Esercizi su integrali multipli

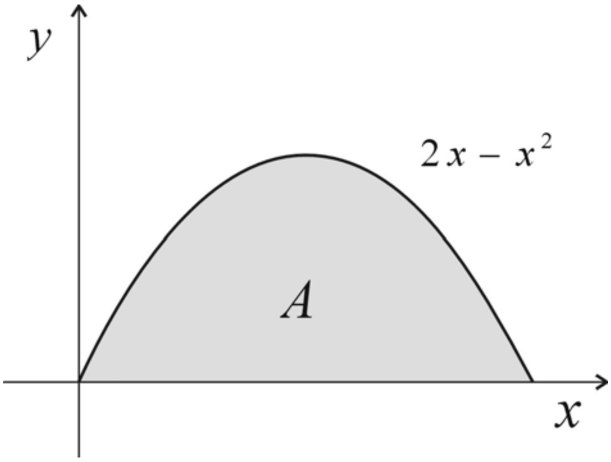
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

dove $A = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x - x^2\}$

Soluzione

Anche se non occorre per la risoluzione dell'esercizio, disegniamo il dominio A



Impostiamo l'integrale doppio

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2x-x^2} xy \, dy \right) dx$$

risolviamo l'integrale interno

$$\int_0^{2x-x^2} xy \, dy = x \int_0^{2x-x^2} y \, dy = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x-x^2} = x\left[\frac{(2x-x^2)^2}{2} - \frac{0}{2}\right] =$$

$$= x\left[\frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{2}\right] = \frac{4x^3 - 4x^4 + x^5}{2}$$

sostituiamo nell'integrale esterno e risolviamo l'integrale

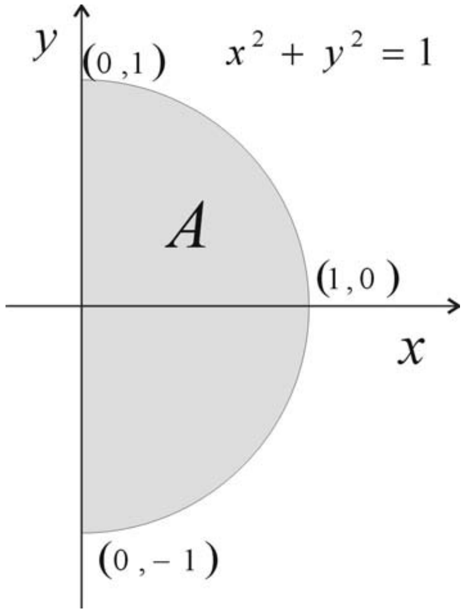
$$\int_0^2 \left(\frac{4x^3 - 4x^4 + x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(4x^3 - 4x^4 + x^5\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{4x^4}{4} - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4(16)}{4} - \frac{4(32)}{5} + \frac{64}{6} - \left(\frac{4(0)}{4} - \frac{4(0)}{5} + \frac{(0)}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{64}{4} - \frac{128}{5} + \frac{64}{6}\right] =$$

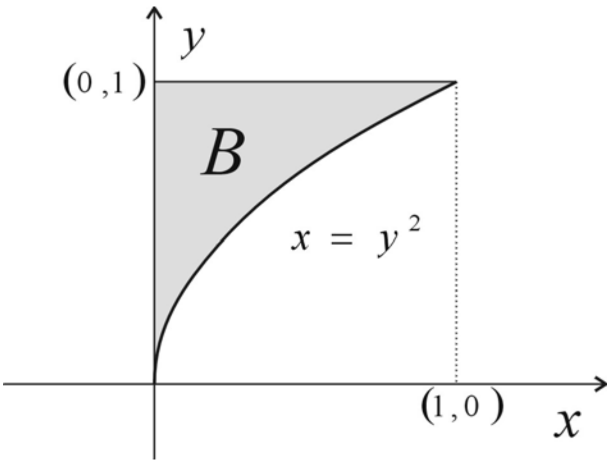
$$= \frac{32}{4} - \frac{64}{5} + \frac{32}{6} = \frac{480 - 768 + 320}{60} = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$$

Si calcolino 1 seguenti integrali doppi con due metodi, considerando il dominio di integrazione prima normale rispetto all'asse x, poi normale rispetto all'asse y:

A. $$\iint_A x\, dx\, dy$$



B. $$\iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\, dx\, dy$$



soluzione

Primo integrale con dominio normale rispetto a x

L'insieme A è formato da tutti e soli i punti che hanno l'ascissa compresa tra 0 e 1. Per quanto riguarda l'ordinata, prendiamo l'equazione cartesiana in forma implicita della circonferenza e la cerchiamo.

