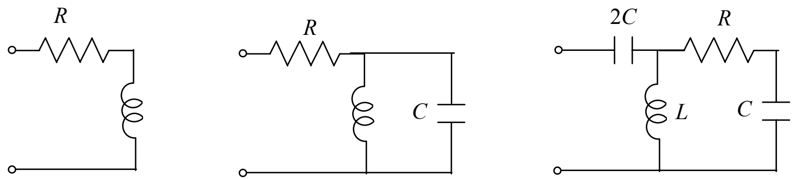
**ES. 1.1** **Esprimere la corrente $i(t)$ in termini di fasore nei seguenti tre casi:**

a) $i(t)=4\sin(\omega t-1.14)$ b) $i(t)=10\sin(\omega t-\pi)$ c) $i(t)=8\sin(\omega t+\pi/2)$

*Risultato: a)* $\bar{I}=4\exp(-j1.14)$; *b)* $\bar{I}=-10$; *c)* $\bar{I}=8j$.

**ES. 1.2** **Valutare (in forma cartesiana e polare) le impedenze viste ai capi dei morsetti:**




(a) $R=10\,\Omega$, $L=1\,mH$, $\omega=10^4\ rad/s$

(b) $R=8\,\Omega$, $L=15\,mH$, $C=0.4\,mF$, $f=50\,Hz$

(c) $R=200\,\Omega$, $L=16\,mH$, $C=10\,\mu F$, $\omega=2.5\cdot 10^3\ rad/s$

*Risultato:* *a)* $\dot{Z}=10+10j=10\sqrt{2}\exp(j\pi/4)\,\Omega$; *b)* $\dot{Z}=8+11.54j=14\exp(j0.965)\,\Omega$;
*c)* $\dot{Z}=8+20j=21.5\exp(j1.19)\,\Omega$;

**ES. 1.3** **Le seguenti coppie di fasori esprimono tensione e corrente relative ad un dato bipolo. Dire, nei tre casi, se si tratta di un resistore, un condensatore o un induttore e valutare il valore dei parametri corrispondenti *R*, *C* o *L***

a) $v(t)=15\cos(400t+1.2)$, $i(t)=3\sin(400t+1.2)$;
b) $v(t)=8\cos(900t-\pi/3)$, $i(t)=2\sin(900t+2\pi/3)$;
c) $v(t)=20\cos(250t+\pi/3)$, $i(t)=5\sin(250t+5\pi/6)$;

*a)* $\bar{V}=15e^{j1.2}$, $\bar{I}=3e^{j(1.2-\pi/2)}$. *Posto* $\bar{V}=\dot{Z}\bar{I}$ *si ha che:*

$$\arg(\dot{Z})=\arg(\bar{V})-\arg(\bar{I})=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \dot{Z}=j\omega L\ \Rightarrow\ L=\frac{|\bar{V}|}{|\bar{I}|\omega}=12.5\,mH.$$

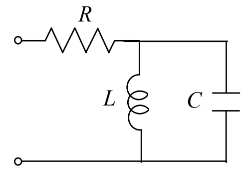
*b)* $\bar{V}=8e^{-j\pi/3}$, $\bar{I}=2e^{j(2\pi/3-\pi/2)}=2e^{-j\pi/6}$. *Posto* $\bar{V}=\dot{Z}\bar{I}$ *si ha che:*

$$\arg(\dot{Z})=\arg(\bar{V})-\arg(\bar{I})=-\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \dot{Z}=-\frac{j}{\omega C}\ \Rightarrow\ C=\frac{|\bar{I}|}{|\bar{V}|\omega}=0.28\,mF.$$

*c)* $\bar{V}=20e^{j\pi/3}$, $\bar{I}=5e^{j(5\pi/6-\pi/2)}=5e^{j\pi/3}$. *Posto* $\bar{V}=\dot{Z}\bar{I}$ *si ha che:*

$$\arg(\dot{Z})=\arg(\bar{V})-\arg(\bar{I})=0\ \Rightarrow\ \dot{Z}=R\ \Rightarrow\ R=\frac{|\bar{V}|}{|\bar{I}|}=4\,\Omega.$$

**ES. 1.4** - **Si consideri il circuito in figura, determinando *L* tale che la parte immaginaria dell'impedenza vista ai capi dei morsetti risulti $\mathrm{Im}\{\dot{Z}\}=100\,\Omega$.**




$C=10\,\mu F$
$f=1\,kHz$

*L'impedenza totale vista ai capi dei morsetti è*

$$\dot{Z}=R+\frac{(j\omega L)/(j\omega C)}{j(\omega L-1/\omega C)}=R+j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC},$$

*quindi basta imporre*

$$\mathrm{Im}\{\dot{Z}\}=\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}=100\ \Rightarrow\ L=2.19\,mH.$$

