

*Relazione di  
Fondamenti di automatica*

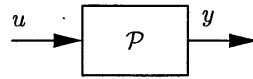
**Docente del corso:  
Stefano Chiaverini**

**Riccardo Galletti**

**Matr. 1265**

## Elaborato J

Per l'impianto  $\mathcal{P}$

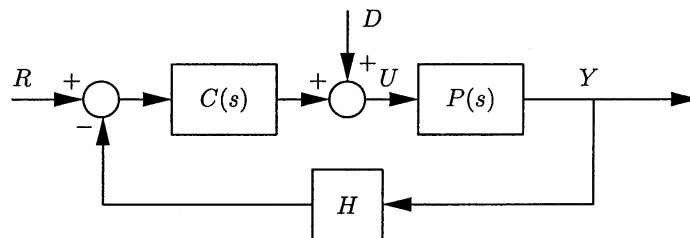


caratterizzato dal modello implicito ingresso-uscita lineare e stazionario

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 10 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 25 \frac{dy(t)}{dt} = 30 \frac{du(t)}{dt} + 15 u(t),$$

si ricavi la funzione di trasferimento  $P(s) = Y(s)/U(s)$ .

Con riferimento allo schema di controllo in retroazione



determinare  $C(s)$  e  $H$  in modo tale che:

- $r(t) = 4 \delta_{-3}(t) \Rightarrow y_d(t) = 12 \delta_{-3}(t)$ ;
- $r(t) = 4 \delta_{-3}(t) \Rightarrow e_{A,\infty} = 15$ ;
- il sistema a ciclo chiuso sia astatico nei confronti dell'ingresso non manipolabile  $d(t) = \delta_{-1}(t)$ .

Per il sistema a ciclo chiuso così ottenuto si analizzino le proprietà di stabilità al variare del guadagno  $k_C$  e si determini l'intervallo dei valori di  $k_C$  che ne assicurano la stabilità asintotica.

Si modifichi, infine,  $C(s)$  in modo da soddisfare l'ulteriore specifica:

- $F(j\omega) : m_\varphi = 40^\circ, \omega_t = 5 \text{ rad/s}$ .

Con riferimento al sistema in retroazione ottenuto considerando la  $C(s)$  modificata, si valuti inoltre mediante l'applicazione dei legami globali:

- la sovraelongazione percentuale alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso;
- il tempo di salita alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso;
- il tempo di assestamento alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso;
- il tempo all'emivalore alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso;
- il periodo della prima oscillazione alla risposta indiciale del sistema a ciclo chiuso.

Con l'ausilio di uno strumento di simulazione, infine, si verifichi nel dominio del tempo la correttezza dell'analisi e della sintesi svolta nei domini operativi  $s$  e  $\omega$ .

## ⇒ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

In esame si ha lo studio dell'impianto P caratterizzato dal modello implicito ingresso-uscita lineare e stazionario:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 10 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 25 \frac{dy(t)}{dt} = 30 \frac{du(t)}{dt} + 15u(t)$$

Trasformiamo secondo Laplace, tenendo conto del fatto che le condizioni iniziali sono nulle:

$$(s^3 + 10s^2 + 25s)Y(s) = (30s + 15)U(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{30s + 15}{s^3 + 10s^2 + 25s} = \frac{30s + 15}{s(s + 5)^2}$$

La F.d.t. trovata presenta un polo nell'origine e due poli identici a parte reale negativa, poiché  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -5 = s_3$ .

## ⇒ CONTROLLO IN RETROAZIONE

Il progetto del controllore riguarda la creazione della struttura dei blocchi di f.d.t. C e H affinché l'uscita Y segua l'andamento voluto  $Y_d$ . I riferimenti dati impongono:

$$r(t) = 4\delta_{-3}(t) \Rightarrow y_d(t) = 12\delta_{-3}(t) \text{ e } r(t) = 4\delta_{-3}(t) \Rightarrow e_{A,\infty}(t) = 15$$

