**

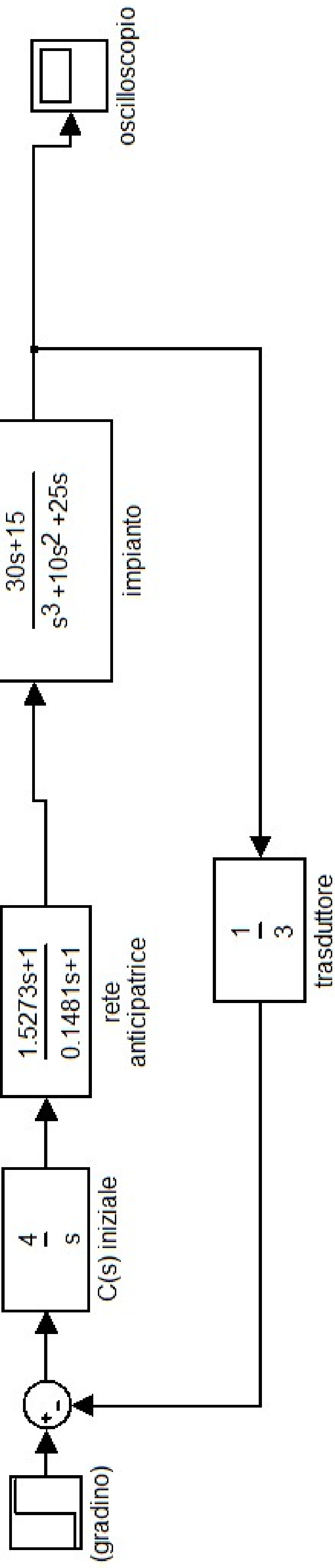
SOVRAELONGAZIONE MASSIMA $s = 0.42 \cdot \log_e\left(\dfrac{M_r \cdot B_3}{B_6}\right) + 0.18 = 0.42 \cdot \log_e\left(\dfrac{1.64 \cdot 1.30}{1.43}\right) + 0.18 = 0.348$

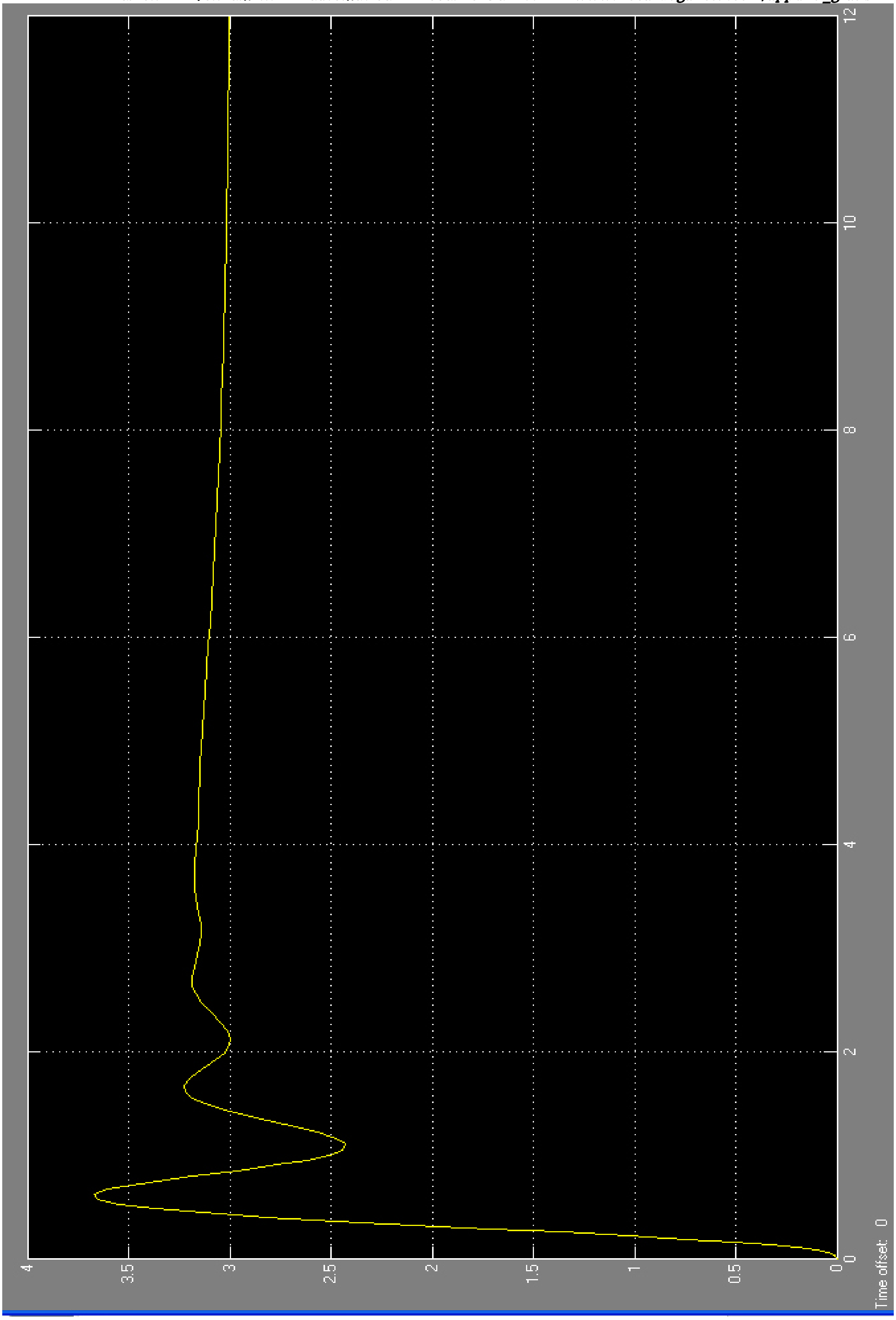
TEMPO DI ASSESTAMENTO AL 5% $t_{a,5\%} = \dfrac{1}{B_6} \cdot \left(2.16 \cdot \dfrac{M_r \cdot B_3}{B_6} - 0.4\right) = \dfrac{1}{1.43} \cdot \left(2.16 \cdot \dfrac{1.64 \cdot 1.30}{1.43} - 0.4\right) = 1.972$ **s**

