

1 Limite di una funzione reale di variabile reale (versione 0.7)

1.1 Limite di una funzione razionale fratta

Assegnati $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di grado m e n rispettivamente:

$$p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (1)$$
$$q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n,$$

consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (2)$$

Se x_0 è un punto di accumulazione (al finito o all'infinito) per la funzione $f(x)$, è interessante determinare il comportamento della funzione in un intorno di x_0 . A tale scopo calcoliamo il limite:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad (3)$$

che può presentarsi nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (se $|x_0| < +\infty$), $\frac{\infty}{\infty}$ (se $|x_0| = +\infty$). Precisamente, se x_0 è uno zero di $p(x)$ e $q(x)$, allora la (3) dà luogo a $0/0$.

- Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Si decompongono $p(x)$ e $q(x)$ in modo da ridurre il loro rapporto ai minimi termini.

- Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

L'indeterminazione può essere rimossa mettendo in evidenza sia a numeratore che a denominatore, la potenza di x di esponente massimo.

Esempi (forma indeterminata $\frac{0}{0}$). Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 - 8}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

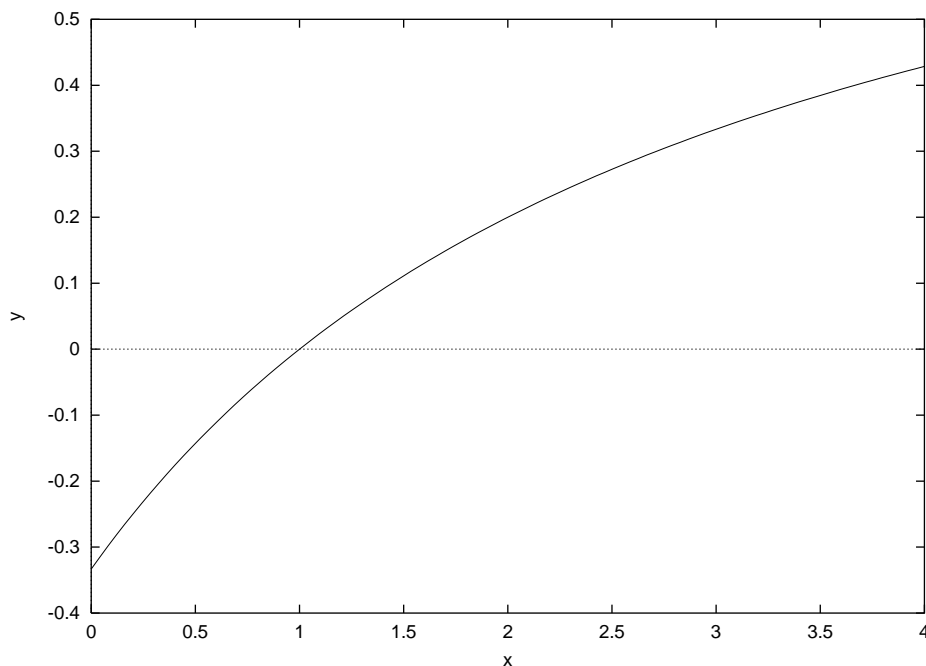


Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$.

Soluzioni.

N. 1

Sostituendo per continuità, si ottiene la forma indeterminata $0/0$. Decomponiamo numeratore e denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5} \quad (4)$$

Il comportamento è visibile in figura 1.

N. 2

Procedendo come sopra:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+1)(x+2)^2} = \pm\infty \quad (5)$$

Il segno del limite è:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} &= +\infty, \end{aligned}$$

come possiamo vedere dalla figura 2.

N. 3

Si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)^2}{x^2 - 2x + 4} = 0 \quad (6)$$

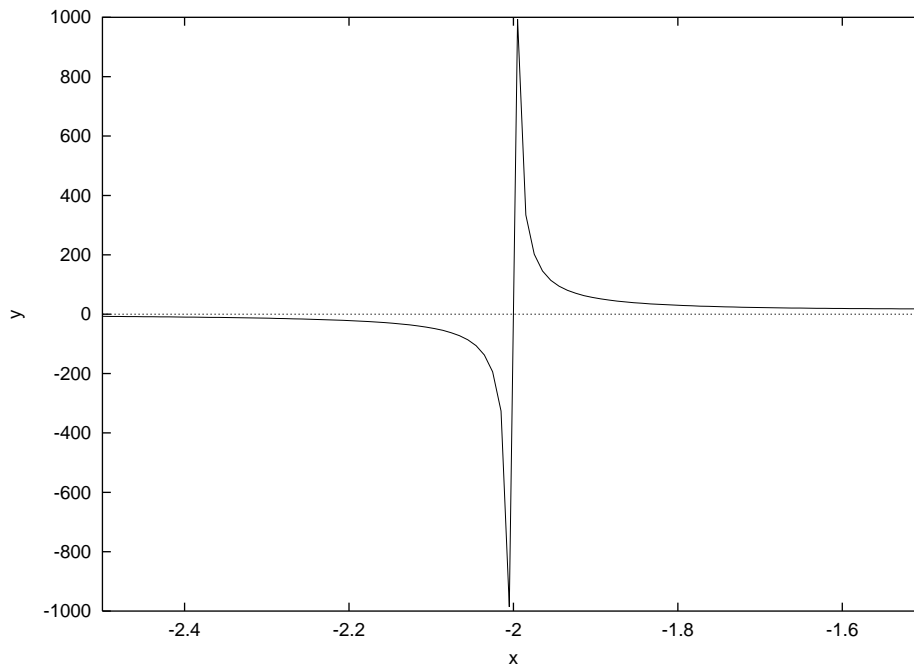


Figura 2: Grafico di $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$.

N. 4

Si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{3}{4} \quad (7)$$

Esempi (forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$)

Per ipotesi $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi di grado m e n rispettivamente (eq. 1). La forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ si presenta per $|x| \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} & \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(x^{m-n} \frac{\sum_{k=0}^m a_k x^{k-m}}{\sum_{k=0}^n b_k x^{k-n}} \right) \\ &= x^{m-n} \frac{a_m}{b_n}, \end{aligned}$$

cioè:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \pm\infty, \text{ se } m > n \quad (8)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0, \text{ se } m < n$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m}{b_n}, \text{ se } m = n$$

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 7x^4 + 1}{2x^5 + 7}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

Soluzioni

N.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3} \right) = 0 \quad (9)$$

In maniera simile, i rimanenti due:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 7x^4 + 1}{2x^5 + 7} = 2 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x - 1} = \pm\infty$$

1.1.1 Esercizi proposti (con soluzione)

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 10x + 4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$6. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+x-2}{4x^2+x-1}$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3}{x^2-1}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2+x+2}$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10000x}{x^2-10000}$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

1.1.2 Soluzioni

N. 1

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-3x-9}{3x^2-10x+4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{4}{1} = 4$$

N. 2

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+2} = -2$$

N. 3

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \infty$$

N. 4

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \frac{1}{2}$$

N. 5

Questo è il limite di una funzione della variabile reale a per valori assegnati di x .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x+ax+a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$$

N. 6

Come nel precedente, anche in questo caso la funzione è di h per assegnati x . Più precisamente è il limite del *rapporto incrementale* relativo alla funzione $f(x) = x^3$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{0}{0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx^2+3h^2x+h^3}{h} = 3x^2$$

N. 7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1 \end{aligned}$$

N. 8

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

N. 9

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+x-2}{4x^2+x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{4}$$

N. 10

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1+3x^{-3})}{1-x^{-2}} = \infty$$

N. 11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2+x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^{-1}}{x(1+x^{-1}+2x^{-2})} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

N. 12

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x^{-1}+x^{-2}}{1+x^{-2}} = 1$$

N. 13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10000x}{x^2-10000} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10000x^{-1}}{1-10000x^{-1}} = 0$$

N. 14

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1-5x^{-1}+x^{-2})}{3x^{-1}+7x^{-2}} = \infty$$

N. 15

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^{-1}+3x^{-2}}{x(1-8x^{-2}+5x^{-3})} = \frac{2}{\infty} = 0$$

N. 16

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} &= \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{72x^5+228x^4+86x^3-261x^2-108x-108}{x^5+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{72+228x^{-1}+86x^{-2}-261x^{-3}-108x^{-4}-108x^{-5}}{1+5x^{-5}} = 72 \end{aligned}$$

1.2 Limite di una funzione irrazionale

1.2.1 Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Il caso più comune è quello in cui si procede alla razionalizzazione del numeratore e/o del denominatore.

