

Esercizi su integrali multipli

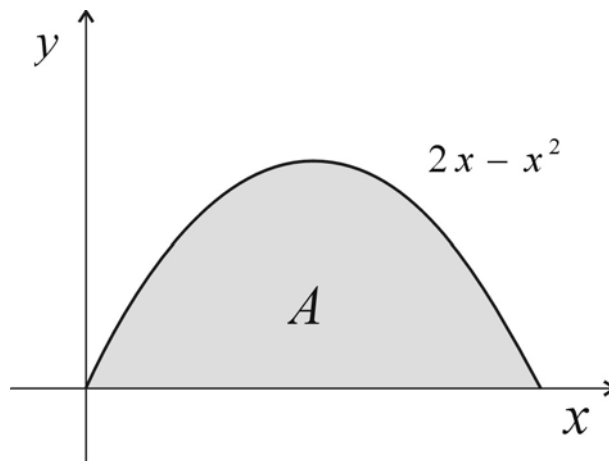
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$

Soluzione

Anche se non occorre per la risoluzione dell'esercizio, disegniamo il dominio A



Impostiamo l'integrale doppio

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2x-x^2} xy \, dy \right) dx$$

risolviamo l'integrale interno

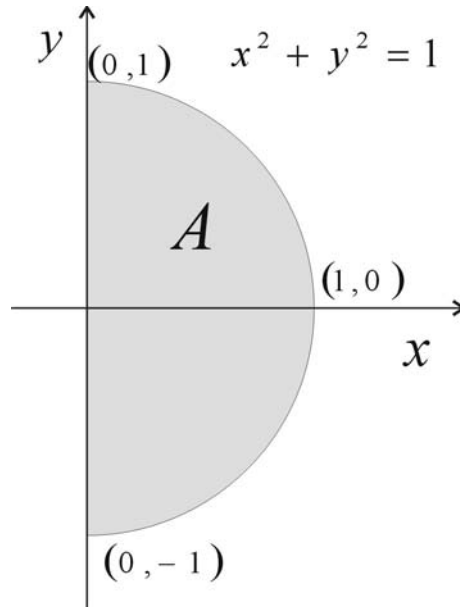
$$\begin{aligned} \int_0^{2x-x^2} xy \, dy &= x \int_0^{2x-x^2} y \, dy = x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2x-x^2} = x \left[\frac{(2x-x^2)^2}{2} - \frac{0}{2} \right] = \\ &= x \left[\frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{2} \right] = \frac{4x^3 - 4x^4 + x^5}{2} \end{aligned}$$

sostituiamo nell'integrale esterno e risolviamo l'integrale

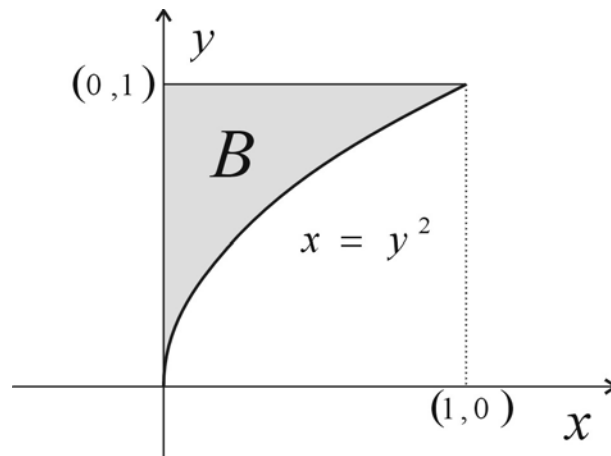
$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{4x^3 - 4x^4 + x^5}{2} \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 - 4x^4 + x^5) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{4x^4}{4} - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right]_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4(16)}{4} - \frac{4(32)}{5} + \frac{64}{6} - \left(\frac{4(0)}{4} - \frac{4(0)}{5} + \frac{(0)}{6} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{64}{4} - \frac{128}{5} + \frac{64}{6} \right] = \\ &= \frac{32}{4} - \frac{64}{5} + \frac{32}{6} = \frac{480 - 768 + 320}{60} = \frac{32}{60} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Si calcolino 1 seguenti integrali doppi con due metodi, considerando il dominio di integrazione prima normale rispetto all'asse x , poi normale rispetto all'asse y :