**ES. 1.5** **- A quale di queste impedenze corrisponde la fase $\varphi=-\pi/4$?**

| **1:** R-L serie | **2:** R-C serie | **3:** R-C parallelo | **4:** L-C serie |
|---|---|---|---|
| $R=10\,\Omega$ | $R=10\,\Omega$ | $R=0.5\,\Omega$ | $C=1\,F$ |
| $L=10\,mH$ | $C=10\,mF$ | $C=0.2\,F$ | $L=1\,H$ |
| $\omega=100\ rad/s$ | $\omega=100\ rad/s$ | $\omega=10\ rad/s$ | $\omega=1\ rad/s$ |

*Caso 3:*
$$\dot{Z}=\frac{1}{\dot{Y}}=\frac{1}{1/R+j\omega C}=\frac{1}{2+2j}=0.25(1-j)\ \Rightarrow\ \varphi=tg^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

**ES. 1.6** **- Dati i seguenti fasori $\bar{V}_1=10\exp(j\pi/6)$, $\bar{V}_2=10\exp(-j\pi/6)$, $\bar{V}_3=5\exp(-j\pi/3)$:**

**a) rappresentare nel piano complesso i fasori $\bar{V}_1,\bar{V}_2,\bar{V}_3$;**

**b) calcolare i fasori: $\bar{V}_1+\bar{V}_2,\bar{V}_1-\bar{V}_2,\bar{V}_1+\bar{V}_3,\bar{V}_1-\bar{V}_3$;**

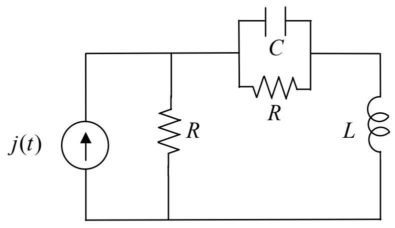
**c) rappresentare nel piano complesso i fasori valutati al punto b)**

**d) rappresentare nel tempo le tensioni corrispondenti ai fasori dei punti a) e b), definito la trasformazione fasoriale come segue:**

$$v(t)=V_M\sin(\omega t+\alpha)\leftrightarrow\bar{V}=V_M\exp(j\alpha)$$

## 2. Equivalenza, sovrapposizione degli effetti, potenza.

**ES. 2.1 - Con riferimento al seguente circuito, valutare l'impedenza $\dot{Z}_{eq}$ vista ai capi del generatore e la potenza complessa $\dot{S}$ erogata dal generatore.**




$j(t) = 10\sin(2t)\ A$
$R = 2\,\Omega$
$L = 1\,H$
$C = 0.25\,F$

*Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:*

$$\bar{J} = 10, \quad \dot{Z}_C = -j/(\omega C) = -2j, \quad \dot{Z}_L = j\omega L = 2j, \quad \dot{Z}_R = R = 2.$$

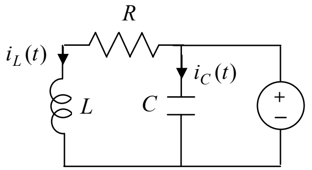
*L'impedenza di ingresso vista dal generatore è data da:*

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_R //[\dot{Z}_C // \dot{Z}_R + \dot{Z}_L] = 0.8 + j0.4\ \ \Omega.$$

*La potenza complessa erogata da j(t) si valuta facilmente una volta nota $\dot{Z}_{eq}$:*

$$\dot{A}_J \equiv \frac{1}{2}\bar{V}_J\breve{\bar{J}} = \frac{1}{2}\dot{Z}_{eq}\bar{J}\breve{\bar{J}} = \frac{1}{2}\dot{Z}_{eq}J^2 = \frac{(0.8+j0.4)100}{2} = 40 + j20.$$

**ES. 2.2 - Con riferimento al seguente circuito, valutare l'impedenza $\dot{Z}_{eq}$ vista ai capi del generatore e le correnti $i_L(t)$ e $i_C(t)$**



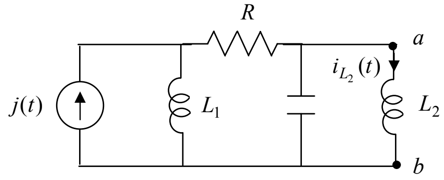

$e(t) = 10\cos(1000t)\ V$
$R = 10\,\Omega \quad L = 20\,mH$
$C = 0.1\,mF$

*Risultato:* $\dot{Z}_{eq} = 5 - j15\,\Omega$; $i_L(t) = 0.45\cos(1000t - 1.11)\ A$, $i_C(t) = -sin(1000t)\ A$.