Esempi

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}}{x-a}, a > 0$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}+x^2(x-a)}{\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{x^2-a^2}}, a > 0$

Soluzioni

N. 1

Razionalizzando il numeratore:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

N. 2

Razionalizzando il numeratore:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Per rimuovere l'indeterminazione occorre razionalizzare il denominatore (termine $\sqrt{x-2}$):

$$\lambda = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} = 0$$

N. 3

Siamo tentati a razionalizzare. Tuttavia, osservando che $x+1-2\sqrt{x} = (\sqrt{x}-1)^2$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{4}$$

N. 4

Evidentemente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{3}$$

N. 5

Dobbiamo "eliminare" il termine che produce indeterminazione:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{(x-a)(x+a)} + x^2\sqrt{(x-a)^2}}{\sqrt{x(x-a)} + \sqrt{(x-a)(x+a)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a} + x^2\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a} + \sqrt{x+a}\sqrt{x+a}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

Esercizi proposti (con soluzione)

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

$$6. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

Soluzioni N. 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2} = \frac{0}{0} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

N. 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{0}{0} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

N. 3

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}} \cdot \frac{3+\sqrt{5x-1}}{3+\sqrt{5x-1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+x)(3+\sqrt{5x-1})}{5} = \frac{24}{5}$$

N. 4

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

N. 5

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 7} \left[\frac{2-\sqrt{x-3}}{(x-7)(x+7)} \cdot \frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}} \right] = -\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}$$

N. 6

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2} = 12$$

N. 7

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \frac{0}{0} = -\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} = -\frac{1}{3}$$

1.2.2 Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Si procede in maniera analoga a quello delle funzioni razionali fratte.

Esempi

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt{x^4+x-2}}$$

Soluzioni

N. 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} = 1$$

N. 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3-\frac{2}{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})} = +\infty$$

N. 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2+1} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+x^{-2}}}{x^{1/3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{2/3}\sqrt{1+x^{-2}}) = +\infty$$

N. 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt{x^4+x-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-5x^{-1}+\sqrt{1-3x^{-3}+x^{-4}}}{x^{-1}-x^{-2}+\sqrt{1+x^{-3}-2x^{-4}}} = 3$$

Esercizi proposti (con soluzione).

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - \sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{x - 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[8]{x^8 + 1} + \sqrt[4]{x^4 - 1}}{\sqrt[5]{1 + x^5} + \sqrt[3]{1 + x^3}}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 + x - 2}$

Soluzioni N. 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - \sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = 5$$

N. 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{2x^{-1}} - 1)}{x(1 - 2x^{-1})} = 0^+$$

N. 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[8]{x^8 + 1} + \sqrt[4]{x^4 - 1}}{\sqrt[5]{1 + x^5} + \sqrt[3]{1 + x^3}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[8]{1 + x^{-8}} + \sqrt[4]{1 - x^{-4}}}{\sqrt[5]{x^{-5} + 1} + \sqrt[3]{x^{-3} + 1}} = 1$$

N. 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 + x - 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - x^{-1}}}{x(1 + x^{-1} - 2x^{-2})} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

1.2.3 Forma indeterminata $\infty - \infty$

Al primo step si riconduce tale forma alla $\frac{\infty}{\infty}$. Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \sqrt[N]{p(x)} \pm \sqrt[N]{q(x)}, \quad (11)$$

essendo $p(x)$ e $q(x)$ polinomi dati dalla (1). Senza perdita di generalità, supponiamo che i coefficienti di tali polinomi siano tali che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty - \infty \quad (12)$$

La forma indeterminata (12) si riconduce alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ razionalizzando in maniera opportuna la funzione $f(x)$. Più precisamente, il fattore razionalizzante è dato da:

$$r(x) = \sum_{k=1}^N (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}} \quad (13)$$

Si dimostra che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\left[\sqrt[N]{p(x)} \pm \sqrt[N]{q(x)} \right] \sum_{k=1}^N (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}}}{\sum_{k=1}^N (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}}} \right\} = \frac{\infty}{\infty}$$

Esempi

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x})$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[4]{x^4+1})$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x+12} - x)$

Soluzioni

N. 1

Qui è:

$$p(x) = x - 1, q(x) = 2x, N = 3, f(x) = \sqrt[N]{p(x)} - \sqrt[3]{q(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty - \infty$$

La funzione (13) è:

$$\begin{aligned} r(x) &= \sum_{k=1}^3 (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}} \\ &= \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{2x}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x}) \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{2x} \right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1-2x}{r(x)} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^{2/3} \sqrt[2]{1-2x^{-1}+x^{-2}} + x^{2/3} \sqrt[3]{2(1-x^{-1})} + \sqrt[3]{4}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/3}(1+x^{-1})}{\sqrt[2]{1-2x^{-1}+x^{-2}} + \sqrt[3]{2(1-x^{-1})} + \sqrt[3]{4}} = -(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

N. 2

Per ridurre la funzione $f(x)$ alla forma (11), scriviamo: $x = \sqrt[4]{x^4}$, donde:

$$f(x) = \sqrt[N]{p(x)} + \sqrt[N]{q(x)},$$

essendo:

$$p(x) = x^4, q(x) = x^4 + 1, N = 4$$

Evidentemente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty - \infty$$

Il fattore $r(x)$ è:

$$\begin{aligned}
r(x) &= \sum_{k=1}^4 \left[(x^4)^{4-k} (x^4 + 1)^{k-1} \right] \\
&= \sqrt[4]{x^{12}} + \sqrt[4]{x^8 (x^4 + 1)} + \sqrt[4]{x^4 (x^4 + 1)^2} + \sqrt[4]{(x^4 + 1)^3} \\
&= |x^3| + x^2 \sqrt[4]{x^4 + 1} + |x| \sqrt{x^4 + 1} + \sqrt[4]{(x^4 + 1)^3}
\end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}
f(x) r(x) &= x |x^3| + (x + |x^3|) \sqrt[4]{x^4 + 1} + (x^2 + x |x|) \sqrt{x^4 + 1} + (x + |x|) \sqrt[4]{(x^4 + 1)^3} \\
&\quad + x^4 + 1
\end{aligned}$$

Per $x \rightarrow -\infty$ è $\forall n \in \mathbb{N}, |x^{2n+1}| = -x$, per cui l'espressione precedente diviene:

$$f(x) r(x) = -x^4 + x^4 + 1 = 1,$$

quindi il limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) r(x)}{r(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

giacché $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

N. 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 12} - x) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 12} - \sqrt{x^2})$$

Il fattore razionalizzante è:

$$\begin{aligned}
r(x) &= \sum_{k=1}^2 \sqrt{(x^2 + 3x + 12)^{2-k} (x^2)^{k-1}} \\
&= \sqrt{x^2 + 3x + 12} + |x| \underset{x>0}{=} \sqrt{x^2 + 3x + 12} + x
\end{aligned}$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned}
f(x) r(x) &= 3x + 12 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) r(x)}{r(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 12x^{-1}}{\sqrt{1 + 3x^{-1} + 12x^{-2}} + 1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Esercizi proposti (con soluzione)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + 2x + 1} - x)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - x)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 2})$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[N]{ax^N + bx + c + 2x + \sqrt[N-1]{x^2 + 5}}}{2x + \sqrt[N-1]{x^2 + 5}}$ con N pari e > 2 ; $a > 0, b, c$ coefficienti reali e tali che la funzione sia definita per $x \rightarrow -\infty$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 2}}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 2}}$
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2 - 12x + 1} - \sqrt{3x^2 + x + 2})$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3})$

Soluzioni N. 1

$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + 2x + 1} - x) = \infty - \infty$; fattore razionalizzante: $r(x) = \sqrt{5x^2 + 2x + 1} + x$.
Quindi:

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 1}{\sqrt{5x^2 + 2x + 1} + x} = +\infty \quad (14)$$

N. 2

$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - x) = \infty - \infty$; fattore razionalizzante: $r(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x$.
Quindi:

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1} + x} = 1 \quad (15)$$

N. 3

$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 2}) = \infty - \infty$. Il fattore razionalizzante è: $r(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 2}$

$$l = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + 3x^{-1}}{\sqrt{1 - 4x^{-1} + 3x^{-2}} + \sqrt{1 - 2x^{-2}}} = -2 \quad (16)$$

N. 4

$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[N]{ax^N + bx + c + 2x + \sqrt[N-1]{x^2 + 5}}}{2x + \sqrt[N-1]{x^2 + 5}} = \frac{\infty - \infty}{\infty} = 1 + l'$, con $l' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[N]{ax^N + bx + c}}{2x + \sqrt[N-1]{x^2 + 5}}$.