A. $\iint_A x \, dx \, dy$



B. $\iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} \, dx \, dy$



soluzione

Primo integrale con dominio normale rispetto a x

L'insieme A è formato da tutti e soli i punti che hanno l'ascissa compresa tra 0 e 1 . Per quanto riguarda l'ordinata, prendiamo l'equazione cartesiana in forma implicita della circonferenza e la cerchiamo.

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - x^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

il punto d'ordinata massima sarà $y = \sqrt{1 - x^2}$, mentre quello d'ordinata minima è $y = -\sqrt{1 - x^2}$ allora l'insieme può essere scritto con la seguente definizione

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

passiamo all'integrazione

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy = x \left[y \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = x \left[\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \right] = 2x\sqrt{1-x^2}$$

poi l'integrale esterno che ci da il risultato

$$2 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[-\frac{2}{3}(1-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(1-0)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3}$$

Primo integrale con dominio normale rispetto a y

L'insieme A , in questo caso, è formato da tutti e soli i punti che hanno l'ordinata compresa tra -1 e 1 , cerchiamo l'ascissa passando come in precedenza per l'equazione implicita della circonferenza.

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 = 1 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{1 - y^2}$$

questa volta scegliamo direttamente il segno positivo perché, come si vede in figura, non appartengono a A dei punti con ascissa negativa.

Definiamo l'insieme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \right\}$$

impostiamo l'integrale doppio

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy$$

risolviamo prima quello interno

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1-y^2}{2}$$

sostituiamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-y^2}{2} \right) dy &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 - y^2 \, dy = \frac{1}{2} \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Secondo integrale con dominio normale rispetto a x

Per quanto riguarda il dominio B , prima di tutto vediamo che fanno parte di quest'insieme tutti e soli i punti che hanno ascissa compresa tra 0 e 1 , mentre i punti hanno ordinata massima 1 e si trovano tutti al disopra di $y = \sqrt{x}$. Quindi possiamo definire

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1 \right\}$$

impostiamo al solito l'integrale

$$\iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} \, dy \right) dx$$

risolviamo per primo l'integrale interno

$$\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} dy = \frac{1}{(1+x)} \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{(1+y^2)} dy = \frac{1}{2(1+x)} \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{2y}{(1+y^2)} dy =$$

$$= \frac{1}{2(1+x)} [\ln(1+y^2)]_{\sqrt{x}}^1 = \frac{1}{2(1+x)} [\ln(1+1) - \ln(1+x)] = \frac{1}{2(1+x)} \ln\left(\frac{2}{1+x}\right)$$

andiamo a sostituire e risolviamo quello esterno

$$\int_0^1 \frac{1}{2(1+x)} \ln\left(\frac{2}{1+x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)} \ln\left(\frac{2}{1+x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(1+x) \ln\left(\frac{2}{1+x}\right) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) \left(\frac{1+x}{2}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{2}{1+x}\right) dx =$$

facciamo una piccola digressione

$$\left[\ln(1+x) \ln\left(\frac{2}{1+x}\right) \right]_0^1 = \left[\ln(1+1) \ln\left(\frac{2}{1+1}\right) - \ln(1+0) \ln\left(\frac{2}{1+0}\right) \right] =$$

$$= \left[\ln(2) \ln\left(\frac{2}{2}\right) - \ln(1) \ln\left(\frac{2}{1}\right) \right] = [\ln(2) \ln(1) - \ln(1) \ln(2)] = 0$$

anche per il fatto che $\ln(1) = 0$

allora tornando al nostro integrale

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) \left(\frac{1+x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) d(\ln(1+x)) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln(1+x))^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln(2))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2} \right] = \frac{(\ln(2))^2}{4}$$