Quindi:

calcoliamo  $K_d$  e  $H(s)$  tale che:

$$r(t) = 4\delta_{-3}(t) \Rightarrow y_d(t) = 12\delta_{-3}(t) \text{ nel dominio di Laplace equivalgono a :}$$

$$R(s) = \frac{4}{s^3} \quad Y_D(s) = \frac{12}{s^3}$$

poiché  $Y_D(s) = K_d \cdot R(s)$  si ha

$$K_d = \frac{Y_d}{R(s)} = \frac{12}{s^3} \cdot \frac{s^3}{4} = 3$$

da cui ricavo  $H(s)$  come:

$$H(s) = \frac{1}{K_d} = \frac{1}{3}$$

La seconda specifica può essere soddisfatta con diverse scelte del controllore. Esse sono:

- A) Introduzione di poli nell'origine;
- B) Attribuzione di un opportuno guadagno di Bode  $K_c$ ;

Calcoliamo quindi  $C(s)$  tale che  $r(t) = 4\delta_{-3}(t) \Rightarrow e_{A,\infty}(t) = 15$  :

Per avere un errore a regime finito occorre avere l'uguaglianza:  $k = h$

dove  $k$  indica l'ordine (diminuito di 1 unità) del riferimento, mentre  $h$  è il numero dei poli nell'origine nella  $G(s)$ , ossia la F.d.T di catena diretta.

Nel nostro caso abbiamo:

$k=2$ , cioè abbiamo come riferimento una rampa parabolica, e dobbiamo avere  $h=2$ .

Dato che l'impianto già possiede un polo nell'origine, dobbiamo inserirne uno nel controllore  $C(s)$ , che quindi assumerà una struttura del tipo:

$$C(s) = \frac{K_c}{s}$$

$e_{A,\infty}(t) = 15$  ma dato che  $e_{A,\infty}(t) = \frac{K_d^2 \cdot R_0}{K_a} = \frac{3^2 \cdot 4}{K_a}$  si ha  $K_a = \frac{36}{15} = 2.4$ ; inoltre essendo

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) \Rightarrow K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K_c}{s} \frac{30s + 15}{s(s+5)^2} = K_c \frac{15}{25} = K_c \frac{3}{5}$$

$$\text{cioè } K_c \frac{3}{5} = 2.4 \Rightarrow K_c = 4$$

Per vedere se il sistema a ciclo chiuso è astatico nei confronti di  $d(t) = \delta_{-1}(t)$ , (gradino unitario), devo verificare la seguente disuguaglianza:  $h_1 > k$ , dove  $h_1$  sta ad indicare il numero dei poli dell'origine di  $C(s)$  e  $k$  è l'ordine, diminuito di un'unità, dell'ingresso non manipolabile.

Dunque:

$$C(s) = \frac{K_c}{s^{h_1}} = \frac{4}{s} \rightarrow h_1 = 1 \quad D(s) = \frac{D_0}{s^{k+1}} = \frac{1}{s} \rightarrow k = 0$$

Quindi è verificata la relazione  $h_1 > k$  che rende il sistema astatico nei confronti di  $d(t)$ .

## ⇒ PROPRIETA' DI STABILITA'

Per l'analisi della stabilità del sistema è necessario conoscere i poli della f.d.t. a ciclo chiuso, pari a:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)} = \frac{C(s) \cdot P(s)}{1 + C(s) \cdot P(s) \cdot H(s)}$$

Occorre dunque analizzare le radici dell'equazione:

$$1 + F(s) = 1 + C(s) \cdot P(s) \cdot H(s) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{K_c}{s} \cdot \frac{30s + 15}{s(s+5)^2}$$

Tali radici si ricavano risolvendo l'equazione:

$$\text{num}[1 + F(s)] = 0 \Leftrightarrow 3s^2(s+5)^2 + K_c \cdot (30s+15) = 0 \Rightarrow 3s^2(s^2 + 10s + 25) + 30K_c s + 15K_c = 0$$

cioè  $3s^4 + 30s^3 + 75s^2 + 30K_c s + 15K_c = 0$

Se e solo se tutti i poli della f. d. t. ad anello chiuso hanno parte reale strettamente negativa il sistema è asintoticamente stabile in quanto la risposta in transitorio tende a 0 nel tempo.