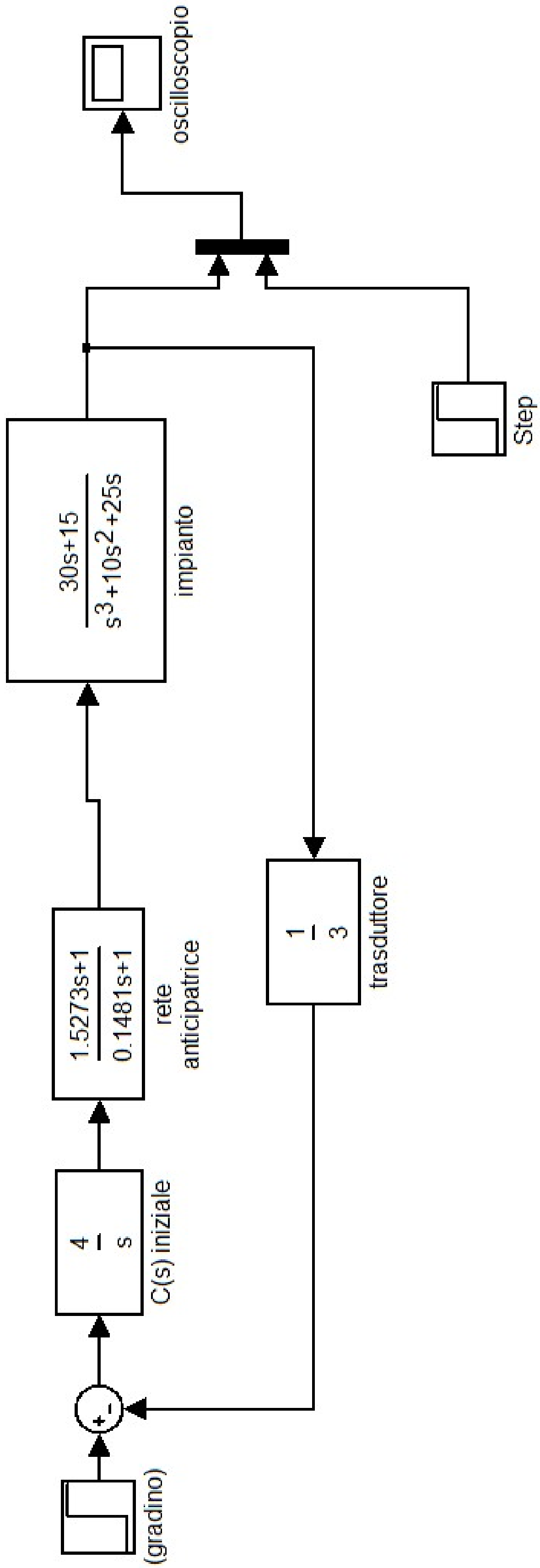
SIMULAZIONE

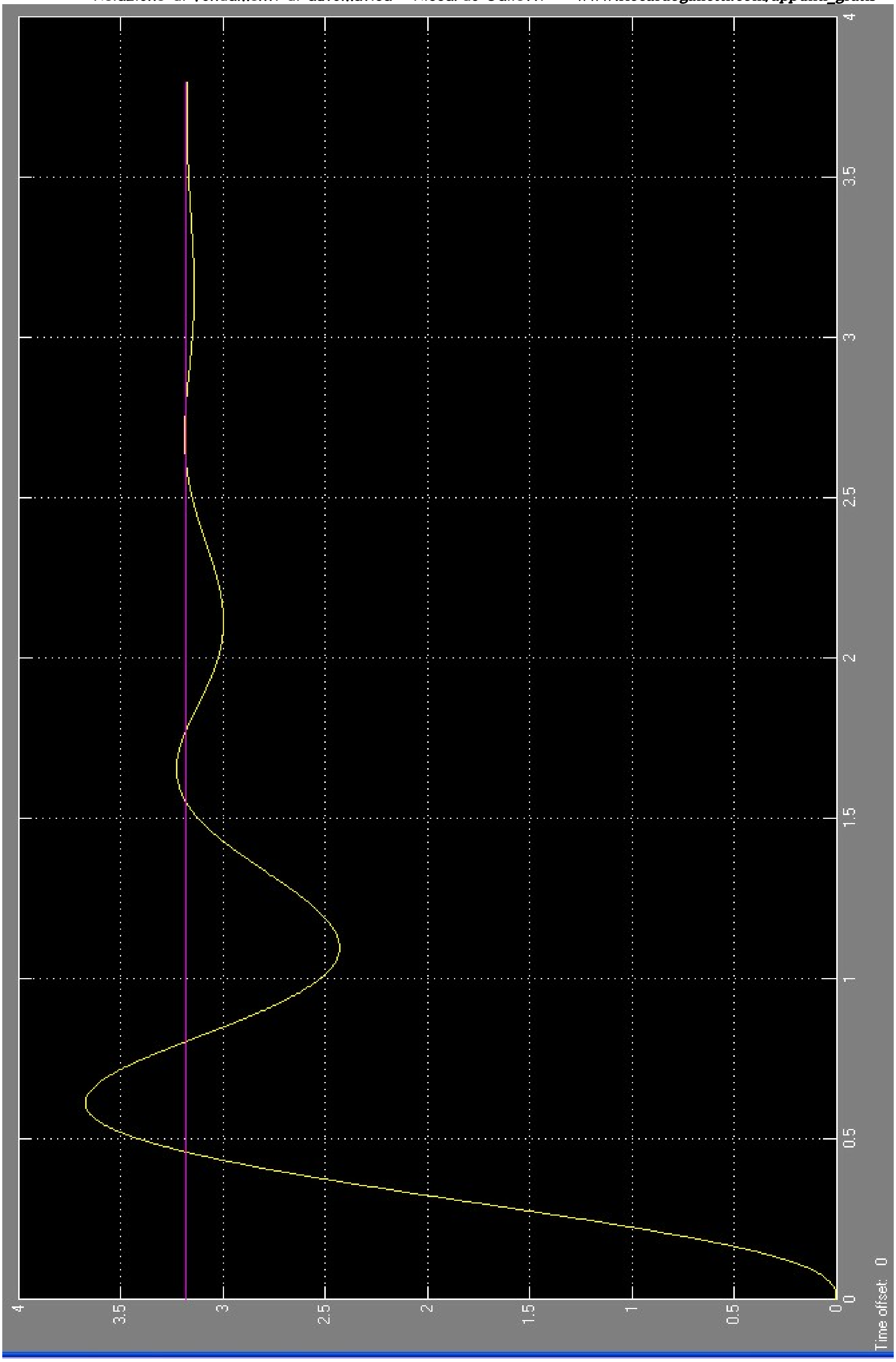
Per finire, utilizzando lo strumento di simulazione SIMULINK® verifichiamo nel dominio del tempo la correttezza dell'analisi e della sintesi svolta nel dominio di Laplace e della frequenza.