Secondo integrale con dominio normale rispetto a y

Consideriamo ora il dominio B normale rispetto a y . Fanno parte dell'insieme tutti e soli i punti che hanno ordinata compresa tra 0 e 1, ascissa compresa tra 0 e y^2 , quindi il nostro insieme è

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2 \right\}$$

impostiamo il calcolo

$$\iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} dx \right) dy$$

al solito svolgiamo l'integrale interno

$$\int_0^{y^2} \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} dx = \frac{y}{(1+y^2)} \int_0^{y^2} \frac{1}{(1+x)} dx = \frac{y}{(1+y^2)} [\ln(1+x)]_0^{y^2}$$

$$= \frac{y}{(1+y^2)} [\ln(1+x)]_0^{y^2} = \frac{y}{(1+y^2)} [\ln(1+y^2) - \ln(1+0)] =$$

$$= \frac{y \ln(1+y^2)}{(1+y^2)}$$

e andiamo a sostituire per svolgere quello esterno

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} dx \right) dy = \int_0^1 \frac{y \ln(1+y^2)}{(1+y^2)} dy = \\ & = \int_0^1 \frac{y}{(1+y^2)} \cdot \ln(1+y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2y}{(1+y^2)} \cdot \ln(1+y^2) dy = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+y^2) \left(\frac{2y}{(1+y^2)} \cdot dy \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+y^2) d \ln(1+y^2) = \\ & = \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln(1+y^2))^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln(1+1))^2}{2} \right] = \frac{(\ln(2))^2}{4} \end{aligned}$$

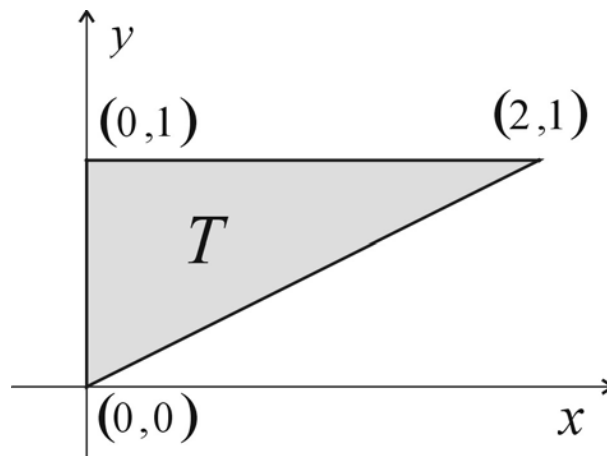
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \exp[y^2] dx dy$$

dove T è il triangolo chiuso del piano xy di vertici nei punti di coordinate $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$.

Soluzione

Disegniamo il triangolo nel piano cartesiano



Il triangolo dominio rappresentato può essere considerato normale rispetto a entrambi gli assi coordinati, l'unico lato del triangolo che varia rispetto a entrambi gli assi coordinati è quello che congiunge il vertice $(0,0)$ col vertice $(2,1)$. Il lato in questione si trova sulla retta di equazione

$$x - 2y = 0$$

normale rispetto a x

definiamo l'insieme come normale rispetto a x , quindi esplicitiamo la retta rispetto a y :

$$y = \frac{x}{2}$$

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

appliciamo le formule di riduzione

$$\iint_T \exp[y^2] dx dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 \exp[y^2] dy \right) dx$$

calcoliamo l'integrale interno

$$\int_{\frac{x}{2}}^1 \exp[y^2] dy =$$

e in questo modo ci blocchiamo per mancanza di una funzione conosciuta che faccia da primitiva a quella integranda.

normale rispetto a y

prima di tutto esplicitiamo la retta in modo opposto

$$x = 2y$$

in questo modo l'insieme è

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y \right\}$$

impostiamo di nuovo il calcolo

$$\iint_T \exp[y^2] dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2y} \exp[y^2] dx \right) dy$$

calcoliamo l'integrale interno

$$\int_0^{2y} \exp[y^2] dx = \exp[y^2] \cdot [x]_0^{2y} = 2y \cdot \exp[y^2]$$

sostituiamo e andiamo a calcolare l'integrale esterno

$$\int_0^1 2y \cdot \exp[y^2] dy = \int_0^1 \exp[y^2] d(y^2) = [\exp[y^2]]_0^1 = [\exp[1] - \exp[0]] = e - 1$$