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 - x^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

il punto d'ordinata massima sarà $y = \sqrt{1 - x^2}$, mentre quello d'ordinata minima è $y = -\sqrt{1 - x^2}$ allora l'insieme può essere scritto con la seguente definizione

$$A=\left\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

passiamo all'integrazione

$$\iint_A x\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right)dx$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy = x[y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = x\left[\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\right]=2x\sqrt{1-x^2}$$

poi l'integrale esterno che ci da il risultato

$$2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[-\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left[-\frac{2}{3}(1-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(1-0)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}$$

Primo integrale con dominio normale rispetto a y

L'insieme A, in questo caso, è formato da tutti e soli i punti che hanno l'ordinata compresa tra -1 e 1, cerchiamo l'ascissa passando come in precedenza per l'equazione implicita della circonferenza.

$$x^2+y^2=1 \quad\rightarrow\quad x^2=1-y^2 \quad\rightarrow\quad x=\sqrt{1-y^2}$$

questa volta scegliamo direttamente il segno positivo perché, come si vede in figura, non appartengono a A dei punti con ascissa negativa.
Definiamo l'insieme

$$A=\left\{(x,y)\in R^2 : -1\le y\le 1, 0\le x\le \sqrt{1-y^2}\right\}$$

impostiamo l'integrale doppio

$$\iint_A x\,dx\,dy=\int_{-1}^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\right)dy$$

risolviamo prima quello interno

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1-y^2}{2}$$

sostituiamo

$$\int_{-1}^1\left(\frac{1-y^2}{2}\right)dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 1-y^2\,dy=\frac{1}{2}\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[2-\frac{2}{3}\right]=$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Secondo integrale con dominio normale rispetto a x

Per quanto riguarda il dominio B, prima di tutto vediamo che fanno parte d quest'insieme tutti e soli i punti che hanno ascissa compresa tra 0 e 1, mentre i punti hanno ordinata massima 1 e si trovano tutti al disopra di $y=\sqrt{x}$. Quindi possiamo definire

$$B=\left\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1, \sqrt{x}\le y\le 1\right\}$$

impostiamo al solito l'integrale

$$\iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dy\right)dx$$

risolviamo per primo l'integrale interno

$$\int_{\sqrt{x}}^{1} \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dy = \frac{1}{(1+x)}\int_{\sqrt{x}}^{1} \frac{y}{(1+y^2)}\,dy = \frac{1}{2(1+x)}\int_{\sqrt{x}}^{1} \frac{2y}{(1+y^2)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2(1+x)}\left[\ln(1+y^2)\right]_{\sqrt{x}}^{1} = \frac{1}{2(1+x)}\left[\ln(1+1)-\ln(1+x)\right] = \frac{1}{2(1+x)}\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)$$

andiamo a sostituire e risolviamo quello esterno

$$\int_0^1 \frac{1}{2(1+x)}\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+x)}\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\left(\frac{1+x}{2}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{2}{1+x}\right)dx =$$

facciamo una piccola digressione

$$\left[\ln(1+x)\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)\right]_0^1 = \left[\ln(1+1)\ln\left(\frac{2}{1+1}\right) - \ln(1+0)\ln\left(\frac{2}{1+0}\right)\right] =$$

$$= \left[\ln(2)\ln\left(\frac{2}{2}\right) - \ln(1)\ln\left(\frac{2}{1}\right)\right] = \left[\ln(2)\ln(1) - \ln(1)\ln(2)\right] = 0$$

anche per il fatto che $\ln(1) = 0$

allora tornando al nostro integrale

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\left(\frac{1+x}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\,d(\ln(1+x)) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\ln(1+x))^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\ln(2))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2}\right] = \frac{(\ln(2))^2}{4}$$