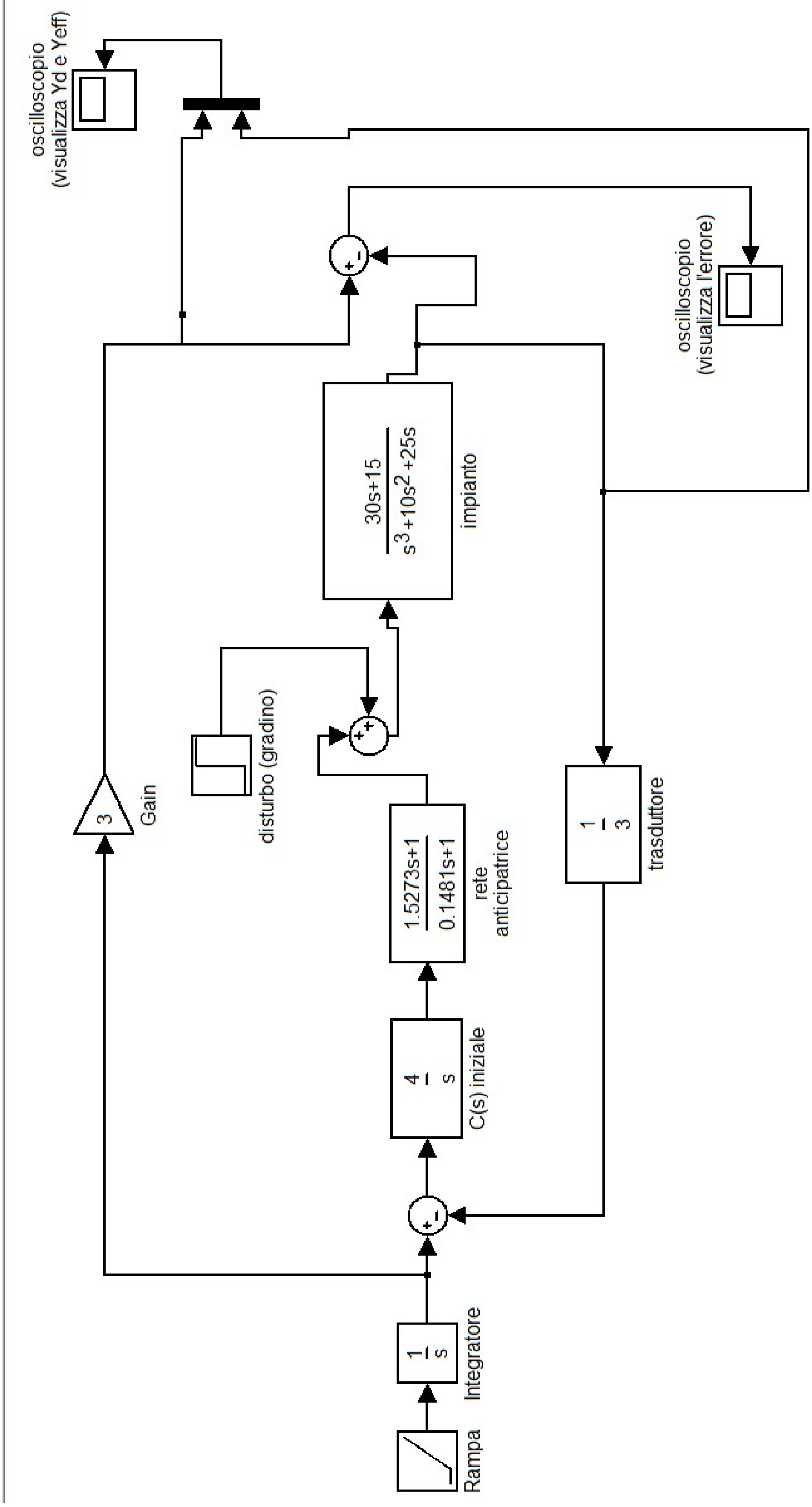
Nelle pagine successive, nell'ordine, saranno presentati i modelli e i grafici relativi all'analisi della risposta indiciale, della risposta complessiva in presenza del riferimento dato e dell'ingresso non manipolabile, infine sarà rappresentato l'errore assoluto a regime.