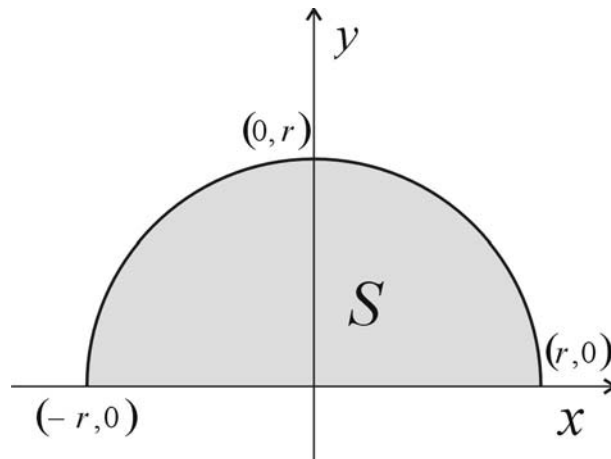
 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_S (x-y) dx dy$$

dove S è il semicerchio di centro l'origine, raggio r , contenuto nel semipiano delle y positive.

Soluzione

Disegniamo dapprima l'insieme



Primo metodo

Consideriamo l'insieme normale rispetto all'asse x .

I punti che fanno parte dell'insieme sono tutti e soli quelli che hanno le ascisse comprese tra $-r$ e r . Mentre ci ricaviamo l'ordinata dall'equazione implicita della circonferenza.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

è il luogo dei punti che hanno distanza dall'origine uguale a r , esplicitando rispetto a y troviamo

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

ovviamente prendiamo in considerazione solo la funzione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

possiamo definire l'insieme

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \right\}$$

impostiamo il calcolo

$$\iint_S (x-y) dx dy = \int_{-r}^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (x-y) dy \right) dx$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (x-y) dy &= \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x dy - \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y dy = x \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 dy - \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y dy = x[y]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} = \\ &= x[\sqrt{r^2-x^2}] - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} = x\sqrt{r^2-x^2} - \frac{r^2-x^2}{2} = x\sqrt{r^2-x^2} - \frac{r^2}{2} + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

sostituiamo e risolviamo l'integrale esterno

$$\int_{-r}^r \left(x\sqrt{r^2-x^2} - r^2 + x^2 \right) dx = \int_{-r}^r x\sqrt{r^2-x^2} dx - \int_{-r}^r \frac{r^2}{2} dx + \int_{-r}^r \frac{x^2}{2} dx$$

risolvendo singolarmente i tre integrali

$$\int_{-r}^r x\sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[\frac{-(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{-r}^r = \left[\frac{-(r^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{-(r^2 - (-r)^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] = 0$$

$$\int_{-r}^r \frac{r^2}{2} dx = \frac{r^2}{2} \int_{-r}^r 1 dx = \frac{r^2}{2} [x]_{-r}^r = \frac{r^2}{2} [r - (-r)] = r^3$$

$$\int_{-r}^r \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-r}^r = \left[\frac{r^3}{6} + \frac{r^3}{6} \right] = \frac{2}{6} r^3$$

rimettendo insieme

$$-r^3 + \frac{2}{6} r^3 = -\frac{4}{6} r^3 = -\frac{2}{3} r^3$$

secondo metodo

proviamo a cambiare l'insieme in coordinate polari.

L'insieme è formato da tutti i punti che hanno distanza dal centro compresa tra 0 e r, l'angolo polare è compreso tra 0 e π.