Secondo integrale con dominio normale rispetto a y

Consideriamo ora il dominio B normale rispetto a y. Fanno parte dell'insieme tutti e soli i punti che hanno ordinata compresa tra 0 e 1, ascissa compresa tra 0 e y^2, quindi il nostro insieme è

$$B = \left\{(x,y)\in R^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y^2\right\}$$

impostiamo il calcolo

$$\iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{y^2} \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dx\right)dy$$

al solito svolgiamo l'integrale interno

$$\int_0^{y^2} \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dx = \frac{y}{(1+y^2)}\int_0^{y^2} \frac{1}{(1+x)}\,dx = \frac{y}{(1+y^2)}\left[\ln(1+x)\right]_0^{y^2}$$

$$= \frac{y}{(1+y^2)}\left[\ln(1+x)\right]_0^{y^2} = \frac{y}{(1+y^2)}\left[\ln(1+y^2) - \ln(1+0)\right] =$$

$$= \frac{y\ln(1+y^2)}{(1+y^2)}$$

e andiamo a sostituire per svolgere quello esterno

$$\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\, dx \right) dy = \int_0^1 \frac{y \ln(1+y^2)}{(1+y^2)}\, dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{(1+y^2)} \cdot \ln(1+y^2)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2y}{(1+y^2)} \cdot \ln(1+y^2)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+y^2) \left(\frac{2y}{(1+y^2)} \cdot dy \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+y^2)\, d \ln(1+y^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln(1+y^2))^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln(1+1))^2}{2} \right] = \frac{(\ln(2))^2}{4}$$

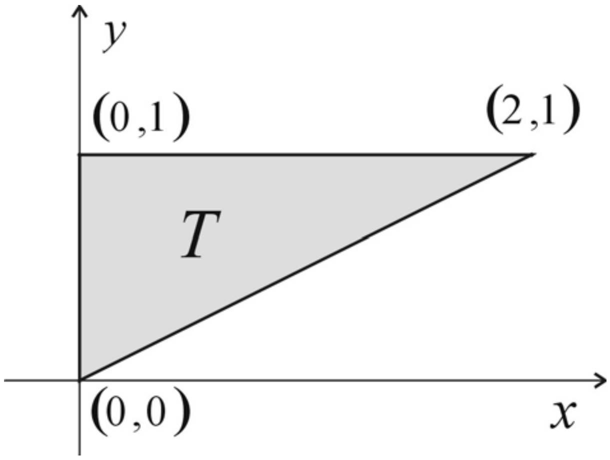
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \exp\left[y^2\right] dx\, dy$$

dove T è il triangolo chiuso del piano xy di vertici nei punti di coordinate $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$.

Soluzione

Disegniamo il triangolo nel piano cartesiano



Il triangolo dominio rappresentato può essere considerato normale rispetto a entrambi gli assi coordinati, l'unico lato del triangolo che varia rispetto a entrambi gli assi coordinati è quello che congiunge il vertice $(0,0)$ col vertice $(2,1)$. Il lato in questione si trova sulla retta di equazione

$$x - 2y = 0$$

normale rispetto a x

definiamo l'insieme come normale rispetto a x, quindi esplicitiamo la retta rispetto a y:

$$y = \frac{x}{2}$$

$$T = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 2, \frac{x}{2} \le y \le 1\right\}$$

applichiamo le formule di riduzione

$$\iint_T \exp\left[y^2\right] dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{1} \exp\left[y^2\right] dy \right) dx$$

calcoliamo l'integrale interno

$$\int_{\frac{x}{2}}^{1} \exp\left[y^2\right] dy =$$

e in questo modo ci blocchiamo per mancanza di una funzione conosciuta che faccia da primitiva a quella integranda.

normale rispetto a y

prima di tutto esplicitiamo la retta in modo opposto

$$x = 2y$$

in questo modo l'insieme è

$$T = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 2y\right\}$$

impostiamo di nuovo il calcolo

$$\iint_T \exp\left[y^2\right] dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2y} \exp\left[y^2\right] dx \right) dy$$

calcoliamo l'integrale interno

$$\int_0^{2y} \exp\left[y^2\right] dx = \exp\left[y^2\right] \cdot [x]_0^{2y} = 2y \cdot \exp\left[y^2\right]$$

sostituiamo e andiamo a calcolare l'integrale esterno

$$\int_0^1 2y \cdot \exp\left[y^2\right] dy = \int_0^1 \exp\left[y^2\right] d\left(y^2\right) = \left[\exp\left[y^2\right]\right]_0^1 = \left[\exp[1] - \exp[0]\right] = e - 1$$