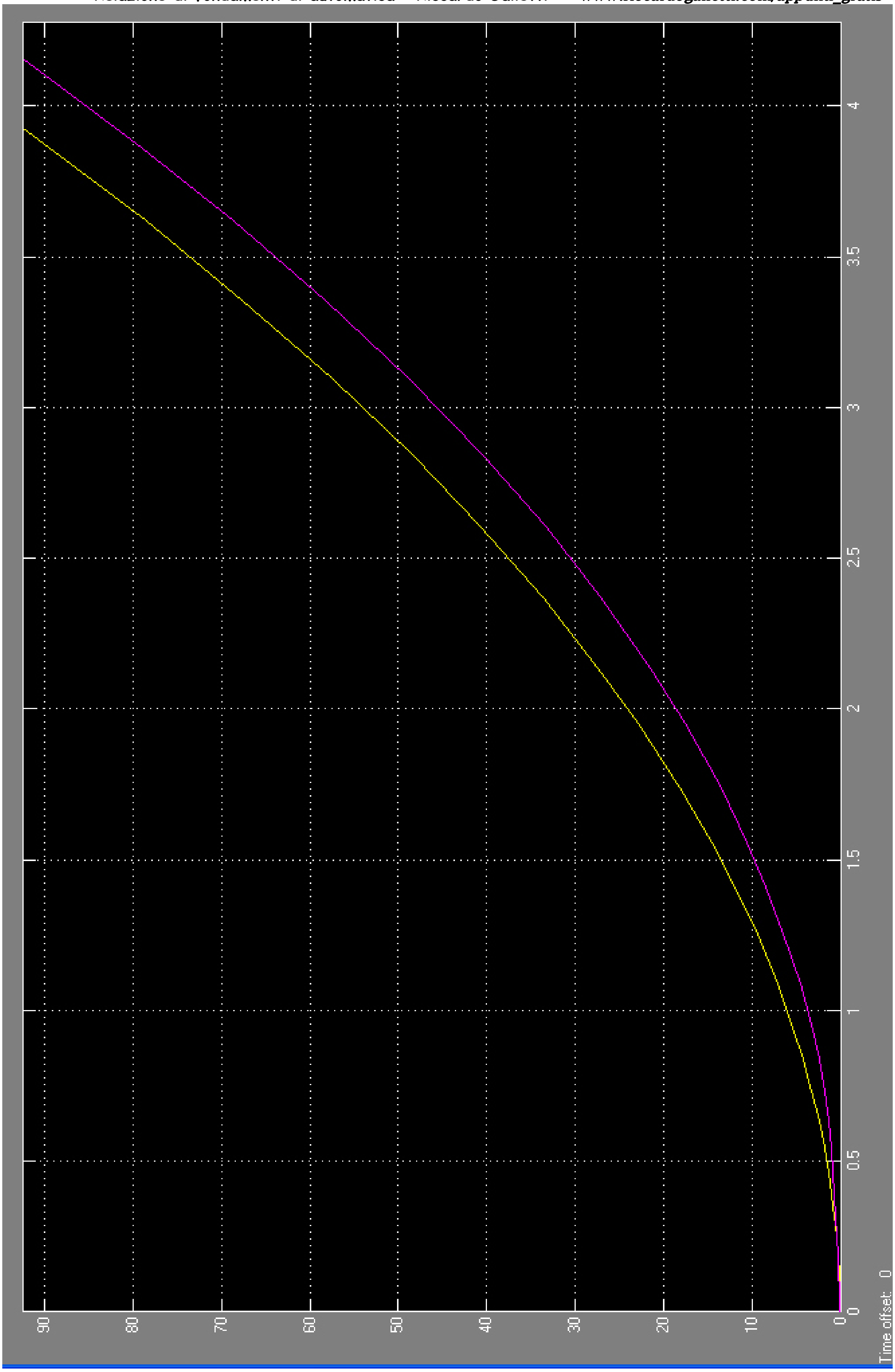

oscilloscopio
30s+15
s3+10s2+25s
impianto
1
3
trasduttore
1.5273s+1
0.1481s+1
rete
anticipatrice
4
s
C(s) iniziale
+
-
(gradino)