Definiamo un'applicazione $\Phi : S^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^2$, dove S^* è il semicerchio in coordinate polari., che a ogni coppia (ρ, ϑ) associa un punto (x, y) del semicerchio in coordinate cartesiane

$$\Phi(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\rho, \vartheta) \\ \Phi_2(\rho, \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\vartheta) \\ \rho \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

sappiamo che vale l'uguaglianza

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S^*} f(\Phi_1, \Phi_2) |J_\Phi| d\rho d\vartheta$$

quindi cerchiamo lo Jacobiano

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_1 & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_1 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_2 & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\rho \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \rho \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

ne cerchiamo il determinante

$$\begin{aligned} |J_\Phi| &= \cos(\vartheta) \cdot \rho \cos(\vartheta) - (-\rho \sin(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta)) = \rho \cos^2(\vartheta) + \rho \sin^2(\vartheta) = \\ &= \rho(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)) = \rho \end{aligned}$$

impostiamo il calcolo

$$\iint_S f(\Phi_1, \Phi_2) |J_\Phi| d\rho d\vartheta = \int_0^\pi \left(\int_0^r \rho \cos(\theta) - \rho \sin(\theta) \cdot \rho d\rho \right) d\vartheta$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\begin{aligned} \int_0^r (\rho \cos(\theta) - \rho \sin(\theta)) \cdot \rho d\rho &= (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \int_0^r \rho^2 d\rho = (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^r = \\ &= (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \frac{r^3}{3} \end{aligned}$$

sostituiamo nell'integrale esterno e risolviamo

$$\int_0^\pi (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \frac{r^3}{3} d\vartheta = \frac{r^3}{3} \int_0^\pi (\cos(\theta) - \sin(\theta)) d\vartheta = \frac{r^3}{3} \left(\int_0^\pi \cos(\theta) d\vartheta - \int_0^\pi \sin(\theta) d\vartheta \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{r^3}{3} \left([\text{sen}(\vartheta)]_0^\pi - [-\cos(\vartheta)]_0^\pi \right) = \frac{r^3}{3} \left([\text{sen}(\pi) - \text{sen}(0)] - [-\cos(\pi) + \cos(0)] \right) = \\ &= \frac{r^3}{3} \left([0 - 0] - [-(-1) + 1] \right) = \frac{r^3}{3} (-[1 + 1]) = -\frac{2}{3} r^3 \end{aligned}$$

i conti tornano.

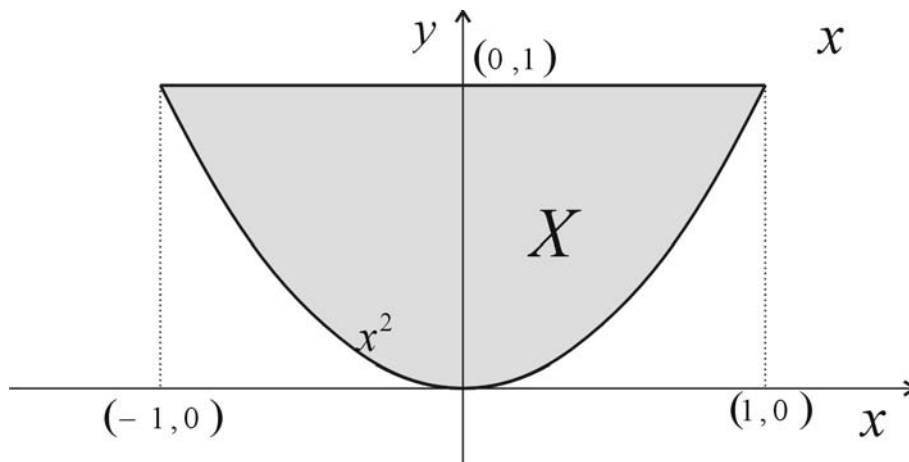
 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_X (a \cdot x^2 + b \cdot y) dx dy$$

ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $X = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}, x^2 \leq y \leq 1\}$