**ES. 2.3 - Applicando il teorema di Thévenin, valutare la potenza complessa e la potenza istantanea assorbita dall'induttore $L_2$.**



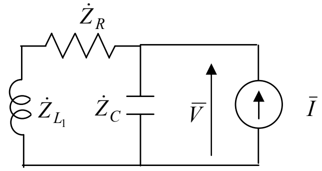

$j(t) = 10\sqrt{2}\sin(100t + 0.35)$ A
$R = 4\,\Omega, \quad C = 3\,\text{mF},$
$L_1 = 2\ \text{mH}, \ \ L_2 = 5\ \text{mH}$

*Trasformiamo preliminarmente la rete in una rete di impedenze:*

$$\bar{J} = 10e^{j0.35}, \quad Z_C = -3.33j, \quad \dot{Z}_{L1} = 0.2j, \quad \dot{Z}_R = 4, \quad \dot{Z}_{L2} = 0.5j$$

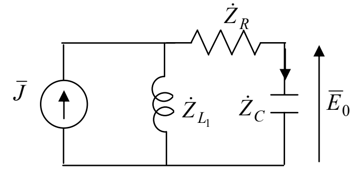
*L'impedenza equivalente nel circuito di Thévenin si valuta risolvendo la rete seguente:*

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_C //(\dot{Z}_{L_1} + \dot{Z}_R) = 1.721 - j1.985\,\Omega.$$




*La tensione a vuoto, invece, si può calcolare a partire dalla corrente che circola in $\dot{Z}_c$, a sua volta ottenuta con un partitore di corrente:*

$$\bar{E}_0 = \dot{Z}_C\bar{I}_C = \dot{Z}_C\bar{J}\frac{\dot{Z}_{L_1}}{\dot{Z}_{L_1} + \dot{Z}_C + \dot{Z}_R} = 0.693 + j1.114\ \ \Omega.$$




*Risolvendo la rete equivalente ottenuta, si ha che*

$$\bar{I}_{L_2} = \frac{\bar{E}_0}{\dot{Z}_{L_2} + \dot{Z}_{eq}} = -0.089 + j0.570 = 0.577e^{j1.726}\ A.$$

*L'andamento della corrente nel tempo è allora dato da:*

$$i_{L_2}(t) = 0.577\sqrt{2}\sin(100t + 1.726)\ \text{A}$$

*La potenza complessa assorbita da $L_2$ sarà puramente reattiva:*

$$\dot{A}_{L_2} = jX_{L_2}I^2_{L_2} = 0.167j\ \text{VAr}.$$

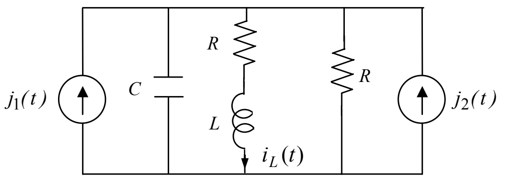
*La potenza istantanea si può valutare, in generale, dalla conoscenza di corrente e tensione:*

$$p_{L_2}(t) = v_{L_2}(t)i_{L_2}(t),$$

*ma in questo caso particolare (elemento dinamico) basta la sola conoscenza della $i_{L_2}(t)$:*

$$p_{L_2}(t) = v_{L_2}(t)i_{L_2}(t) = i_{L_2}(t)\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = \frac{L_2}{2}\frac{di^2_{L_2}(t)}{dt^2} = 0.167\sin(200t - 1.260)\text{W}.$$

**ES. 2.4 - Con riferimento al seguente circuito valutare la corrente $i_L(t)$.**




$j_1(t) = 10\cos(1000t)$,
$j_2(t) = 10\sin(1000t)$,
$R = 2\,\Omega$
$L = 2$ mH
$C = 1$ mF

*Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:*

$$\bar{J}_1 = j10\,A,\quad \bar{J}_2 = 10\,A,\quad \dot{Z}_C = -j\,\Omega,\quad \dot{Z}_{RL} = R + j\omega L = 2 + j2\,\Omega,\quad \dot{Z}_R = R = 2\,\Omega,.$$

*Questa rete può essere risolta con la sovrapposizione degli effetti. Il contributo del solo generatore $\bar{J}_1$ si ottiene dalla rete in cui $\bar{J}_2$ è stato sostituito con un circuito aperto:*

$$\bar{I}'_L = \bar{J}_1 \frac{\dot{Z}_{RC}}{\dot{Z}_{RC} + \dot{Z}_{RL}} = 3.33\text{ A},\quad \textit{avendo posto}\quad \dot{Z}_{RC} = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = 0.4\text{-}j0.8\,\Omega$$

*Il contributo del solo generatore $\bar{J}_2$ si ottiene dalla rete in cui $\bar{J}_1$ è stato sostituito con un circuito aperto:*

$$\bar{I}''_L = \bar{J}_2 \frac{\dot{Z}_{RC}}{\dot{Z}_{RC} + \dot{Z}_{RL}} = -j3.33\text{ A}.$$