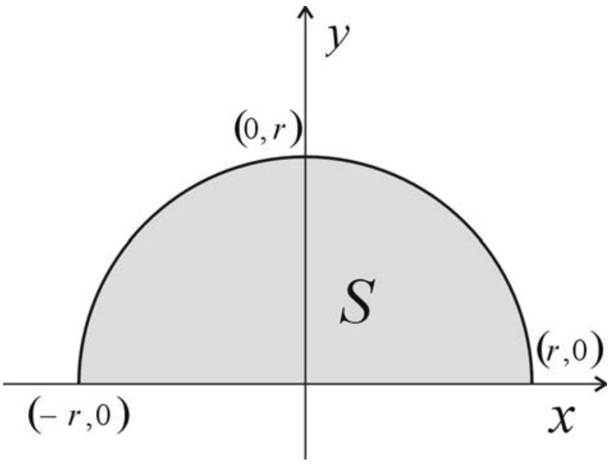
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_S (x-y)\,dx\,dy$$

dove S è il semicerchio di centro l'origine, raggio r, contenuto nel semipiano delle y positive.

Soluzione

Disegniamo dapprima l'insieme



Primo metodo

Consideriamo l'insieme normale rispetto all'asse x.

I punti che fanno parte dell'insieme sono tutti e soli quelli che hanno le ascisse comprese tra $-r$ e r. Mentre ci ricaviamo l'ordinata dall'equazione implicita della circonferenza.

$$\sqrt{x^2+y^2}=r$$

è il luogo dei punti che hanno distanza dall'origine uguale a r, esplicitando rispetto a y troviamo

$$x^2+y^2=r^2 \quad \to \quad y^2=r^2-x^2 \quad \to \quad y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

ovviamente prendiamo in considerazione solo la funzione $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

possiamo definire l'insieme

$$S=\left\{(x,y)\in R^2:-r\le x\le r,\,0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\right\}$$

impostiamo il calcolo

$$\iint_S (x-y)\,dx\,dy=\int_{-r}^{r}\left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}(x-y)\,dy\right)dx$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}(x-y)\,dy=\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}x\,dy-\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}y\,dy=x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}1\,dy-\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}y\,dy=x[y]_0^{\sqrt{r^2-x^2}}-\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}}=$$

$$x[y]_0^{\sqrt{r^2-x^2}}-\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}}=x\sqrt{r^2-x^2}-\frac{r^2-x^2}{2}=x\sqrt{r^2-x^2}-\frac{r^2}{2}+\frac{x^2}{2}$$

sostituiamo e risolviamo l'integrale esterno

$$\int_{-r}^{r}\left(x\sqrt{r^2-x^2}-r^2+x^2\right)dx=\int_{-r}^{r}x\sqrt{r^2-x^2}\,dx-\int_{-r}^{r}\frac{r^2}{2}\,dx+\int_{-r}^{r}\frac{x^2}{2}\,dx$$

risolvendo singolarmente i tre integrali

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\ dx = \left[\frac{-\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{-r}^{r} = \left[\frac{-\left(r^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{-\left(r^2 - (-r)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = 0$$

$$\int_{-r}^{r} \frac{r^2}{2}\,dx = \frac{r^2}{2}\int_{-r}^{r} 1\,dx = \frac{r^2}{2}[x]_{-r}^{r} = \frac{r^2}{2}[r - (-r)] = r^3$$

$$\int_{-r}^{r} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-r}^{r} = \left[\frac{r^3}{6} + \frac{r^3}{6}\right] = \frac{2}{6}r^3$$

rimettendo insieme

$$-r^3 + \frac{2}{6}r^3 = -\frac{4}{6}r^3 = -\frac{2}{3}r^3$$

secondo metodo

proviamo a cambiare l'insieme in coordinate polari.
L'insieme è formato da tutti i punti che hanno distanza dal centro compresa tra 0 e r, l'angolo polare è compreso tra 0 e π.
Definiamo un'applicazione $\Phi : S^* \subset R^2 \to S \subset R^2$, dove S^* è il semicerchio in coordinate polari., che a ogni coppia (ρ, ϑ) associa un punto (x, y) del semicerchio in coordinate cartesiane