Il criterio che mi permette di determinare, in modo semplice quanto veloce, il segno dei poli senza risolvere l'equazione è il ***criterio di Routh***.

In particolare, condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare e stazionario sia asintoticamente stabile è che gli elementi della prima colonna della tabella di Routh associata al polinomio caratteristico siano tutti dello stesso segno.

Costruiamo, a questo punto, la tabella di Routh:

4	3	75	15 K <sub>c</sub>
3	30	30 K <sub>c</sub>	0
2	c	c'	0
1	d	0	0
0	e	0	0

Ricaviamo c, c', d, e:

$$c = -\frac{1}{30} \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 75 \\ 30 & 30K_c \end{bmatrix} = \frac{2250 - 90K_c}{30} = 75 - 3K_c$$

$$c' = -\frac{1}{30} \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 15K_c \\ 30 & 0 \end{bmatrix} = 15K_c$$

$$d = -\frac{1}{c} \cdot \det \begin{bmatrix} 30 & 30K_c \\ c & c' \end{bmatrix} = -\frac{1}{75 - 3K_c} \cdot \det \begin{bmatrix} 30 & 30K_c \\ 75 - 3K_c & 15K_c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{30 \cdot (75 - 3K_c)K_c - 450K_c}{75 - 3K_c} = 30K_c - \frac{150K_c}{25 - K_c}$$

$$e = -\frac{1}{d} \cdot \det \begin{pmatrix} c & c' \\ d & 0 \end{pmatrix} = c' = 15K_c$$

Per la condizione imposta sulla stabilità otteniamo il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_c < 25 \\ 30K_c - \frac{150K_c}{25 - K_c} > 0 \\ K_c > 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 75 - 3K_c > 0 \\ 30K_c - \frac{150K_c}{25 - K_c} > 0 \iff \\ 15K_c > 0 \end{array}$$

Dato che  $25 - K_c > 0$ , basta imporre che  $750K_c - 30K_c^2 - 150K_c > 0$  cioè che  $K_c(600 - 30K_c) > 0$ , cioè  $(600 - 30K_c) > 0$ .

In sintesi, condizione per avere asintotica stabilità sul sistema a ciclo chiuso è che

$$0 < K_c < 20$$

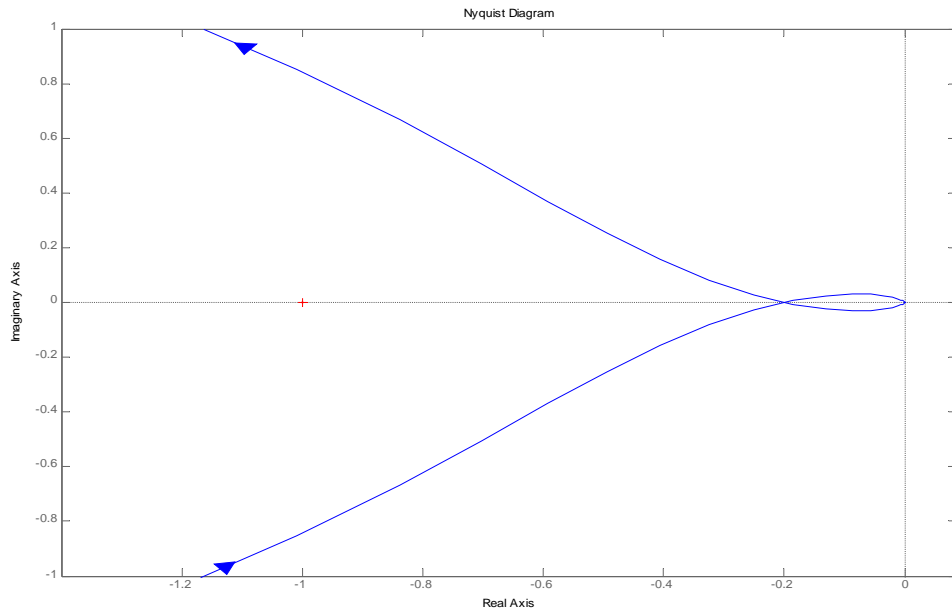
Essendo  $K_c$  pari a 4 e dunque appartenente all'intervallo  $[0,20]$ , possiamo affermare che il nostro sistema è asintoticamente stabile.