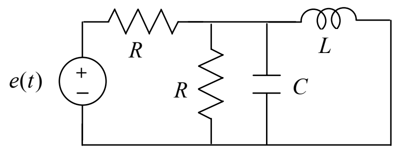
*Si ha, quindi*

$$\bar{I}_L = \bar{I}'_L + \bar{I}''_L = 3.33(1-j) = 4.71\exp(-0.78j)\text{ A}$$

*a cui corrisponde, nel tempo la corrente*

$$i_L(t) = 4.71\sin(1000t - 0.78)\quad\text{A}$$

**ES. 2.5 - Applicando il teorema di Norton, valutare la potenza complessa e la potenza istantanea assorbita dal parallelo *R-C* in figura.**



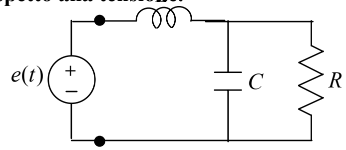

$e(t) = 5\sqrt{2}\sin(1000t + \pi/3)\,V$
$R = 0.21\,\Omega,\quad L = 1.12$ mH
$C = 1.23$ mF.

*Risultato:* $\dot{A} = 29.72\text{ W} - j7.68\text{ VAr};\ p(t) = 29.72 - 30.70\cos(2000t + 2.27)]\text{ W}$.





**ES. 2.6 - Con riferimento al seguente circuito valutare la reattanza da inserire in parallelo al generatore in modo che l'impedenza complessiva vista dal generatore stesso assorba la stessa potenza media di prima ma abbia una fase $\varphi$ tale che $\cos\varphi = 0.9$ (*rifasamento*) e la corrente assorbita sia in ritardo rispetto alla tensione.**




$e(t) = 100\sin(\omega t)\,V$
$\omega = 10^4$ rad/s, $\quad R = 50\,\Omega$
$C = 10\,\mu$F, $\quad L = 1.2$ mH

*Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:*

$$\bar{E} = 100\,V,\quad \dot{Z}_C = -10j\,\Omega,\ \dot{Z}_L = 12j\ \Omega, \dot{Z}_R = 50\ \Omega.$$

*L'impedenza equivalente vista dal generatore è*

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_L + \frac{\dot{Z}_C \dot{Z}_R}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_R} = 1.92 + j2.38\ \ \Omega,$$

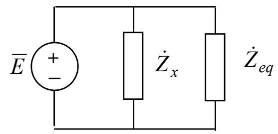
*quindi la potenza complessa erogata dallo stesso sarà*

$$\dot{A} = P + jQ = \frac{1}{2}\bar{E}\breve{I} = \frac{1}{2}\frac{\bar{E}\breve{E}}{\breve{Z}_{eq}} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\breve{Z}_{eq}} = 1.02\,kW + j1.27\,kVAr.$$

*Il fattore di potenza è pari a*

$$\cos\varphi = \cos[tg^{-1}(Q/P)] = 0.63$$

*quindi occorre inserire un'opportuna $\dot{Z}_x$ tra l'impedenza $\dot{Z}_{eq}$ ed il generatore in modo che l'impedenza complessiva $\dot{Z}_{TOT}$ verifichi tale richiesta. Affinché tale inserzione non alteri la tensione, $\dot{Z}_x$ deve essere posta in parallelo al generatore. Per lasciare invariata anche la potenza media l'impedenza deve essere puramente reattiva: $\dot{Z}_x = jX$. Per stabilire il valore di tale reattanza si può applicare il principio di conservazione delle potenze, che impone, dopo l'inserzione di $\dot{Z}_x$:*




$$P_{des} = P,\quad Q_{des} = Q + Q_x.$$

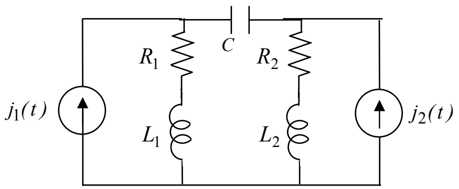
*La potenza reattiva $Q_x$ si può quindi valutare come segue:*

$$Q_{des} = P_{des} tg\varphi_{des} = Ptg[\cos^{-1}(0.9)]\quad\Rightarrow\quad Q_x = Ptg[\cos^{-1}(0.9)] - Q = -0.77\text{ kVAr}$$

*Imponendo la condizione desiderata su $\varphi$ si ottiene una $Q_x$ negativa, il che significa che $\dot{Z}_x$ è un'impedenza capacitiva. Ricordando l'espressione della potenza reattiva assorbita da un condensatore ai capi del quale sia nota la tensione si può valutare il valore di capacità necessario:*

$$Q_x = -\omega C\frac{E^2}{2}\quad\Rightarrow\quad C = -\frac{Q_x}{2\omega C E^2} = 3.87\,\mu F.$$