Soluzione

Disegniamo il dominio X



Impostiamo il calcolo piuttosto semplice

$$\iint_X (a \cdot x^2 + b \cdot y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 (a \cdot x^2 + b \cdot y) dy \right) dx$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^1 (a \cdot x^2 + b \cdot y) dy &= \int_{x^2}^1 a \cdot x^2 dy + \int_{x^2}^1 b \cdot y dy = a \cdot x^2 \int_{x^2}^1 dy + b \cdot \int_{x^2}^1 y dy = \\ &= a \cdot x^2 [y]_{x^2}^1 + b \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^1 = a \cdot x^2 [1 - x^2] + b \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} \right] = \\ &= a \cdot x^2 - a \cdot x^4 + \frac{b}{2} - \frac{b}{2} x^4 = \frac{b}{2} + a \cdot x^2 - \left(a + \frac{b}{2} \right) x^4 \end{aligned}$$

sostituiamo nell'integrale esterno e integriamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\frac{b}{2} + a \cdot x^2 - \left(a + \frac{b}{2} \right) x^4 \right) dx &= \int_{-1}^1 \frac{b}{2} dx + \int_{-1}^1 a \cdot x^2 dx - \int_{-1}^1 \left(a + \frac{b}{2} \right) x^4 dx = \\ &= \frac{b}{2} \int_{-1}^1 1 dx + a \cdot \int_{-1}^1 x^2 dx - \left(a + \frac{b}{2} \right) \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{b}{2} [x]_{-1}^1 + a \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 - \left(a + \frac{b}{2} \right) \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{b}{2} [1 - (-1)] + a \cdot \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] - \left(a + \frac{b}{2} \right) \left[\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) \right] = 2 \frac{b}{2} + \frac{2}{3} a - \frac{2}{5} \left(a + \frac{b}{2} \right) = \\ &= b + \frac{2}{3} a - \frac{2}{5} a - \frac{b}{5} = \frac{4}{15} a + \frac{4}{5} b \end{aligned}$$

Calcolare l'integrale doppio

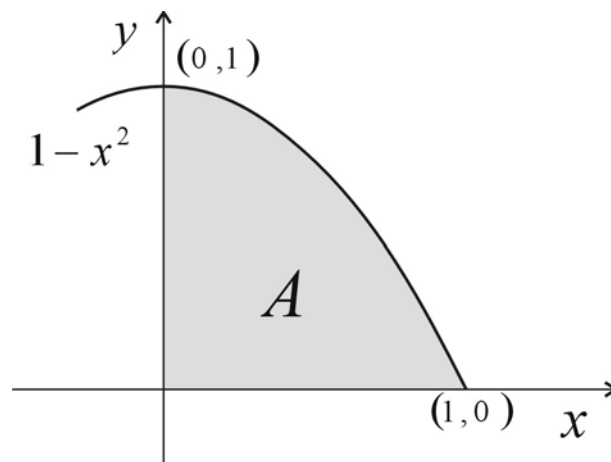
$$\iint_A x \cos(y) dx dy$$

ove

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

Soluzione

Disegniamo l'insieme che abbiamo definito



Il dominio può essere considerato normale rispetto a entrambi gli assi coordinati

Normale rispetto a x

Impostiamo il calcolo considerando il dominio normale rispetto all'asse delle ascisse

$$\iint_A x \cos(y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} x \cos(y) dy \right) dx$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\int_0^{1-x^2} x \cos(y) dy = x \int_0^{1-x^2} \cos(y) dy = x [\sin(y)]_0^{1-x^2} = x \sin(1-x^2)$$

sostituiamo il risultato e risolviamo l'integrale esterno

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(1-x^2) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x \cdot \sin(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sin(1-x^2) d(1-x^2) = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(1-x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} [\cos(1-1) - \cos(1-0)] = \frac{1}{2} - \frac{\cos(1)}{2} \end{aligned}$$

Normale rispetto a y

Invertiamo dapprima la parabola

$$y = 1 - x^2 \rightarrow y - 1 = -x^2 \rightarrow x^2 = 1 - y \rightarrow x = \pm \sqrt{1 - y}$$

ovviamente prendiamo in considerazione la funzione col segno positivo perché i punti che appartengono al nostro insieme hanno tutti ascissa positiva.