Risulta:

$$\begin{aligned} l' &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt[N]{a + bx^{1-N} + cx^{-N}}}{x \left(2 + \sqrt[N-1]{x^{3-N} + 5x^{1-N}} \right)} \\ &= \frac{\sqrt[N]{a}}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} \\ &= -\frac{\sqrt[N]{a}}{2} \end{aligned}$$

Il limite è:

$$l = 1 - \frac{\sqrt[n]{a}}{2} \quad (17)$$

N. 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = (+\infty)(\infty - \infty) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2+x})$$

Fattore razionalizzante:

$$r(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2+x}$$

Il limite diventa:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2+x}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1+x^{-1}})} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

N. 6

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|\sqrt{4-x^{-2}}}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-2x^{-2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 - \sqrt{4-x^{-2}})}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-2x^{-2}}} = -\infty$$

N. 7

$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \frac{\infty - \infty}{\infty}$, è preferibile calcolare a parte il limite del numeratore:

$$\begin{aligned} l_1 &\stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2-1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2} - \sqrt{4x^2-1})(\sqrt{4x^2} + \sqrt{4x^2-1})}{\sqrt{4x^2} + \sqrt{4x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2} + \sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

Quindi:

$$l = \frac{0^+}{+\infty} = 0^+ \quad (19)$$

N. 8

$$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2 - 12x + 1} - \sqrt{3x^2 + x + 2}) = (-\infty)(\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 - 12x^3 + x^2} - \sqrt{3x^4 + x^3 + 2x^2}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^4 - 12x^3 + x^2} - \sqrt{3x^4 + x^3 + 2x^2})(\sqrt{x^4 - 12x^3 + x^2} + \sqrt{3x^4 + x^3 + 2x^2})}{\sqrt{x^4 - 12x^3 + x^2} + \sqrt{3x^4 + x^3 + 2x^2}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 13x^3 + x^2}{x^2(\sqrt{1-12x^{-1}+x^{-2}} + \sqrt{3+x^{-1}+2x^{-3}})} = +\infty$$

N. 9

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3}) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{1-x^3})$$

Fattore razionalizzante:

$$\begin{aligned}
 r(x) &= \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \sqrt[3]{(x^3)^{3-k} (1-x^3)^{k-1}} \\
 &= x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

La (20) implica:

$$f(x) = \frac{f(x)r(x)}{r(x)} = \frac{1}{r(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} = 0^+
 \tag{21}$$

1.3 Funzioni trigonometriche (parte prima)

Come nelle sezioni precedenti si calcola il limite per “continuità”, cioè sostituendo il valore di x_0 nell’espressione analitica della funzione. Il caso più semplice è quello in cui il limite è immediato.

1.3.1 Esempi

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x(1 - \cos x) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{\sin(2-x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left[6 \cos x - \ln \left(\cos x + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{4}} \right) \right] = 6 \cdot \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} \right) = 3 + \ln 2$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} e^{|\cos x|} |\cos x| = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} |\cos x| \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} |\cos x|$
 $= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (-\cos x) \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (-\cos x) = e^{0^+} \cdot 0^+ = 0^+$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{|\cos x|} |\cos x| = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$
6. $l = \lim_{x \rightarrow -2\pi^+} e^{\sin x} \sin |x| = \prod_{k=1}^2 l_k$
 $l_1 = \lim_{x \rightarrow -2\pi^+} e^{\sin x}; \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow -2\pi^+} \sin |x|;$
 $l_1 = \exp \left(\lim_{x \rightarrow -2\pi^+} \sin x \right) = e^{0^+} = 1^+$
 $l_2 = \lim_{x \rightarrow -2\pi^+} \sin |x| = 0^-$
 $l = 1^+ \cdot 0^- = 0^-.$

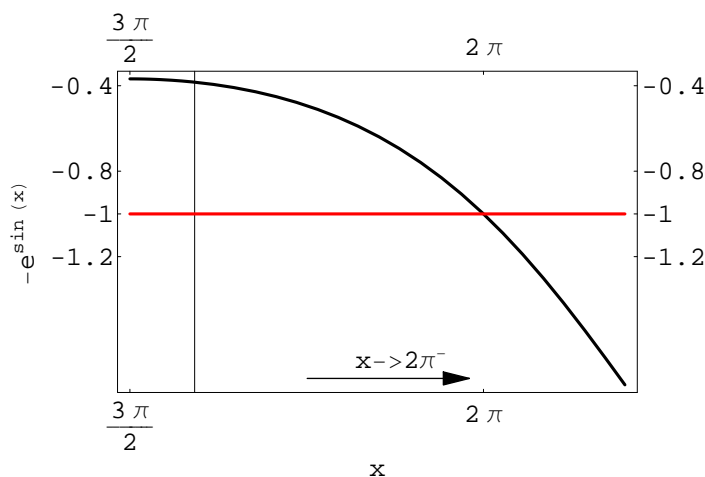


Figura 3: Grafico di $-e^{\sin x}$

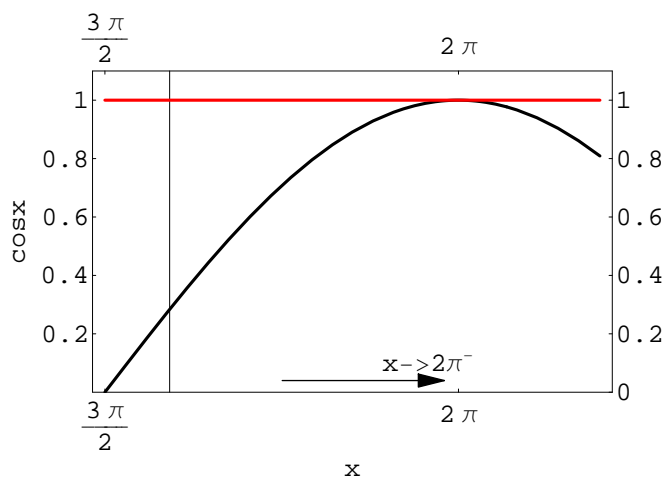


Figura 4: Grafico di $\cos x$

$$7. l = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} [-e^{\sin x} \cos x (\sin x + 1)] = \prod_{k=1}^3 l_k$$

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} (-e^{\sin x}) = -1^+; \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \cos x = 1^-; \quad l_3 = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} (\sin x + 1) = 1^-$$

Per determinare il segno dei singoli limiti è conveniente tracciare in un intorno di $x_0 = 2\pi$ il grafico delle funzioni con un software del tipo **Mathematica**, come riportato in figura 3 e seguenti.

Il limite è: $l = (-1^+) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1^+$ (fig. 6).