**ES. 2.7 - Con riferimento al seguente circuito, calcolare la potenza attiva $P_2$ e la potenza reattiva $Q_2$ assorbita dalla serie $R_2 - L_2$.**




$j_1(t) = 4\cos(4t)\ A$

$j_2(t) = 2\cos(4t - 2\pi/3)\ A$

$R_1 = R_2 = 2\,\Omega$

$L_1 = L_2 = 1\,H$

$C = 2\,F$

*Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:*

$$\bar{J}_1 = 4,\quad \bar{J}_2 = 2e^{-j2\pi/3},\ \dot{Z}_C = -j/8\,\Omega,\ \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = 2 + 4j\ \ \Omega.$$

*Applicando la sovrapposizione degli effetti, valutiamo il contributi dovuti a $\bar{J}_1$ ed a $\bar{J}_2$*

$$\bar{I}_2' = \bar{J}_1 \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1} = 2.03 + j0.01\ \ A,$$

$$\bar{I}_2'' = \bar{J}_2 \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_C}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1} = -0.50 - j0.85\ \ A.$$

*Pertanto si ha*

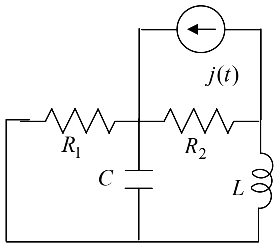
$$\bar{I}_2 = \bar{I}_2' + \bar{I}_2'' = 1.53 - j0.84 = 1.75\exp(-j0.502)\ \ A,$$

*quindi la potenza complessa assorbita da $\dot{Z}_2$ sarà*

$$\dot{A} = P_2 + jQ_2 = \frac{1}{2}\bar{V}_2\breve{\bar{I}}_2 = \frac{1}{2}\dot{Z}_2 I_2^2 = \frac{2+4j}{2}1.75^2 = 3.06\ \text{W} + j7.12\ \text{VAr}.$$

*Nota: si svolga l'esercizio utilizzando l'equivalente di Thévenin ai capi della serie considerata.*

**ES. 2.8 - Applicando il teorema di Thévenin, valutare la potenza complessa e la potenza istantanea assorbita dal condensatore $C$.**




$j(t) = 2\sqrt{2}\cos(20t + 0.23)\ A$

$R_1 = 12\,\Omega \quad R_2 = 2\,\Omega$

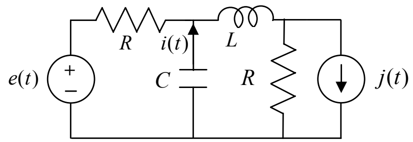
$L = 0.2\,H \quad C = 0.1\,F$

*Risultato:* $\dot{A} = -j0.49$ VAr; $p(t) = $ -0.49 $\cos(2000t - 3.12)]$ W.





**ES. 2.9 - Valutare la corrente che circola nel condensatore e la potenza complessa da esso assorbita.**



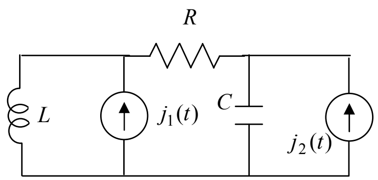

$j(t) = 2\sqrt{2}\sin(2\pi f t + 0.12)\ A,$

$e(t) = 10\sqrt{2}\cos(2\pi f t)\ V,\ f = 50\ Hz$

$R = 1\,\Omega,\ C = 1\ mF,\ L = 3\ mH$

*Risultato:* $i(t) = 3.15\sin(2\pi f t + 0.23)$ A; $\dot{A} = -j15.80$ VAr.

**ES. 2.10 - Valutare la potenza istantanea e complessa assorbita da *R*.**




$j_1(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi f t)\ A,$

$j_2(t) = 2\sqrt{2}\sin(2\pi f t + \pi/4)\ A,\ f = 50\ Hz$

$R = 1.3\,\Omega,\ C = 2.0\ mF,\ L = 1.1\ mH$

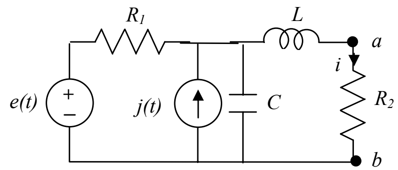
*Risultato:* $p(t) = 4.74[1 - \sin(4\pi f t + 6.10)$ W; $\dot{A} = 4.74$ W.