$$\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\rho,\vartheta) \\ \Phi_2(\rho,\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\vartheta) \\ \rho\,\mathrm{sen}(\vartheta) \end{pmatrix}$$

sappiamo che vale l'uguaglianza

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{S^*} f(\Phi_1,\Phi_2)\,|J_\Phi|\,d\rho\,d\vartheta$$

quindi cerchiamo lo Jacobiano

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\Phi_1 & \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Phi_1 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\Phi_2 & \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\rho\,\mathrm{sen}(\vartheta) \\ \mathrm{sen}(\vartheta) & \rho\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

ne cerchiamo il determinante

$$|J_\Phi| = \cos(\vartheta)\cdot\rho\cos(\vartheta) - (-\rho\,\mathrm{sen}(\vartheta)\cdot\mathrm{sen}(\vartheta)) = \rho\cos^2(\vartheta) + \rho\,\mathrm{sen}^2(\vartheta) =$$
$$= \rho\left(\cos^2(\vartheta) + \mathrm{sen}^2(\vartheta)\right) = \rho$$

impostiamo il calcolo

$$\iint_{S^*} f(\Phi_1,\Phi_2)\,|J_\Phi|\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^\pi \left(\int_0^r \rho\cos(\theta) - \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\cdot\rho\,d\rho\right) d\vartheta$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\int_0^r (\rho\cos(\theta) - \rho\,\mathrm{sen}(\theta))\cdot\rho\,d\rho = (\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta))\int_0^r \rho^2\,d\rho = (\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta))\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r =$$
$$= (\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta))\frac{r^3}{3}$$

sostituiamo nell'integrale esterno e risolviamo

$$\int_0^\pi (\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta))\frac{r^3}{3}\,d\vartheta = \frac{r^3}{3}\int_0^\pi (\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta))\,d\vartheta = \frac{r^3}{3}\left(\int_0^\pi \cos(\theta)\,d\vartheta - \int_0^\pi \mathrm{sen}(\theta)\,d\vartheta\right) =$$

$$= \frac{r^3}{3}\left([\operatorname{sen}(\vartheta)]_0^\pi - [-\cos(\vartheta)]_0^\pi\right) = \frac{r^3}{3}\left([\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0)] - [-\cos(\pi) + \cos(0)]\right) =$$

$$= \frac{r^3}{3}\left([0-0] - [-(-1)+1]\right) = \frac{r^3}{3}\left(-[1+1]\right) = -\frac{2}{3}r^3$$

i conti tornano.

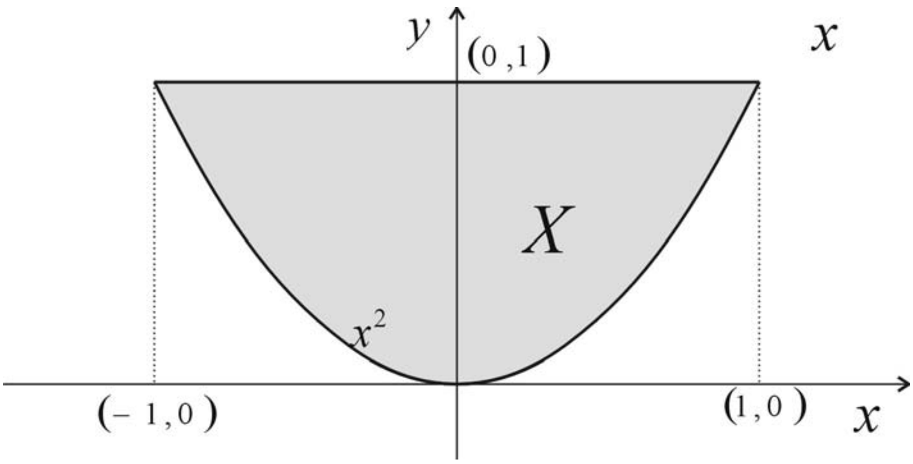
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_X \left(a \cdot x^2 + b \cdot y\right) dx\, dy$$

ove $a\,,\ b \in R$ e $X = \left\{(x,y) \in [-1,1] \times R,\ x^2 \le y \le 1\right\}$