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$$

Questo limite non esiste, in quanto la funzione $\sin x$ è periodica in \mathbb{R} . Più in generale, se $f(x)$ è definita in $(-\infty, +\infty)$ ed è ivi periodica di periodo T , non esiste il limite di f per $x \rightarrow \pm\infty$. Per dimostrare l'asserto procediamo per assurdo; a tale scopo rammentiamo la definizione di limite (senza perdita di generalità consideriamo il caso

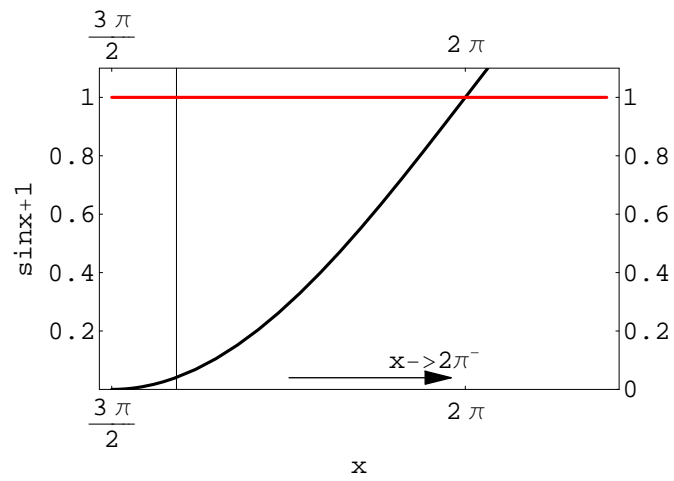


Figura 5: Grafico di $\sin x + 1$

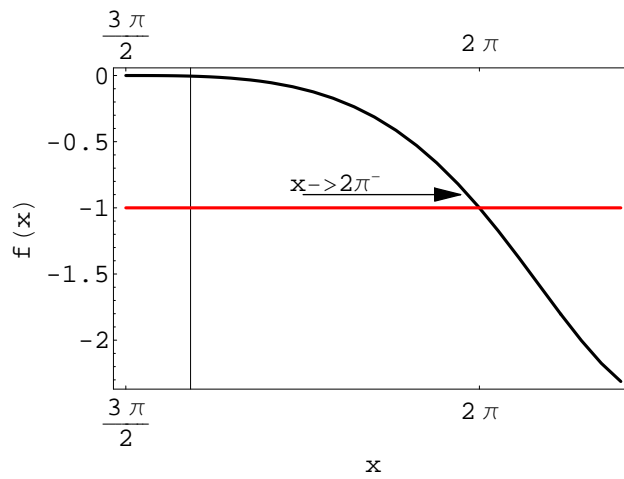


Figura 6: Grafico di $f(x) = -e^{\sin x} \cos x (\sin x + 1)$

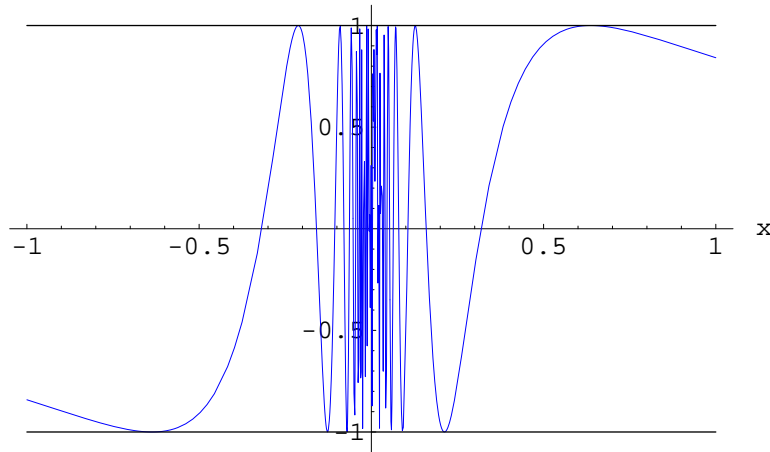


Figura 7: Grafico di $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$x \rightarrow +\infty$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : x > \delta_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon) \quad (22)$$

Per ipotesi f è periodica, quindi compie oscillazioni tra $\inf f$ e $\sup f$, donde:

$$|f(x) - l| = \begin{cases} |\inf f - l|, & \text{per } f(x) = \inf f \\ |\sup f - l|, & \text{per } f(x) = \sup f \end{cases}$$

Risulta :

$$\exists \varepsilon_* = \min \{ |\inf f - l|, |\sup f - l| \} > 0 : x > \delta_{\varepsilon_*} \implies |f(x) - l| > \varepsilon_*$$

Ma ciò contraddice la (22). Tale assurdo dimostra l'asserto. Nel caso speciale delle funzioni trigonometriche, si conclude che non esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x, \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x, \lim_{x \rightarrow \infty} \tan x, \text{ ecc.}$$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

Questo limite non esiste. Per dimostrare ciò, eseguiamo il cambio di variabile $x \rightarrow y = x^{-1}$, donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sin y,$$

che, in forza dell'esempio 8, non esiste. La funzione $f(x) = \sin(x^{-1})$ in ogni intorno di $x_0 = 0$ compie infinite oscillazioni tra -1 e $+1$ come possiamo vedere dal grafico di fig. 7.

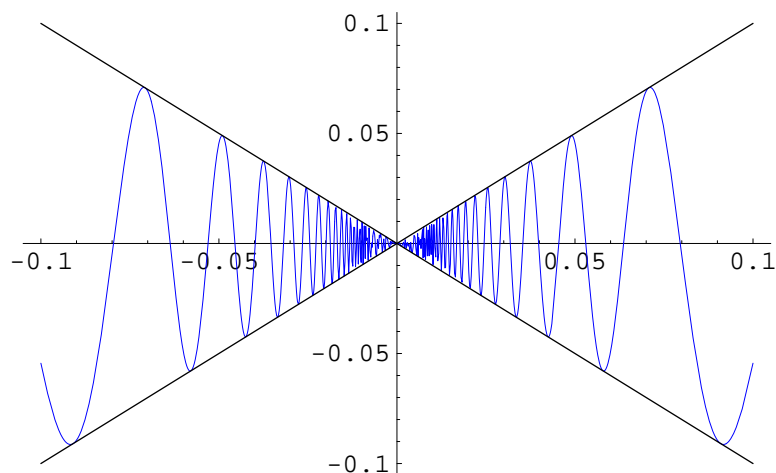


Figura 8: Grafico di $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. La curva $y = f(x)$ giace tra le due rette di equazione: $y = x$, $y = -x$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

La funzione $f(x) = x \sin x^{-1}$ non è definita in $x = 0$. D'altro canto:

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \iff -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x| \quad (23)$$

La (23) implica che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

Intorno al punto $x = 0$ il diagramma della funzione compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow 0$, come possiamo vedere dalla figura 8.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x}$ con $n > 1$

Evidentemente: $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$. In tal caso la funzione oscilla tra le due curve $y = x^n$, $y = -x^n$.

Una particolare classe di limiti che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ può essere risolta con l'ausilio del limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (24)$$

Il grafico della funzione $f(x) = x^{-1} \sin x$ è riportato in figura 11. Si tratta di un'oscillazione sinusoidale involupata dalle curve $y = x^{-1}$, $y = -x^{-1}$.

È facile rendersi conto che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad (25)$$

Per quanto detto, alcuni limiti di funzioni trigonometriche si riconducono alla forma (24).