**ES. 2.11 - Con riferimento alla seguente rete in regime sinusoidale, valutare:**

**a) il circuito equivalente di Thévenin ai capi di $R_2$**

**b) la corrente circolante in $R_2$**

**c) la potenza istantanea e complessa assorbita da $R_2$.**




$e(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/3)\ V,$

$j(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)\ A,\ \ \omega = 10^3\ rad/s$

$R_1 = 1.2\,\Omega,\ R_2 = 3.3\,\Omega,$

$C = 4.1\ mF,\ L = 3.2\ mH$

***Risultato:***

a) $\dot{Z}_{eq} = 0.05 + j2.97\Omega;\ \bar{E}_0 = 2.09 - i0.76\ V$

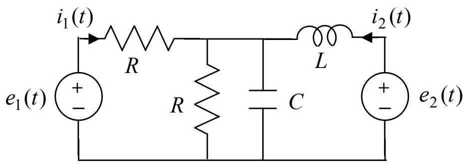
b) $i(t) = 0.71\sin(1000t - 1.08)\ A$

c) $\dot{A} = 0.82\ W;\quad p(t) = 0.82[1 - \sin(2000t - 2.15)]\ W$

## 3. Doppi-bipoli, generatori pilotati, regime periodico.

**ES. 3.1 - Con riferimento al seguente circuito, valutare:**

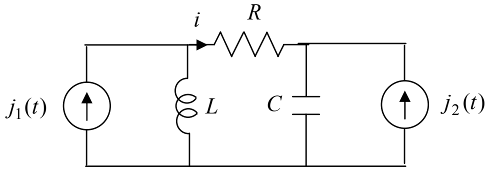
**a) la matrice delle ammettenze $\dot{Y}$ del doppio-bipolo visto ai capi dei generatori;**
**b) la potenza complessa $\dot{A}$ erogata dai generatori;**




$e_1(t) = 10\cos(1000t)\ V$
$e_2(t) = 20 sin(1000t)\ V$
$R = 1\,\Omega \quad L = 1\,mH \quad C = 1\,mF$

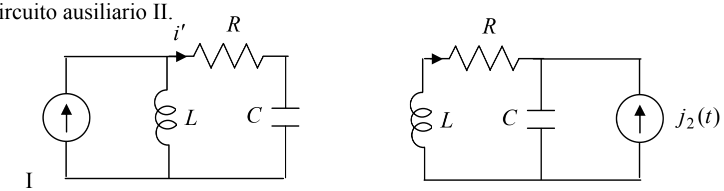
*Risultato:* a) $\dot{Y}_{11} = 0.5\,\Omega^{-1},\ \dot{Y}_m = 0.5j\,\Omega^{-1},\ \dot{Y}_{22} = 0.5 - j\,\Omega^{-1}$;
b) $\dot{A}_1^{er} = 75\,W,\ \dot{A}_2^{er} = 50\,W + j200\,VAr$.

**ES. 3.2 -Con riferimento al seguente circuito, valutare la potenza media *P* assorbita dal resistore *R* e verificare che è possibile sovrapporre le potenze medie.**




$j_1(t) = \cos(100t)\ A$
$j_2(t) = sin(200t)\ A$
$R = 1\,\Omega \quad L = 1\,mH$
$C = 0.1\,mF$

Poiché i generatori non sono isofrequenziali, cioè $\omega_1 \neq \omega_2$, il circuito non ammette un regime sinusoidale ma un regime periodico e quindi non è possibile trasformare la rete in una rete di impedenze. Tuttavia, essendo la rete lineare, si può applicare la sovrapposizione degli effetti e ricavare la corrente che circola in $R$ come $i = i' + i''$, dove $i'$ si ricava dal circuito ausiliario I e $i''$ dal circuito ausiliario II.




Ciascuna di queste due reti può essere rappresentata da una rete di impedenze:

rete I: $\bar{J}_1 = 1, \quad \dot{Z}'_C = -100j, \quad \dot{Z}'_L = 0.1j, \quad \dot{Z}'_R = 1.$
rete II: $\bar{J}_2 = 1, \quad \dot{Z}''_C = -50j, \quad \dot{Z}''_L = 0.2j, \quad \dot{Z}''_R = 1.$

Applicando i partitori di corrente:





$$\bar{I}' = \bar{J}_1 \frac{\dot{Z}'_L}{\dot{Z}'_L + \dot{Z}'_C + \dot{Z}'_R} = 10^{-3} e^{j3.13} \quad \Rightarrow \quad i'(t) = \cos(100t + 3.13)\ mA.$$

$$\bar{I}'' = -\bar{J}_2 \frac{\dot{Z}''_C}{\dot{Z}''_C + \dot{Z}''_L + \dot{Z}''_R} = e^{j3.12} \quad \Rightarrow \quad i''(t) = sin(200t + 3.12)\ A.$$

Quindi la corrente che circola in $R$ sarà

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = 10^{-3}\cos(100t + 3.13) + sin(200t + 3.12)\ A.$$

Nota la corrente si può calcolare la potenza istantanea assorbita da $R$ e quindi la potenza media:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt = \frac{R}{T}\int_0^T i'^2(t)dt + \frac{R}{T}\int_0^T i''^2(t)dt + \frac{2R}{T}\int_0^T i'(t)i''(t)dt \qquad T = \max\left(\frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}\right)$$