Soluzione

Disegniamo il dominio X



Impostiamo il calcolo piuttosto semplice

$$\iint_X \left(a \cdot x^2 + b \cdot y\right) dx\, dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}\left(a \cdot x^2 + b \cdot y\right) dy\right) dx$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\int_{x^2}^{1}\left(a \cdot x^2 + b \cdot y\right) dy = \int_{x^2}^{1} a \cdot x^2\, dy + \int_{x^2}^{1} b \cdot y\, dy = a \cdot x^2 \int_{x^2}^{1} dy + b \cdot \int_{x^2}^{1} y\, dy =$$

$$= a \cdot x^2 [y]_{x^2}^{1} + b \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1} = a \cdot x^2\left[1 - x^2\right] + b \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2}\right] =$$

$$= a \cdot x^2 - a \cdot x^4 + \frac{b}{2} - \frac{b}{2}x^4 = \frac{b}{2} + a \cdot x^2 - \left(a + \frac{b}{2}\right)x^4$$

sostituiamo nell'integrale esterno e integriamo

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{b}{2} + a \cdot x^2 - \left(a + \frac{b}{2}\right)x^4\right) dx = \int_{-1}^{1}\frac{b}{2}\, dx + \int_{-1}^{1} a \cdot x^2\, dx - \int_{-1}^{1}\left(a + \frac{b}{2}\right)x^4\, dx =$$

$$= \frac{b}{2}\int_{-1}^{1} 1\, dx + a \cdot \int_{-1}^{1} x^2\, dx - \left(a + \frac{b}{2}\right)\int_{-1}^{1} x^4\, dx = \frac{b}{2}[x]_{-1}^{1} + a \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \left(a + \frac{b}{2}\right)\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{b}{2}[1 - (-1)] + a \cdot \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] - \left(a + \frac{b}{2}\right)\left[\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right] = 2\frac{b}{2} + \frac{2}{3}a - \frac{2}{5}\left(a + \frac{b}{2}\right) =$$

$$= b + \frac{2}{3}a - \frac{2}{5}a - \frac{b}{5} = \frac{4}{15}a + \frac{4}{5}b$$

Calcolare l'integrale doppio

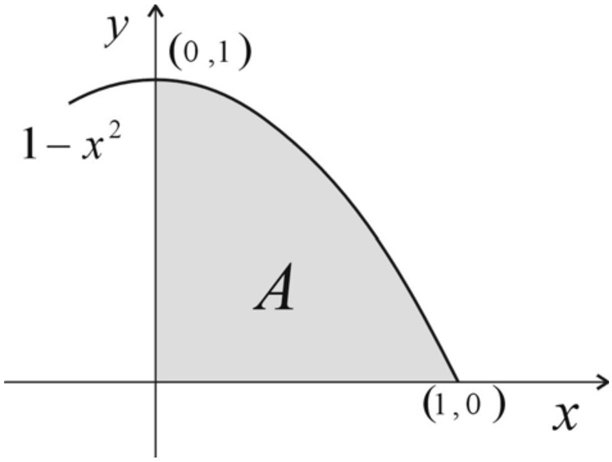
$$\iint_A x\cos(y)\,dx\,dy$$

ove

$$A=\{(x,y)\in[0,1]\times R: 0\le y\le 1-x^2\}$$

Soluzione

Disegniamo l'insieme che abbiamo definito



Il dominio può essere considerato normale rispetto a entrambi gli assi coordinati

Normale rispetto a x

Impostiamo il calcolo considerando il dominio normale rispetto all'asse delle ascisse

$$\iint_A x\cos(y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x^2}x\cos(y)\,dy\right)dx$$

svolgiamo l'integrale interno

$$\int_0^{1-x^2}x\cos(y)\,dy=x\int_0^{1-x^2}\cos(y)\,dy=x[\operatorname{sen}(y)]_0^{1-x^2}=x\operatorname{sen}(1-x^2)$$

sostituiamo il risultato e risolviamo l'integrale esterno

$$\int_0^1 x\operatorname{sen}(1-x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1-2x\cdot\operatorname{sen}(1-x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\operatorname{sen}(1-x^2)\,d(1-x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(1-x^2)]_0^1=\frac{1}{2}[\cos(1-1)-\cos(1-0)]=\frac{1}{2}-\frac{\cos(1)}{2}$$

Normale rispetto a y

Invertiamo dapprima la parabola

$$y=1-x^2\quad\rightarrow\quad y-1=-x^2\quad\rightarrow\quad x^2=1-y\quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1-y}$$

ovviamente prendiamo in considerazione la funzione col segno positivo perché i punti che appartengono al nostro insieme hanno tutti ascissa positiva.