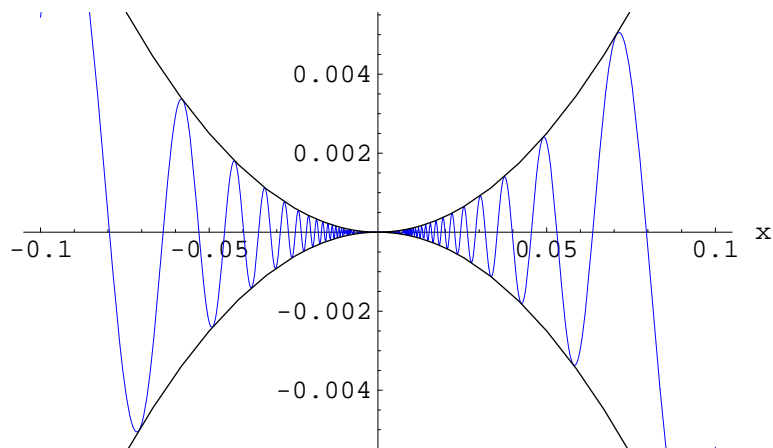


Figura 9: Grafico di $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

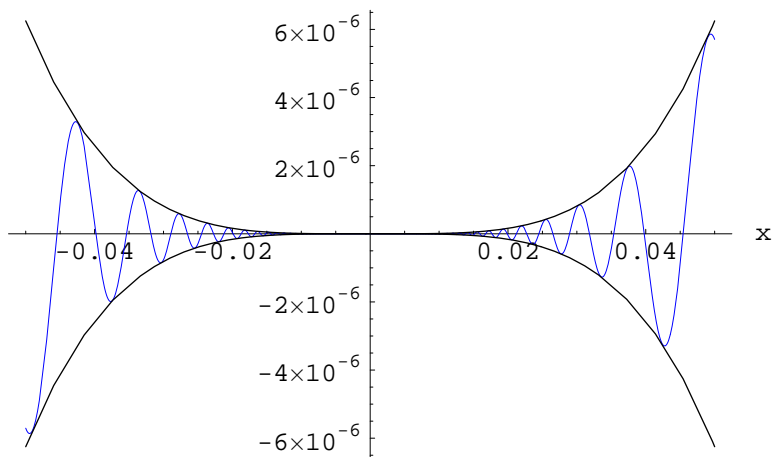


Figura 10: Grafico di $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$.

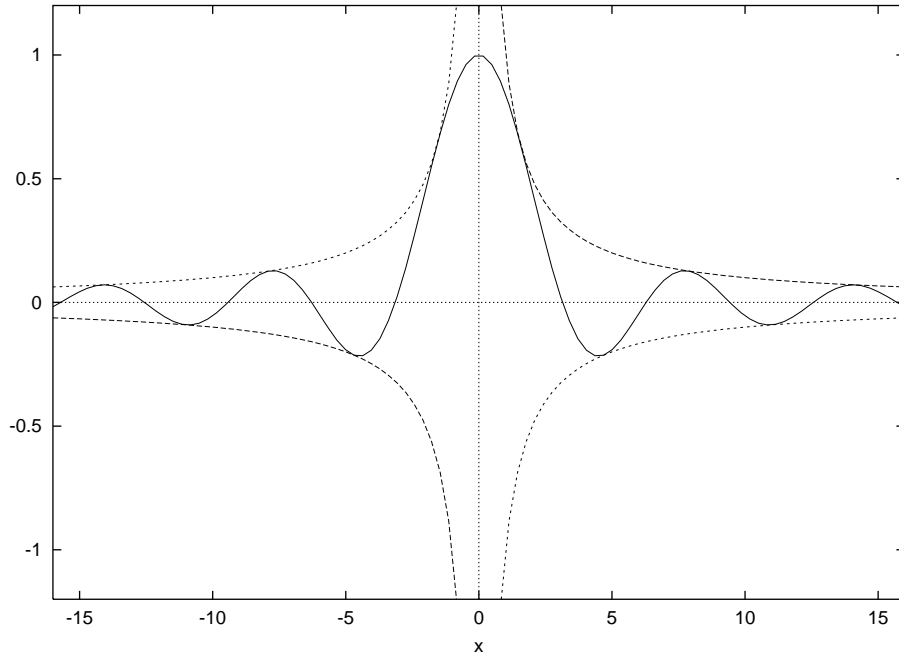


Figura 11: Grafico di $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

1.3.2 Esempi 2

1. $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$
2. $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$
3. $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x^4}$
4. $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x}$
5. $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
6. $l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0}$
7. $l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 x_0}{x - x_0}$
8. $l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$
9. $l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$
10. $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x}$
11. $l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\tan x - \tan x_0}$

1.3.3 Soluzioni

N. 1

$$l = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x}, \text{ cambio di variabile: } y = 3x, \text{ quindi: } l = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 3$$

In generale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda x}{x} = \lambda, \forall \lambda \in (0, +\infty) \quad (26)$$

N. 2

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right) \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right) \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

In generale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda x}{\sin \mu x} = \frac{\lambda}{\mu}, \forall \lambda, \mu \in (0, +\infty) \quad (27)$$

N. 3

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x^4} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^4 = 1$$

In generale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^p x}{x^p} = 1, \forall p \in (-\infty, +\infty) \quad (28)$$

N. 4

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \sin^3 x = 1 \cdot 0 = 0$$

N. 5

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Come è noto: $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, per cui: $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$. Questo limite ricorre frequentemente tale da essere considerato un limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (29)$$

N. 6

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sin x - \sin x_0)(\sin x + \sin x_0)}{x - x_0}$$

Per le formule di prostaferesi:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right)$$

Quindi:

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right)}{\frac{x - x_0}{2}} \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right) (\sin x + \sin x_0) \right] = 1 \cdot \cos x_0 \cdot 2 \cdot \sin x_0 = 2 \sin x_0 \cos x_0 = \sin (2x_0)$$

N. 7

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 x_0}{x - x_0} = l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\cos x - \cos x_0)(\cos x + \cos x_0)}{x - x_0}$$

Per le formule di prostaferesi:

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \left(\frac{x + x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x - x_0}{2} \right)$$

Quindi:

$$l = - \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) (\cos x + \cos x_0) \right] = - \sin(2x_0)$$

N. 8

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right] = \cos x_0$$

N. 9

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right] = - \sin x_0$$

N. 10

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}} = -1$$

N. 11

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\tan x - \tan x_0} = \frac{0}{0}$$

Per le formule di prostaferesi:

$$\sin 2x - \sin 2x_0 = 2 \sin(x - x_0) \cos(x + x_0)$$

Il denominatore:

$$\begin{aligned} \tan x - \tan x_0 &= \frac{\sin x \cos x_0 - \cos x \sin x_0}{\cos x \cos x_0} \\ &= \frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cos x_0} \end{aligned}$$

Quindi:

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{2 \sin(x - x_0) \cos(x + x_0)}{\sin x \cos x_0 - \cos x \sin x_0} \cos x \cos x_0 \right] = 2 \cos 2x_0 \cos^2 x_0$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della formula di sottrazione degli archi: $\sin(x - x_0) = \sin x \cos x_0 - \cos x \sin x_0$.

1.4 Infinitesimi ed infiniti (parte prima)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per X tale che $|x_0| \leq +\infty$. Sussistono le seguenti definizioni:

$$(f(x) \text{ è un infinitesimo in } x_0) \stackrel{def}{\iff} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \right) \quad (30)$$

$$(f(x) \text{ è un infinito in } x_0) \stackrel{def}{\iff} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \right)$$

Ciò premesso, se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi in x_0 , si consideri il rapporto:

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (31)$$

che per $x \rightarrow x_0$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Se tale rapporto è regolare, si può verificare uno sei tre casi seguenti casi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \\ l \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \quad (32)$$

Nel primo caso, $f(x)$ tende a zero più velocemente di $g(x)$ e diremo che $f(x)$ è **un infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$. Nel secondo caso, la funzione $f(x)$ tende a zero meno rapidamente di $g(x)$ e diremo che $f(x)$ è **un infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$. Infine, nel terzo caso $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero con la medesima rapidità, per cui diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine**. Nel caso speciale in cui f e g sono dello stesso ordine con $l = 1$, si dirà che f e g sono **equivalenti** e si scrive: $f \sim g$. Ad esempio:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = x$$

Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{quindi per } x \rightarrow 0, \text{ è } \sin x \sim x$$

Infine, se il rapporto $R(x)$ è non regolare in x_0 , si procede alla ricerca del limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \quad (33)$$

e si applicano le definizioni precedenti nel caso in cui $|R(x)|$ risulti regolare. Se il limite (33) non esiste, si studia il comportamento di $|f(x)|/|g(x)|$ in un intorno di x_0 . In particolare se esistono due numeri reali $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tali che:

$$x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2, \quad (34)$$

diremo che f e g sono **infinitesimi dello stesso ordine**.