Per avere un riscontro dei risultati ottenuti, ai fini della stabilità del sistema, si ricorre ad un metodo di indagine basato sulla conoscenza della f.d.t di anello  $F(s)$ : il critério di Nyquist.

Secondo tale metodo condizione necessaria e sufficiente per garantire l'asintotica stabilità del sistema a ciclo chiuso è che il diagramma di Nyquist completo della  $F(j\omega)$  circonda il punto critico  $(-1, j0)$ , senza toccarlo, un numero di volte pari al numero di poli a parte reale strettamente positiva della  $F(s)$ . Il numero dei circondamenti è contato positivamente in senso antiorario, negativamente in senso orario.

Nel nostro caso  $F(s) = C(s) \cdot P(s) \cdot H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{K_c}{s} \cdot \frac{30s + 15}{s(s + 5)^2}$  possiamo vedere che non ha poli a parte reale positiva, ma ha un polo nell'origine con molteplicità 2.

Tracciamo il diagramma di Nyquist con  $K_c = 4$ ;

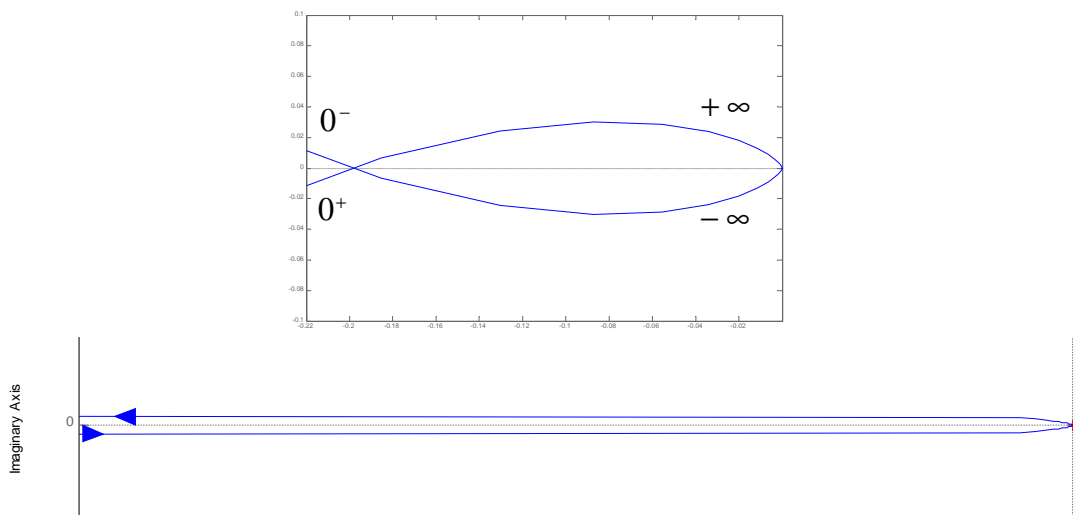


Come potevamo aspettarci, in prossimità della pulsazione  $\omega = 0$  abbiamo una singolarità nell'applicazione del suddetto criterio. Sfruttando il diagramma ottenuto in Matlab e tenendo

conto che  $F(j\omega) = \frac{40j\omega + 20}{(j\omega)^4 + 10(j\omega)^3 + 25(j\omega)^2} = \frac{\tilde{F}(j\omega)}{(j\omega)^2}$  e che  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle \tilde{F}(j\omega) = 0$

Si ha:  $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle F(j\omega) = -\pi$  e  $\lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle F(j\omega) = +\pi$

Si nota dunque che per  $\omega$  tendente a  $0^+$  il diagramma di Nyquist tende asintoticamente al semiasse reale negativo, e per  $\omega$  tendente a  $0^-$  tende asintoticamente al semiasse reale  $>0$ .