$$\iint_A x\cos(y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y}}x\cos(y)\,dx\right)dy$$

calcoliamo l'integrale interno

$$\int_0^{\sqrt{1-y}} x\cos(y)\,dx = \cos(y)\int_0^{\sqrt{1-y}} x\,dx = \cos(y)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y}} = \cos(y)\left[\frac{1-y}{2}\right] =$$

$$= \frac{\cos(y)}{2} - y\frac{\cos(y)}{2}$$

andiamo a sostituire in quello esterno

$$\int_0^1 \left(\frac{\cos(y)}{2} - y\frac{\cos(y)}{2}\right) dy = \int_0^1 \frac{\cos(y)}{2}\,dy - \int_0^1 y\frac{\cos(y)}{2}\,dy =$$

$$= \left[\frac{\operatorname{sen}(y)}{2}\right]_0^1 - \left[y\frac{\operatorname{sen}(y)}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(y)}{2}\,dy =$$

$$= \left[\frac{\operatorname{sen}(y)}{2}\right]_0^1 - \left[y\frac{\operatorname{sen}(y)}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{\cos(y)}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(1)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{2} - \frac{\cos(1)}{2} + \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(1)}{2}$$

e i conti tornano.

Calcolare gli integrali doppi.

(a)

$$\iint_A xy\,dx\,dy$$

(b)

$$\iint_{A\cap\{x\geq 0, y\geq 0\}} xy\,dx\,dy$$

dove A è il dominio delimitato dall'asteroide di equazioni parametriche $x = r\cdot\cos^3(\vartheta)$, $y = r\cdot\text{sen}^3(\vartheta)$, con $\vartheta\in[0,2\pi]$.

Soluzione

(a)

sappiamo, per le formule di Gauss-Green che

$$\iint_A \frac{f(x,y)}{x}\,dx\,dy = \int_{+\partial A} f(x,y)\,dy \quad \text{oppure} \quad \iint_A \frac{f(x,y)}{y}\,dx\,dy = -\int_{+\partial A} f(x,y)\,dx$$

prima di tutto dobbiamo trovare la funzione $f(x,y)$, quindi dobbiamo integrare xy rispetto a x, se decidiamo di utilizzare la prima di Gauss-Green, rispetto a y se decidiamo di utilizzare la seconda.
Integriamo rispetto a x

$$\int xy\,dx = \frac{yx^2}{2}$$

allora per la prima di Gauss-Green applicata al nostro caso abbiamo

$$\iint_A xy\,dx\,dy = \int_{+\partial A} \frac{x^2 y}{2}\,dy$$

sostituiamo le equazioni parametriche della frontiera e svolgiamo l'integrale

$$\int_{+\partial A} \frac{x^2 y}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\cos^6(\vartheta)\cdot r\,\text{sen}^3(\vartheta)\cdot d\left(r\,\text{sen}^3(\vartheta)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\cos^6(\vartheta)\cdot r\,\text{sen}^3(\vartheta)\cdot r\cdot 3\text{sen}^2(\vartheta)\cdot\cos(\vartheta)\cdot d\vartheta =$$

$$= \frac{3r^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^7(\vartheta)\cdot\text{sen}^2(\vartheta)\cdot\text{sen}^2(\vartheta)\cdot\text{sen}(\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \frac{3r^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^7(\vartheta)\cdot\left(1-\cos^2(\vartheta)\right)\cdot\left(1-\cos^2(\vartheta)\right)\cdot\text{sen}(\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \frac{3r^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^7(\vartheta)\cdot\left(1-\cos^2(\vartheta)\right)^2\cdot\text{sen}(\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \frac{3r^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^7(\vartheta)\cdot\left(1-2\cos^2(\vartheta)+\cos^4(\vartheta)\right)\cdot\text{sen}(\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \frac{3r^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^7(\vartheta)\cdot\text{sen}(\vartheta)\,d\vartheta - 3r^4\int_0^{2\pi}\cos^9(\vartheta)\cdot\text{sen}(\vartheta)\,d\vartheta + \frac{3r^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^{11}(\vartheta)\cdot\text{sen}(\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= -\frac{3r^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^7(\vartheta)d\cos(\vartheta)+3r^4\int_0^{2\pi}\cos^9(\vartheta)\cdot d\cos(\vartheta)-\frac{3r^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^{11}(\vartheta)d\cos(\vartheta)=$$