$$\iint_A x \cos(y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y}} x \cos(y) dx \right) dy$$

calcoliamo l'integrale interno

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1-y}} x \cos(y) dx &= \cos(y) \int_0^{\sqrt{1-y}} x dx = \cos(y) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-y}} = \cos(y) \left[\frac{1-y}{2} \right] = \\ &= \frac{\cos(y)}{2} - y \frac{\cos(y)}{2} \end{aligned}$$

andiamo a sostituire in quello esterno

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\cos(y)}{2} - y \frac{\cos(y)}{2} \right) dy &= \int_0^1 \frac{\cos(y)}{2} dy - \int_0^1 y \frac{\cos(y)}{2} dy = \\ &= \left[\frac{\sin(y)}{2} \right]_0^1 - \left[y \frac{\sin(y)}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(y)}{2} dy = \\ &= \left[\frac{\sin(y)}{2} \right]_0^1 - \left[y \frac{\sin(y)}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{\cos(y)}{2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{\sin(1)}{2} - \frac{\sin(1)}{2} - \frac{\cos(1)}{2} + \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(1)}{2} \end{aligned}$$

e i conti tornano.

Calcolare gli integrali doppi.

(a)

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

(b)

$$\iint_{A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}} xy \, dx \, dy$$

dove A è il dominio delimitato dall'asteroide di equazioni parametriche $x = r \cdot \cos^3(\vartheta)$, $y = r \cdot \sin^3(\vartheta)$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Soluzione

(a)

sappiamo, per le formule di Gauss-Green che

$$\iint_A \frac{f(x, y)}{x} \, dx \, dy = \int_{+\partial A} f(x, y) \, dy \quad \text{oppure} \quad \iint_A \frac{f(x, y)}{y} \, dx \, dy = - \int_{+\partial A} f(x, y) \, dx$$

prima di tutto dobbiamo trovare la funzione $f(x, y)$, quindi dobbiamo integrare xy rispetto a x , se decidiamo di utilizzare la prima di Gauss-Green, rispetto a y se decidiamo di utilizzare la seconda.

Integriamo rispetto a x

$$\int xy \, dx = \frac{yx^2}{2}$$

allora per la prima di Gauss-Green applicata al nostro caso abbiamo

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_{+\partial A} \frac{x^2 y}{2} \, dy$$

sostituiamo le equazioni parametriche della frontiera e svolgiamo l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{+\partial A} \frac{x^2 y}{2} \, dy &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^6(\vartheta) \cdot r \sin^3(\vartheta) \cdot d(r \sin^3(\vartheta)) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^6(\vartheta) \cdot r \sin^3(\vartheta) \cdot r \cdot 3 \sin^2(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot d\vartheta = \\ &= \frac{3r^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^7(\vartheta) \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \, d\vartheta = \\ &= \frac{3r^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^7(\vartheta) \cdot (1 - \cos^2(\vartheta)) \cdot (1 - \cos^2(\vartheta)) \cdot \sin(\vartheta) \, d\vartheta = \\ &= \frac{3r^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^7(\vartheta) \cdot (1 - \cos^2(\vartheta))^2 \cdot \sin(\vartheta) \, d\vartheta = \\ &= \frac{3r^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^7(\vartheta) \cdot (1 - 2\cos^2(\vartheta) + \cos^4(\vartheta)) \cdot \sin(\vartheta) \, d\vartheta = \\ &= \frac{3r^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^7(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \, d\vartheta - 3r^4 \int_0^{2\pi} \cos^9(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \, d\vartheta + \frac{3r^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^{11}(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \, d\vartheta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3r^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^7(\vartheta) d \cos(\vartheta) + 3r^4 \int_0^{2\pi} \cos^9(\vartheta) \cdot d \cos(\vartheta) - \frac{3r^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^{11}(\vartheta) d \cos(\vartheta) = \\
&= -\frac{3r^4}{2} \left[\frac{\cos^8(\vartheta)}{8} \right]_0^{2\pi} + 3r^4 \left[\frac{\cos^{10}(\vartheta)}{10} \right]_0^{2\pi} - \frac{3r^4}{2} \left[\frac{\cos^{12}(\vartheta)}{12} \right]_0^{2\pi} = \\
&= -\frac{3r^4}{2} [0] + 3r^4 [0] - \frac{3r^4}{2} [0] = 0
\end{aligned}$$