In tutti i casi precedenti, si dice che gli infinitesimi f e g sono **confrontabili**. Di contro, se $R(x)$ e $|R(x)|$ sono non regolari in x_0 e se non è verificata la disuguaglianza (34), allora si dirà che f e g sono **non confrontabili**. Ma se $|R(x)|$ è limitato superiormente, si dirà che f è di **ordine non inferiore** a g .

Esempi

N. 1

Consideriamo gli infinitesimi nel punto $x = 0$:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x$$

Il loro rapporto è:

$$R(x) = \sin \frac{1}{x},$$

ed è non regolare in $x = 0$. Ma $|R(x)| = \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, donde $f(x) = x \sin x^{-1}$ è un infinitesimo di ordine non inferiore a $g(x) = x$.

N. 2

Consideriamo gli infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = \frac{3 + \sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Il loro rapporto è:

$$R(x) = 3 + \sin x$$

Tale funzione è non regolare per $x \rightarrow +\infty$, tuttavia è ivi limitata:

$$2 \leq 3 + \sin x \leq 4$$

Risulta quindi verificata una disuguaglianza del tipo (34), per cui f e g sono dello stesso ordine.

N. 3

Consideriamo gli infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{\cos x}{x} \quad (35)$$

Risulta:

$$R(x) = \tan x \quad (36)$$

Il rapporto $R(x)$ è non regolare per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre, non verifica una disuguaglianza del tipo (34), né tantomeno è limitato superiormente. Si conclude che i due infinitesimi (35) sono non confrontabili.

N. 4

Consideriamo gli infinitesimi per $x \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda^2 \sqrt{x^3 + 2x^2} + (\lambda - 1) \sqrt{\sin x} \tan \sqrt{x} \\ g(x) &= x, \end{aligned}$$

essendo λ un parametro reale.

Determinare per quali valori di λ l'infinitesimo $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$.

Soluzione

Calcoliamo il limite del rapporto:

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^2 \sqrt{x^3 + x^2} + (1 - 2\lambda) \tan \sqrt{x} \sqrt{\sin x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\lambda^2 \sqrt{x+1} + (1 - 2\lambda) \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\lambda^2 \sqrt{x+1} + (1 - 2\lambda) \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \right] \\
&= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\
&= (\lambda - 1)^2
\end{aligned}$$

L'infinitesimo f è di ordine superiore a g se e solo se $l = 0$, da cui $\lambda = 1$.

Passiamo al caso in cui f e g sono infiniti in x_0 . Ridefinendo $R(x) = |f(x)/g(x)|$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0 \implies f(x) \text{ è un infinito di ordine inferiore a } g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = +\infty \implies f(x) \text{ è un infinito di ordine superiore a } g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = l \in \mathbb{R} - \{0\} \implies f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono infiniti dello stesso ordine}$$

Utilizzando un linguaggio suggestivo ma efficace, possiamo dire - nel caso in cui $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$ - che per $x \rightarrow x_0$ il numeratore $f(x)$ *ammazza* il denominatore $g(x)$ (definizione analoga nel caso in cui il rapporto tende a 0). Anche nel caso degli infiniti, è valida la definizione derivante dalla (34) nel caso in cui il rapporto sia non regolare. Per il calcolo del limite del rapporto è utile il seguente teorema.

Theorem 1 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi in x_0 tali che:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\
g(x) &= g_1(x) + g_2(x),
\end{aligned}$$

essendo $f_2(x), g_2(x)$ infinitesimi di ordine superiore a $f_1(x), g_1(x)$ rispettivamente. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (37)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \right] \\
&= \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},
\end{aligned}$$

essendo:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \right] = 1,$$

poiché per ipotesi, f_2, g_2 sono infinitesimi di ordine superiore a f_1, g_1 rispettivamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = 0,$$

donde l'asserto (37).

Tale risultato si esprime dicendo che nel limite per $x \rightarrow x_0$ è lecito trascurare a numeratore e denominatore gli infinitesimi di ordine superiore. Tale teorema è noto come **principio della sostituzione degli infinitesimi**:

Theorem 2 *Il limite del rapporto a primo membro della (37) conserva il proprio valore aggiungendo o sottraendo a numeratore e denominatore, infinitesimi di ordine superiore a f e g rispettivamente.*

Procedendo nel caso degli infiniti, abbiamo il:

Theorem 3 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti in x_0 tali che:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ g(x) &= g_1(x) + g_2(x), \end{aligned}$$

essendo $f_2(x), g_2(x)$ infiniti di ordine inferiore a $f_1(x), g_1(x)$ rispettivamente. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (38)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f_1(x) \left(1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right)}{g_1(x) \left(1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)} \right)} \right] \\ &= \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \end{aligned}$$

essendo:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \right] = 1,$$

poiché per ipotesi, f_2, g_2 sono infiniti di ordine inferiore a f_1, g_1 rispettivamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = 0,$$

donde l'asserto (38).

Tale risultato si esprime dicendo che nel limite per $x \rightarrow x_0$ è lecito trascurare a numeratore e denominatore gli infiniti di ordine inferiore. Alternativamente, diciamo che per $x \rightarrow x_0$ la funzione $f(x)$ si comporta come $f_1(x)$.

Sia $u(x)$ un infinitesimo in x_0 e definito positivo intorno a tale punto. Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$
$$\exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies u(x) > 0$$

Evidentemente:

$$\forall \alpha \in (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^\alpha = 0,$$

In altri termini, se la funzione u è un infinitesimo in x_0 tale è la funzione u^α con $\alpha > 0$. Inoltre se $\beta \in (0, +\infty) - \{\alpha\}$:

$$\alpha > \beta \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)^\alpha}{u(x)^\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{|\alpha-\beta|} = 0 \quad (39)$$
$$\alpha < \beta \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)^\alpha}{u(x)^\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{u(x)^{|\beta-\alpha|}} = +\infty$$

La seconda delle (39) si giustifica osservando che se f è un qualunque infinitesimo, allora la funzione reciproca $1/f$ è un infinito, e viceversa.

Ciò premesso, sussistono le seguenti

Definizione

Il numero reale positivo α è l'**ordine** dell'infinitesimo u^α rispetto all'infinitesimo u .

Definizione

Se f è un infinitesimo, diremo che f è **dotato di ordine** se esiste un numero reale positivo α tale che gli infinitesimi f e u^α siano dello stesso ordine. Chiameremo α **ordine** dell'infinitesimo f . L'infinitesimo u è denominato **infinitesimo di riferimento**.

È consuetudine assumere come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = |x - x_0|, \quad \text{con } |x_0| < +\infty \quad (40)$$

Esempio

Stabilire l'ordine dell'infinitesimo $f(x) = (x - 1)^4 + (x - 1)^3 + (x - 1)^2$ per $x \rightarrow x_0 = 1$.

Soluzione

Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = |x - 1| \quad (41)$$

L'ordine α dell'infinitesimo f deve verificare la condizione:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = l \neq 0 \quad (42)$$

Il limite destro è:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2}{(x-1)^\alpha} & (43) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + t^3 + t^2}{t^\alpha} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^{4-\alpha} + t^{3-\alpha} + t^{2-\alpha}) = l \iff \alpha = 2
\end{aligned}$$

Il limite sinistro:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} & (44) \\
&= - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2}{(x-1)^\alpha} \neq 0 \iff \alpha = 2
\end{aligned}$$

Le (43)-(44) implicano:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 2 \quad (45)$$

Si conclude che $f(x)$ è per $x \rightarrow 1$, un infinitesimo di ordine 2.