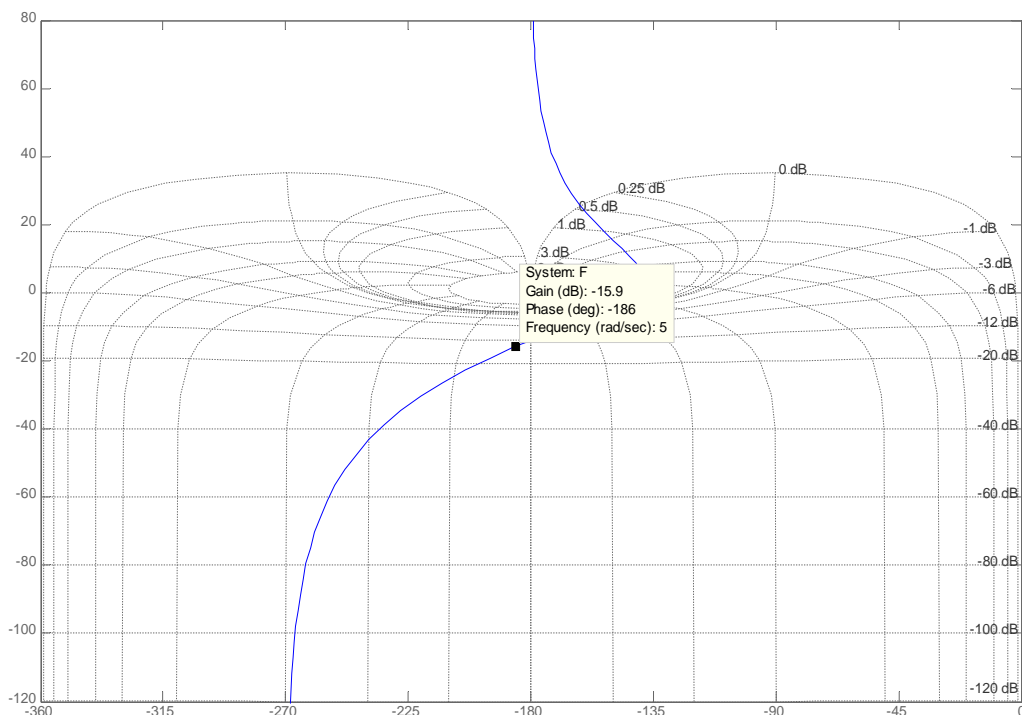
e dunque, chiudendo il grafico con due mezzi giri orari da  $0^-$  a  $0^+$  il numero dei circondamenti del punto critico rimane pari a zero. Essendo zero il numero dei poli a parte reale  $>0$  di  $F(s)$  (si ricorda che l'aggiramento in senso antiorario nel dominio ci fa considerare, ai fini dell'applicazione del criterio di Nyquist, il polo nell'origine come polo a

- 8 - Relazione di fondamenti di automatica - Riccardo Galletti - [www.riccardogalletti.com/appunti\\_gratis](http://www.riccardogalletti.com/appunti_gratis)  
 parte reale negativa), il criterio di Nyquist è verificato.

Dato che il diagramma di Nyquist interseca l'asse negativa dei reali in corrispondenza di  $-0.1978$ , siamo in presenza di una stabilità regolare, assicurata per valori del guadagno d'anello aperto  $\tilde{K} < \frac{1}{0.1978} = 5.06$ . Ciò significa che posso moltiplicare  $K_c = 4$  al massimo per  $5.06$ . Arrivo cioè a circa 20, cioè quanto mi aveva detto il criterio di Routh.

⇒ AZIONE CORRETRICE

Dal diagramma di Nichols della  $F(j\omega)$  si ha:



Dunque si ricava che il punto di lavoro alla  $\omega_r = 5$  rad/s si trova in corrispondenza di:  
 $|F(j\omega)| = -15.9 \text{ dB}$  e  $\angle F(j\omega) = -186^\circ$ .

Considerato che  $m_\phi = 40^\circ$  e quindi  $\angle F(j\omega) = -\pi + m_\phi = -140^\circ$  la correzione da apportare prevede un'amplificazione di  $15.9 \text{ dB}$  e un anticipo di fase pari a  $46^\circ$ .