ora passiamo all'altro integrale

(b)

per ragioni evidenti l'unica cosa che cambia nel calcolo precedente sono gli estremi d'integrazione

$$\begin{aligned}
\iint_{A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}} xy \, dx \, dy &= \int_{+\partial A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}} \frac{x^2 y}{2} \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^6(\vartheta) \cdot r \operatorname{sen}^3(\vartheta) \cdot d(r \operatorname{sen}^3(\vartheta)) = \\
&= -\frac{3r^4}{2} \left[\frac{\cos^8(\vartheta)}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3r^4 \left[\frac{\cos^{10}(\vartheta)}{10} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3r^4}{2} \left[\frac{\cos^{12}(\vartheta)}{12} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= -\frac{3r^4}{2} \left[0 - \frac{1}{8} \right] + 3r^4 \left[0 - \frac{1}{10} \right] - \frac{3r^4}{2} \left[0 - \frac{1}{12} \right] = \\
&= \frac{3r^4}{16} - \frac{3r^4}{10} + \frac{3r^4}{24} = \frac{3r^4}{16} - \frac{3r^4}{10} + \frac{3r^4}{24} = \frac{45 - 72 + 30}{240} r^4 = \frac{1}{80} r^4
\end{aligned}$$

Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla retta di equazione $y = x$ e dalla curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t \\ t^4 + t \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$$

Soluzione

Controlliamo gli estremi della curva

$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = (0,0)$, cioè la curva ha inizio nell'origine degli assi e dato che

$\gamma(1) = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = (2,2)$, finisce nel punto $(2,2)$, questo vuol dire che la porzione di piano di cui

dobbiamo calcolare l'area è compresa tra la curva in questione e il segmento di retta

$$s(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0,2]$$

prima di calcolare l'area con le formule di Gauss-Green impostiamo il calcolo

$$t^2 + t = t^4 + t$$

per sapere se per qualche valore tra 0 e 1 la retta ha scissa e ordinata uguali e quindi interseca la bisettrice.

$$t^4 + t = t^2 + t \rightarrow t^4 - t^2 = 0 \rightarrow t^2(t^2 - 1) = 0$$

si vede facilmente che tra 0 e 1 la curva non passa più per la bisettrice. Possiamo impostare il calcolo su tutta la frontiera.

Ora vediamo se la curva si trova sopra o sotto la retta. Perché se si trova sotto, al crescere di t , la curva γ viene percorsa in senso antiorario (quindi positivo), se si trova sopra è il contrario.

Diamo un valore intermedio a t , $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$, mentre la bisettrice, per ovvi motivi,

per $x = \frac{3}{4}$ ha $y = \frac{3}{4}$, dato che $y_s > y_\gamma$, cioè per una stessa ascissa, l'ordinata della retta è maggiore di

quella della curva cioè la curva si trova completamente al di sotto della retta nell'intervallo studiato.

Allora possiamo impostare il calcolo

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_0^1 x_\gamma dy_\gamma - \int_0^2 x_s dy_s = \int_0^1 (t^2 + t) d(t^4 + t) - \int_0^2 t dt = \\ &= \int_0^1 (t^2 + t)(4t^3 + 1) dt - \int_0^2 t dt = \int_0^1 (4t^5 + 4t^4 + t^2 + t) dt - \int_0^2 t dt = \\ &= \left[\frac{4t^6}{6} \right]_0^1 + \left[\frac{4t^5}{5} \right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{4}{6} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{20 + 24 + 10 + 15}{30} - \frac{60}{30} = \\ &= \frac{69}{30} - \frac{60}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Segue il grafico

GRAFICO