Sia $v(x)$ un infinito in x_0 e definito positivo intorno a tale punto. Quindi:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = +\infty \\
& \exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies v(x) > 0
\end{aligned}$$

Evidentemente:

$$\forall \alpha \in (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} v(x)^\alpha = 0,$$

In altri termini, se la funzione v è un infinito in x_0 tale è la funzione v^α con $\alpha > 0$. Inoltre se $\beta \in (0, +\infty) - \{\alpha\}$:

$$\begin{aligned}
\alpha > \beta & \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x)^\alpha}{v(x)^\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x)^{|\alpha-\beta|} = +\infty \\
\alpha < \beta & \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x)^\alpha}{v(x)^\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{v(x)^{|\beta-\alpha|}} = 0^+
\end{aligned} \quad (46)$$

Ciò premesso, sussistono le seguenti

Definizione

Il numero reale positivo α è l'**ordine** dell'infinito v^α rispetto all'infinito v .

Definizione

Se f è un infinito, diremo che f è **dotato di ordine** se esiste un numero reale positivo α tale che gli infiniti f e u^α siano dello stesso ordine. Chiameremo α **ordine** dell'infinito f . L'infinito u è denominato **infinito di riferimento**.

È consuetudine assumere come infinito di riferimento la funzione:

$$v(x) = |x - x_0|^{-1}, \quad \text{con } |x_0| < +\infty \quad (47)$$

Esempio

Stabilire l'ordine dell'infinitesimo $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2}$ per $x \rightarrow x_0 = 1$.

Soluzione

Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$v(x) = \frac{1}{|x - 1|} \quad (48)$$

L'ordine α dell'infinito f deve verificare la condizione:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = l \neq 0 \quad (49)$$

Il limite destro è:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} \quad (50) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^4 [1 + (x-1)^{-3} + (x-1)^{-2}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^{\alpha-4}}{1 + (x-1)^{-3} + (x-1)^{-2}} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 4 \end{aligned}$$

Il limite sinistro:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} \quad (51) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 4 \end{aligned}$$

Le (50)-(51) implicano:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 4 \quad (52)$$

Si conclude che la funzione f è, per $x \rightarrow 1$, un infinito di ordine 4.

Sia f un infinitesimo in x_0 e u l'infinitesimo di riferimento. Sussistono le seguenti definizioni:

$$(f(x) \text{ è di ordine infinitamente grande}) \stackrel{def}{\iff} \left(\forall \alpha \in (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 0 \right) \quad (53)$$

$$(f(x) \text{ è di ordine infinitamente piccolo}) \stackrel{def}{\iff} \left(\forall \alpha \in (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{u(x)^\alpha} = +\infty \right)$$

Sia f un infinito in x_0 e v l'infinito di riferimento. Abbiamo le seguenti:

$$(f(x) \text{ è di ordine infinitamente grande}) \stackrel{def}{\iff} \left(\forall \alpha \in (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{v(x)^\alpha} = +\infty \right) \quad (54)$$

$$(f(x) \text{ è di ordine infinitamente piccolo}) \stackrel{def}{\iff} \left(\forall \alpha \in (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = 0 \right)$$

1.4.1 Esercizi proposti sugli infiniti e infinitesimi

1. Determinare (per $x \rightarrow 0$) l'ordine dell'infinitesimo:

$$f(x) = \frac{10^4 x}{x+1}$$

2. Determinare (per $x \rightarrow 0$) l'ordine dell'infinitesimo:

$$f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$$

3. Determinare (per $x \rightarrow 0$) l'ordine dell'infinitesimo:

$$f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$$

4. Determinare (per $x \rightarrow 0$) l'ordine dell'infinitesimo:

$$f(x) = \sin x - \tan x$$

1.4.2 Soluzioni degli esercizi proposti

N. 1

Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$. Quindi l'ordine α (se esiste) dell'infinitesimo f è tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 10^4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1-\alpha}}{x+1} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 1$$

N. 2

Con le solite posizioni:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}{x^\alpha} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + x^{\frac{1}{n}}}{x^{n\alpha}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^{\frac{1}{n}} \left(x^{1-\frac{1}{n}} + 1\right)}{x^{n\alpha}}\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^{\frac{1}{n}-n\alpha} \left(x^{\frac{n-1}{n}} + 1\right)\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \frac{1}{n} - n\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Alternativamente vediamo che per $x \rightarrow 0$, x è di ordine superiore rispetto a $x^{1/n}$, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{n^2}}}{x^\alpha} \neq 0 \iff \alpha = \frac{1}{n^2}$$

Più precisamente, il limite è 1 quindi per $x \rightarrow 0$, è $\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}} \sim \sqrt[n^2]{x}$. Nelle applicazioni ciò si esprime dicendo che nel limite per $x \rightarrow 0$, la funzione $\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ va come $\sqrt[n^2]{x}$. Da un punto di vista geometrico la curva di equazione $y = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ approssima nel limite $x \rightarrow 0$, la curva $y = \sqrt[n^2]{x}$ (figura 12)

N. 3

Procediamo in maniera simile all'esercizio precedente.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}}{x^\alpha} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{n}} \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)}{x^\alpha} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{2-n\alpha}{n}} \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right) \\
&\neq 0 \iff \alpha = \frac{2}{n},
\end{aligned}$$

cioè per $x \rightarrow 0$ la funzione $\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$ va come $\sqrt[n]{x^2}$.

N. 4

Dobbiamo determinare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^\alpha}$$

Abbiamo:

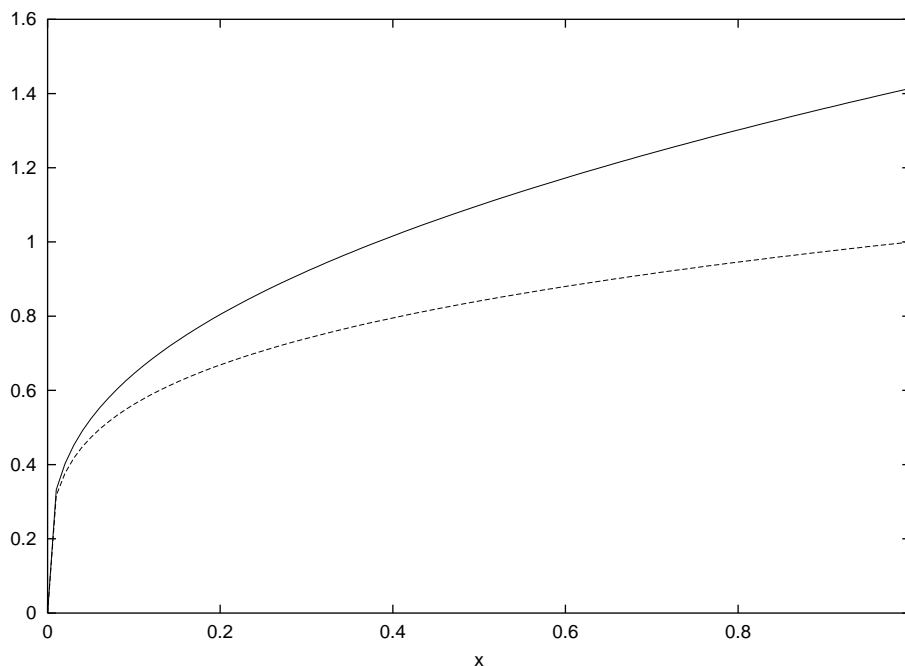


Figura 12: Grafico di $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ (curva continua) e $g(x) = \sqrt[4]{x}$. Nel limite $x \rightarrow 0$ le due curve sono coincidenti.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^\alpha} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\tan x}{x^\alpha} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{\alpha-2}} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \left(\frac{1}{\cos x} \right) \neq 0 \iff \alpha = 3
 \end{aligned}$$

Si conclude che per $x \rightarrow 0$, la funzione $\sin x - \tan x$ è un infinitesimo del terzo ordine.

1.5 Funzioni trigonometriche (parte seconda)

1.5.1 Risoluzione delle forme indeterminate per confronto tra infinitesimi

Esempi

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{1 - \cos x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{(1 - \cos x)^3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{(1 - \cos x)^4}$

4. Determinare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^n}{\tan^m x}$$

nei seguenti casi: $(n = 1, m = 1)$, $(n = 1, m = 2)$, $(n = 2, m = 5)$.