$$= -\frac{3r^4}{2}\left[\frac{\cos^8(\vartheta)}{8}\right]_0^{2\pi}+3r^4\left[\frac{\cos^{10}(\vartheta)}{10}\right]_0^{2\pi}-\frac{3r^4}{2}\left[\frac{\cos^{12}(\vartheta)}{12}\right]_0^{2\pi}=$$

$$= -\frac{3r^4}{2}[0]+3r^4[0]-\frac{3r^4}{2}[0]=0$$

ora passiamo all'altro integrale

(b)

per ragioni evidenti l'unica cosa che cambia nel calcolo precedente sono gli estremi d'integrazione

$$\iint_{A\cap\{x\geq 0, y\geq 0\}} xy\,dx\,dy = \int_{+\partial A\cap\{x\geq 0,y\geq 0\}}\frac{x^2y}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^6(\vartheta)\cdot r\,\mathrm{sen}^3(\vartheta)\cdot d\left(r\,\mathrm{sen}^3(\vartheta)\right)=$$

$$= -\frac{3r^4}{2}\left[\frac{\cos^8(\vartheta)}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+3r^4\left[\frac{\cos^{10}(\vartheta)}{10}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3r^4}{2}\left[\frac{\cos^{12}(\vartheta)}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$= -\frac{3r^4}{2}\left[0-\frac{1}{8}\right]+3r^4\left[0-\frac{1}{10}\right]-\frac{3r^4}{2}\left[0-\frac{1}{12}\right]=$$

$$= \frac{3r^4}{16}-\frac{3r^4}{10}+\frac{3r^4}{24}=\frac{3r^4}{16}-\frac{3r^4}{10}+\frac{3r^4}{24}=\frac{45-72+30}{240}r^4=\frac{1}{80}r^4$$

Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla retta di equazione $y = x$ e dalla curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t \\ t^4 + t \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$$

Soluzione

Controlliamo gli estremi della curva

$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = (0,0)$, cioè la curva ha inizio nell'origine degli assi e dato che $\gamma(1) = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = (2,2)$, finisce nel punto $(2,2)$, questo vuol dire che la porzione di piano di cui dobbiamo calcolare l'area è compresa tra la curva in questione e il segmento di retta

$$s(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0,2]$$

prima di calcolare l'area con le formule di Gauss-Green impostiamo il calcolo

$$t^2 + t = t^4 + t$$

per sapere se per qualche valore tra 0 e 1 la retta ha scissa e ordinata uguali e quindi interseca la bisettrice.

$$t^4 + t = t^2 + t \quad \to \quad t^4 - t^2 = 0 \quad \to \quad t^2(t^2 - 1) = 0$$

si vede facilmente che tra 0 e 1 la curva non passa più per la bisettrice. Possiamo impostare il calcolo su tutta la frontiera.

Ora vediamo se la curva si trova sopra o sotto la retta. Perché se si trova sotto, al crescere di t, la curva γ viene percorsa in senso antiorario (quindi positivo), se si trova sopra è il contrario.

Diamo un valore intermedio a t, $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$, mentre la bisettrice, per ovvi motivi, per $x = \frac{3}{4}$ ha $y = \frac{3}{4}$, dato che $y_s > y_\gamma$, cioè per una stessa ascissa, l'ordinata della retta è maggiore di quella della curva cioè la curva si trova completamente al di sotto della retta nell'intervallo studiato.

Allora possiamo impostare il calcolo

$$m(A) = \int_0^1 x_\gamma \, dy_\gamma - \int_0^2 x_s \, dy_s = \int_0^1 (t^2 + t) d(t^4 + t) - \int_0^2 t \, dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2 + t)(4t^3 + 1) dt - \int_0^2 t \, dt = \int_0^1 (4t^5 + 4t^4 + t^2 + t) dt - \int_0^2 t \, dt =$$

$$= \left[\frac{4t^6}{6}\right]_0^1 + \left[\frac{4t^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{20 + 24 + 10 + 15}{30} - \frac{60}{30} =$$

$$= \frac{69}{30} - \frac{60}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Segue il grafico

GRAFICO