I primi due contributi rappresentano le potenze medie dissipate nei circuiti I e II, quindi sono:

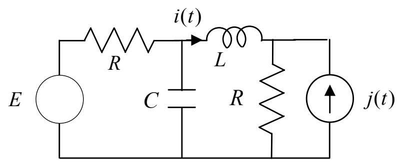
$$\frac{R}{T}\int_0^T i'^2(t)dt = \frac{R}{2}\left|\bar{I}'\right| = 0.5\cdot 10^{-6}\ W, \qquad \frac{R}{T}\int_0^T i''^2(t)dt = \frac{R}{2}\left|\bar{I}''\right| = 0.5\ W$$

L'ultimo contributo è nullo perché per $\omega_1 \neq \omega_2$ si ha:

$$\int_0^T \cos(\omega_1 t + \alpha) sin(\omega_2 t + \beta)dt = 0 \quad \forall \alpha, \beta$$

In definitiva se $\omega_1 \neq \omega_2$ è possibile sovrapporre le potenze medie: $P \approx 0.5\,W$.

**ES. 3.3 -Con riferimento al seguente circuito, valutare la corrente *i(t)*.**




$j(t) = J_m \cos\omega t$
$J_m = 1\,A, \quad \omega = 10^6\,rad/s$
$E = 1\,V$
$R = 1\Omega, \ L = 1mH, \ C = 1mF$

La corrente $i(t)$ si può calcolare con la sovrapposizione degli effetti nel dominio del tempo:

$$i(t) = i_1 + i_2(t).$$

Il contributo $i_1$ è dovuto al solo generatore di tensione e si ottiene tenendo conto che, in regime stazionario, l'induttore si riduce ad un corto-circuito ed il condensatore ad un circuito aperto: $i_1 = E/2R = 1/2\ A$.

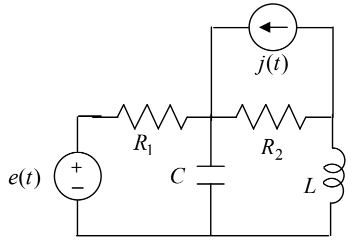
Il contributo $i_2(t)$ è dovuto al solo generatore *j(t)* e si ottiene risolvendo la rete in regime sinusoidale:

$$\bar{J} = 1, \ \dot{Z}_R = 1, \ \dot{Z}_C = -j10^{-3}, \ \dot{Z}_L = j10^3.$$

Posto $\dot{Z}_a = \dot{Z}_R // \dot{Z}_C + \dot{Z}_L$, la corrente $\bar{I}_2$ si ottiene con un semplice partitore di corrente:

$$\bar{I}_2 = -\bar{J}\frac{\dot{Z}_R}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_a} \approx -10^{-6} + j10^{-3} \approx j10^{-3} = 10^{-3}e^{j\pi/2} \quad \Rightarrow \quad i_2(t) = -10^{-3} sin(\omega t)\ A.$$

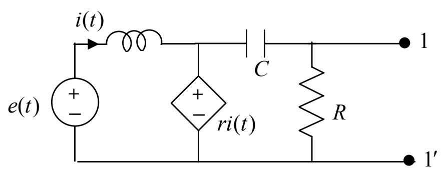
**ES. 3.4** **-Con riferimento al seguente circuito, valutare la potenza media *P* assorbita dal resistore $R_2$ e verificare che è possibile sovrapporre le potenze medie.**




$j(t) = 14\ A$
$e(t) = 110\cos(20t)\ V$
$R_1 = 12\ \Omega \quad R_2 = 2\ \Omega$
$L = 0.2\ H \quad C = 10\ mF$

*Risultato:* $P = 0.41\ kW$.

**ES. 3.5** **-Valutare l'equivalente di Thévenin ai capi dei morsetti 1-1'.**




$e(t) = 2\sin(\omega t + \pi/6)$ V
$R = 2\ \Omega \quad r = 3\ \Omega$
$X_L = 4\ \Omega \quad X_C = 1\ \Omega$

Passando alla rete di impedenze si avrà:

$$\bar{E} = 2e^{j\pi/6}, \quad \dot{Z}_C = -j, \quad \dot{Z}_L = 4j, \quad \dot{Z}_R = 2.$$

Per calcolare $\bar{V}_0$ basta applicare la LKT alla maglia di sinistra della rete

$$\bar{E} = \dot{Z}_L \bar{I} + r\bar{I} \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_L + r} = 0.368 - j0.157$$

Applicando un partitore di tensione si ha, quindi:

$$\bar{V}_0 = r\bar{I}\,\frac{\dot{Z}_R}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = 1.070 + j0.064 = 1.07e^{j0.06}\ V.$$