Dovremo utilizzare una rete anticipatrice, caratterizzata da una f.d.t. pari a :

$$\frac{1 + s \cdot \tau}{1 + \alpha \cdot s \cdot \tau}$$





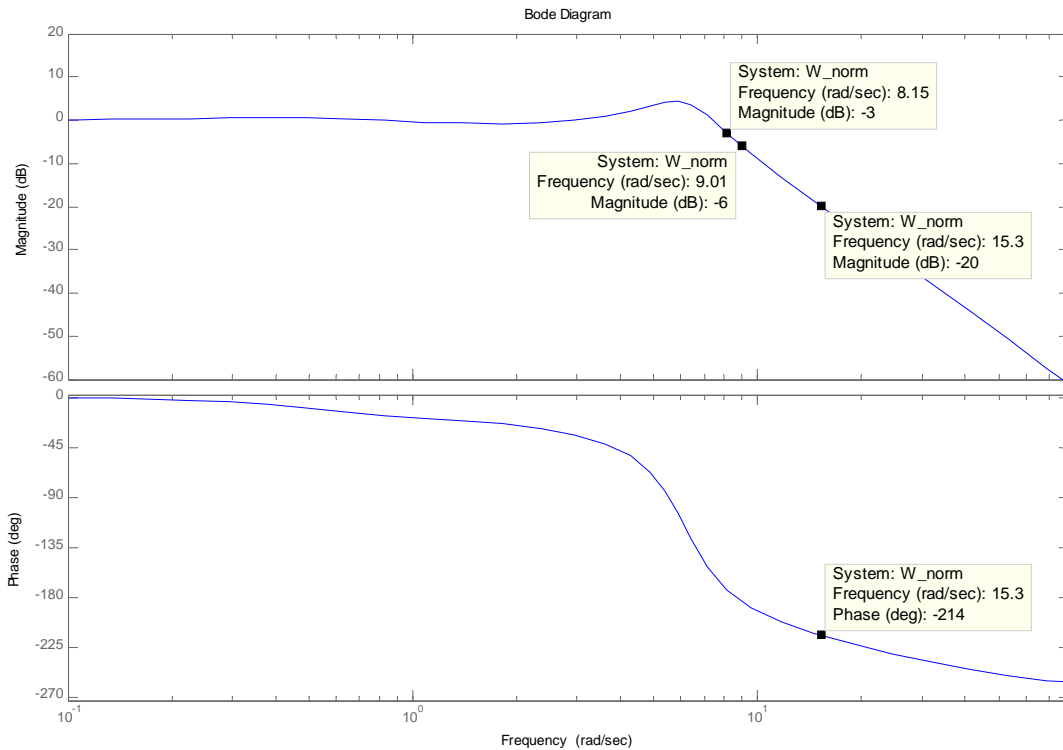
⇒ **PARAMETRI TEMPORALI CARATTERISTICI**

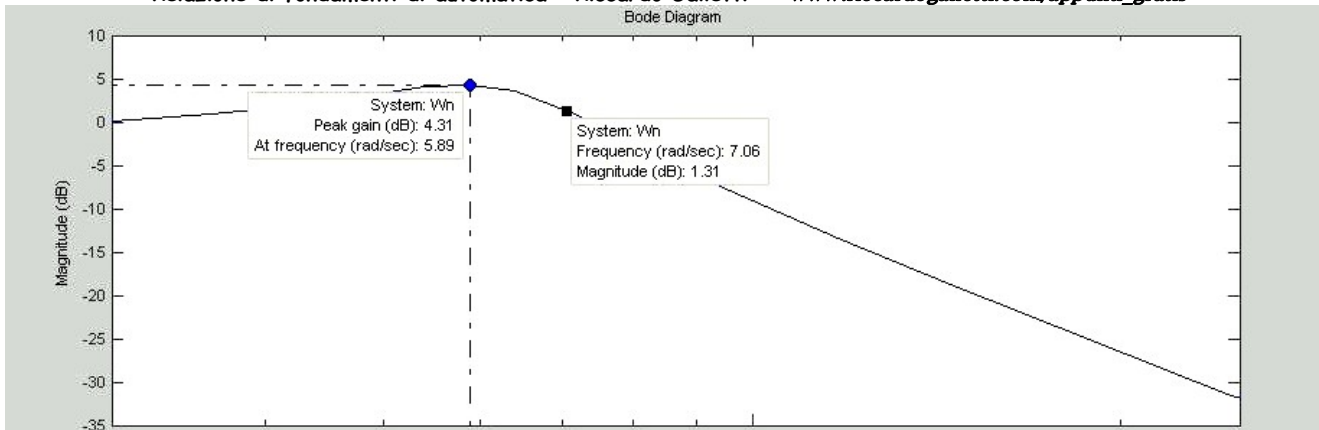
Sfruttando, a questo punto, i parametri ottenuti nel dominio della frequenza e i legami globali otteniamo i corrispondenti parametri caratteristici nel dominio del tempo, facendo riferimento alla f.d.t. a ciclo chiuso:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)} = \frac{C(s) \cdot P(s)}{1 + C(s) \cdot P(s) \cdot H(s)} =$$