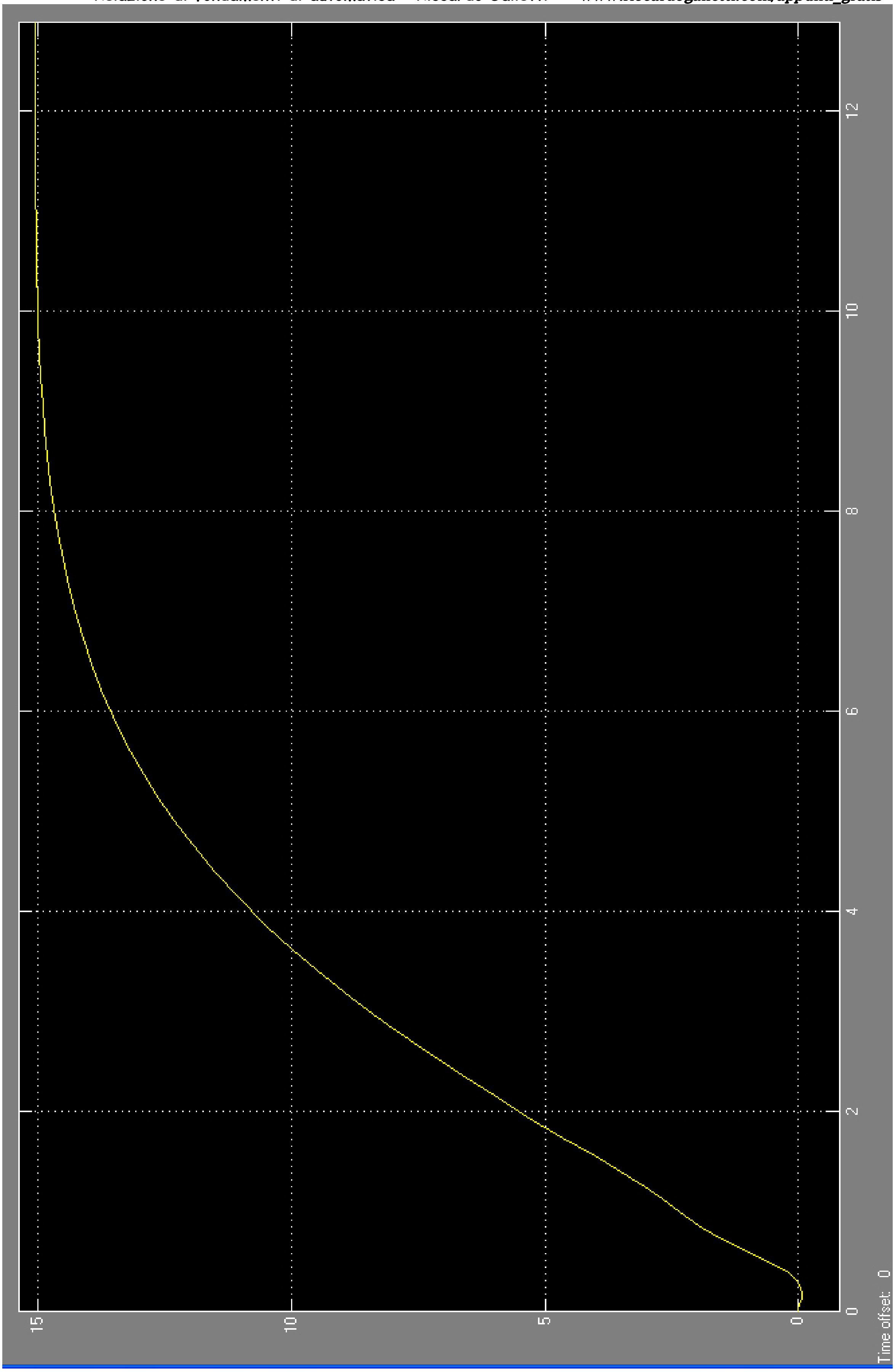

0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
2
4
6
8
10
12
Time offset: 0


oscilloscopio
Step
30s+15 / s^3+10s^2+25s
impianto
1/3
trasduttore
1.5273s+1 / 0.1481s+1
rete anticipatrice
4/s
C(s) iniziale
(gradino)


0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Time offset: 0


oscilloscopio
(visualizza Yd e Yeff)
oscilloscopio
(visualizza l'errore)
30s+15
s^3+10s^2+25s
impianto
disturbo (gradino)
3
Gain
1.5273s+1
0.1481s+1
rete
anticipatrice
1
3
trasduttore
4
s
C(s) iniziale
1
s
Integratore
Rampa


0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Time offset: 0


15
10
5
0
0
2
4
6
8
10
12
Time offset: 0