Per calcolare $\dot{Z}_{eq}$ occorre spegnere tutti (e soli) i generatori indipendenti, cioè $\bar{E}$. Applicando ancora la la LKT alla maglia di sinistra della rete:

$$0 = \dot{Z}_L \bar{I} + r\bar{I} \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = 0$$

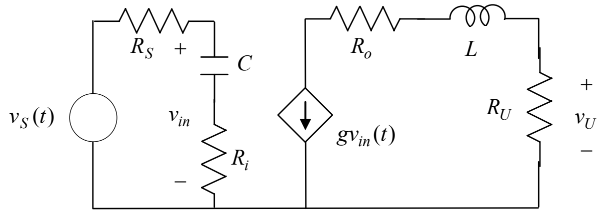
quindi nella rete per il calcolo di $\dot{Z}_{eq}$ risulta spento anche il generatore controllato, visto che la sua variabile di controllo è nulla, per cui in definitiva:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = 0.4(1 - 2j)\ \Omega$$





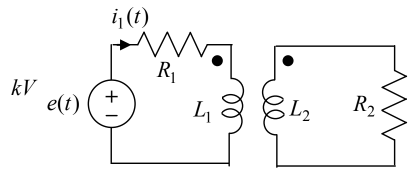
**ES. 3.6** **- Il circuito seguente riproduce lo schema equivalente di un amplificatore a transistor per alta frequenza. Determinare la tensione ai capi del resistore $R_U$.**




$v_S(t) = 10\cos(\omega t)\ V$
$\omega = 10^8\ rad/s$
$R_S = R_o = 1\ \Omega, \quad R_i = 5\ \Omega$
$L = 1\ pH \quad C = 1\ nF$
$g = 100\ \Omega^{-1}$

*Risultato:* $v_U(t) = 95.9\cos(\omega t + 3.06)$ .

**ES. 3.7** **- Con riferimento al seguente circuito valutare la corrente $i_1(t)$ nel circuito primario.**

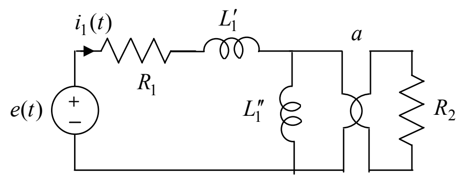



$e(t) = 10\sqrt{2}sin(1000t)\ V$
$R_1 = 1\ \Omega \quad R_2 = 200\ \Omega$
$L_1 = 3\ mH \quad L_2 = 200\ mH$
$|M| = 20\ mH$

Poiché $L_1 L_2 \neq M^2$ l' accoppiamento non è perfetto.
Posto $L_1 = L_1' + L_1''$, possiamo scegliere $L_1''$ in modo che l'aliquota $L_1''$ verifichi le condizioni di accoppiamento perfetto $L_1'' L_2 = M^2$:

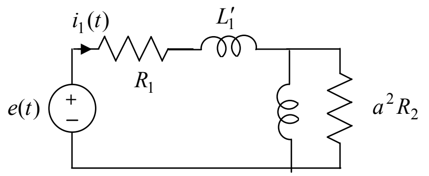
$$L_1'' L_2 = M^2 \quad \Rightarrow \quad L_1'' = M^2 / L_2 = 2\ mH.$$

A questo punto il circuito equivalente sarà il seguente




$$a = \frac{L_1''}{M} = 0.1$$

Per la formula del trasporto dell'impedenza in un trasformatore ideale, il circuito è anche equivalente al seguente:



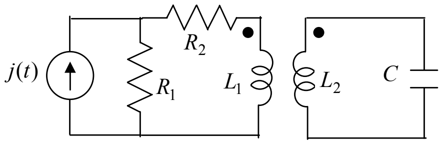

Trasformato il circuito in una rete di impedenze, nella quale si è introdotto il fasore $\overline{E} = 10\,V$, l'impedenza equivalente vista dal generatore è:

$$\dot{Z}_{eq} = R_1 + j\omega L_1' + \frac{a^2 R_2 j\omega L_1''}{a^2 R_2 + j\omega L''} = 2 + 2j\ \Omega$$

da cui

$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{E}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{5}{2}(1-j) = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4}\ A \quad \Rightarrow \quad i_1(t) = 5 sin(1000t - \pi/4)\ A\,.$$

**<u>ES. 3.8</u> Con riferimento al seguente circuito valutare la potenza complessa assorbita dal condensatore.**




$j(t) = 10\sqrt{2}\cos(100t)\ A$
$R_1 = R_2 = 5\ \Omega$
$L_1 = 1\,mH, \quad L_2 = 4\,mH$
$|M| = 2\,mH, \quad C = 12.5\,mF$

*Risultato:* $\dot{A} = -j5$ .

$VAr$