$$= \frac{27.5 s^5 + 486.3 s^4 + 3045 s^3 + 7631 s^2 + 6113 s + 1500}{0.02 s^8 + 0.74 s^7 + 10.26 s^6 + 84.62 s^5 + 473.8 s^4 + 1700 s^3 + 3169 s^2 + 2038 s + 500}$$

Il guadagno statico è  $W(j0)=3$ , dunque diagrammiamo tramite Bode la  $W(s)$  normalizzata:





Da questi ricaviamo:

$$\omega_{3dB} = 8.15 \text{ rad/s} \Rightarrow B_{3dB} = 1.30 \text{ Hz}$$

$$\omega_{6dB} = 9.01 \text{ rad/s} \Rightarrow B_{6dB} = 1.43 \text{ Hz}$$

$$\omega_{20dB} = 15.3 \text{ rad/s} \Rightarrow \varphi_{20dB} = -214^\circ$$

$$\omega' = 7.06 \text{ rad/s} \Rightarrow B' = 1.12 \text{ Hz}$$

$$M_r = 4.31 \text{ dB} = 1.64$$

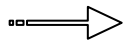
$$\text{TEMPO DI SALITA } t_s = \frac{0.45}{B_6} = \frac{0.45}{1.43} = 0.315 \text{ s}$$

$$\text{TEMPO ALL'EMIVALORE } t_s = 0.002 \cdot \frac{|\varphi_{20}|}{B_6} = 0.002 \cdot \frac{|-214|}{1.43} = 0.299 \text{ s}$$

$$\text{PERIODO DI PRIMA OSCILLAZIONE } T = \frac{1.22}{B'} = \frac{1.22}{1.12} = 1.089 \text{ s}$$

$$\text{SOVRAELONGAZIONE MASSIMA } s = 0.42 \cdot \log_e \left( \frac{M_r \cdot B_3}{B_6} \right) + 0.18 = 0.42 \cdot \log_e \left( \frac{1.64 \cdot 1.30}{1.43} \right) + 0.18 = 0.348$$

$$\text{TEMPO DI ASSESTAMENTO AL 5% } t_{a,5\%} = \frac{1}{B_6} \cdot \left( 2.16 \cdot \frac{M_r \cdot B_3}{B_6} - 0.4 \right) = \frac{1}{1.43} \cdot \left( 2.16 \cdot \frac{1.64 \cdot 1.30}{1.43} - 0.4 \right) = 1.972 \text{ s}$$



## SIMULAZIONE

Per finire, utilizzando lo strumento di simulazione SIMULINK<sup>®</sup> verifichiamo nel dominio del tempo la correttezza dell'analisi e della sintesi svolta nel dominio di Laplace e della frequenza.

Nelle pagine successive, nell'ordine, saranno presentati i modelli e i grafici relativi all'analisi della risposta indiciale, della risposta complessiva in presenza del riferimento dato e dell'ingresso non manipolabile, infine sarà rappresentato l'errore assoluto a regime.