Soluzioni

N. 1

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Poniamo: $f(x) = \sin^4 x$; $g(x) = 1 - \cos x$. Tali funzioni sono infinitesime in $x = 0$. Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$. Quindi determiniamo l'ordine di f e g . Evidentemente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x^\alpha} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 4$$

Quindi f è un infinitesimo di ordine $\alpha = 4$. Passiamo alla funzione $g(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{u(x)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^\alpha} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^\alpha} \\ &= l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 2, \end{aligned}$$

cioè g è un infinitesimo di ordine $\beta = 2 < \alpha \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

N. 2

Poniamo: $f(x) = \sin^4 x$, $g(x) = (1 - \cos x)^2$, quindi determiniamo l'ordine di g .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{u(x)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{x^\alpha} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{x^\alpha} \\ &= l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 4, \end{aligned}$$

Cioè $\alpha = \beta$, donde il limite è finito.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{(1 - \cos x)^2} &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 \frac{x}{2}} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^4 x}{x^4}}{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

N. 3

Utilizzando i simboli precedenti con $g(x) = (1 - \cos x)^4$, risulta $g(x) = 16 \sin^4(x/2)$ che è un infinitesimo di ordine $\beta = 8 > \alpha$, donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{(1 - \cos x)^4} = \infty$$

N. 4

($n = 1, m = 1$). Il limite è: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$

Poniamo: $f(x) = 1 - \cos x$; $g(x) = \tan x$. La funzione f è un infinitesimo di ordine $\alpha = 2$, mentre la funzione g è un infinitesimo di ordine $\beta = 1$. Si conclude che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = 0$$

($n = 1, m = 2$)

Ridifenendo $g(x) = \tan^2 x$, risulta: g infinitesimo di ordine $\beta = 2$, donde il limite è finito. Determiniamolo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

($n = 2, m = 5$)

Ridifenendo $f(x) = (1 - \cos x)^2$, $g(x) = \tan^5 x$, risulta: f infinitesimo di ordine $\alpha = 4$, g infinitesimo di ordine $\beta = 5$, donde il rapporto diverge per $x \rightarrow 0$.

Esercizi proposti (parte prima)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \tan x}{\sin x + \tan^2 x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \sin x)}{3 \cos^2 x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin \frac{x}{2}}{1 - \cos x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 + \cos x - 2 \cos^2 x}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x}$
13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin a}{x}$
15. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$
16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x - \ln \sin 2x)$
18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin^2 x + \sin x - 4}{x - \frac{\pi}{2}}$
19. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot^2 x$
21. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x (1 - \sin x)$
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x}$

Soluzioni N. 1

Si risolve per confronto tra infinitesimi: $\sin x$ è di ordine $\alpha = 1$, x^2 è di ordine $\beta = 2$, donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$$

N. 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \frac{1}{\cos x} \right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = 2$$

N. 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$$

N. 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

N. 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \tan x}{\sin x + \tan^2 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}} = \frac{3+1}{1+1 \cdot \frac{0}{1}} = 4$$

N. 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \sin x)}{3 \cos^2 x} = \frac{0}{0} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{2}{3} \frac{\sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{3}$$

N. 7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos \frac{x}{2} \cos x} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

N. 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin \frac{x}{2}}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

N. 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

N. 10

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 + \cos x - 2 \cos^2 x} = \frac{0}{0}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x^2 :

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1 + \cos x - 2 \cos^2 x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1 - \cos^2 x + \cos x - \cos^2 x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1 - \cos^2 x}{x^2} + \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}} = \frac{l_1}{l_2}$$

Calcoliamo il limite a denominatore:

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \cos x - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \sin^2 x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} (1 + \cos x) \right] + \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1) + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$l = \frac{l_1}{l_2} = \frac{2}{3}$$

N. 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x} \right) = l_1 + l_2, \text{ essendo: } l_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$\text{Abbiamo: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x - 1}{x^2} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \implies l = 1$$

Alternativamente: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, giacché la funzione $\cos x - 1$ è per $x \rightarrow 0$, un infinitesimo del second'ordine.

N. 12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x^3} \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x^3} (\frac{1}{\cos x} - 1)} = \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{2}} = 2$$

N. 13

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x} = \frac{0}{0}. \text{ Eseguiamo il cambio di variabile: } x \rightarrow y = x + \frac{\pi}{2}$$

$$l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos y)^2}{\sin y} = \frac{0}{0}. \text{ Procediamo per confronto tra infinitesimi:}$$

$$f(y) = (1 - \cos y)^2, g(y) = \sin y$$

Siano α e β gli ordini di f e g rispettivamente. Manifestamente è $\beta = 1$. Determiniamo α :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y^\alpha} = \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^{\alpha/2}} \right)^2 = \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \frac{\alpha}{2} = 2 \implies \alpha = 4$$

f è infinitesimo di ordine 4, donde $l = 0$.

N. 14

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin a}{x} = \frac{0}{0}$$

Per le formule di prostaferesi:

$$\sin(x+a) - \sin a = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \left(\frac{x+2a}{2} \right)$$

Quindi:

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cos \left(\frac{x+2a}{2} \right) \right] = \cos a$$

N. 15

$$l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a} = \frac{0}{0}$$

Per le formule di prostaferesi:

$$\cos x - \cos a = -2 \sin \left(\frac{x+a}{2} \right) \sin \left(\frac{x-a}{2} \right)$$

Quindi:

$$l = -2 \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \sin \left(\frac{x+a}{2} \right) \right] = -\sin a$$

N. 16

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 - \sin x}{\cos x (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{(1 - \sin x)(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})}{\cos x (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{(1 - \sin x)(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})}{\cos^2 x} \right] = \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \right]}_{l_1} \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) \right]}_{l_2} \end{aligned}$$

Per la determinazione di l_1 eseguiamo il cambio di variabile: $x \rightarrow y = x + \frac{\pi}{2}$, per cui:

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{\sin^2 y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos y}{y^2}}{\frac{\sin^2 y}{y^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il limite l_2 è immediato:

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad (55)$$

Finalmente:

$$l = l_1 l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

N. 17

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x - \ln \sin 2x) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x}{\sin 2x} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x} = -\ln 2$$

N. 18

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin^2 x + \sin x - 4}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = x - \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 y + \cos y - 4}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \sin^2 y + \cos y - 4}{y} \\ &= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y} - 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y} = 0 \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $1 - \cos y$ e $\sin^2 y$ sono infinitesimi del secondo ordine per $x \rightarrow 0$.

N. 19

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = \frac{0}{0}$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = x - \frac{\pi}{2} \implies l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$

N. 20

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot^2 x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\tan x} \cdot \frac{1}{\tan x} \right) = \infty$$

N. 21

$$l \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x (1 - \sin x) = 0 \cdot \infty$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = x + \frac{\pi}{2}$

$$l = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\cos y}{\sin y} (1 - \cos y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left(y \cos y \frac{y}{\sin y} \frac{1 - \cos y}{y^2} \right) = 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

N. 22

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{2 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}}{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Esercizi proposti (parte seconda)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \sin \frac{1}{x}$, con $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^m \left(\sin \frac{1}{x^n} \right)^p$, con $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$
6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x+2}$
7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - 2}$
12. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin 3x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \left(\frac{\pi x}{2} \right)}{1 - \sqrt{x}}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

Soluzioni N. 1

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} = \frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile: $x \rightarrow y = \pi x - \pi$ per cui:

$$\sin \pi x = -\sin y; \quad \sin 3\pi x = -\sin 3y$$

Il limite diventa:

$$l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\sin 3y} = \frac{1}{3}$$

N. 2

Già conosciamo il limite di $f(x) = x \sin x^{-1}$ per $x \rightarrow 0$. Precisamente, tale funzione è ivi infinitesima. Di contro, per $x \rightarrow \infty$ tende a 1. Infatti, eseguendo il cambio di variabile:

$$x \rightarrow y = \frac{1}{x}, \tag{56}$$

si ha:

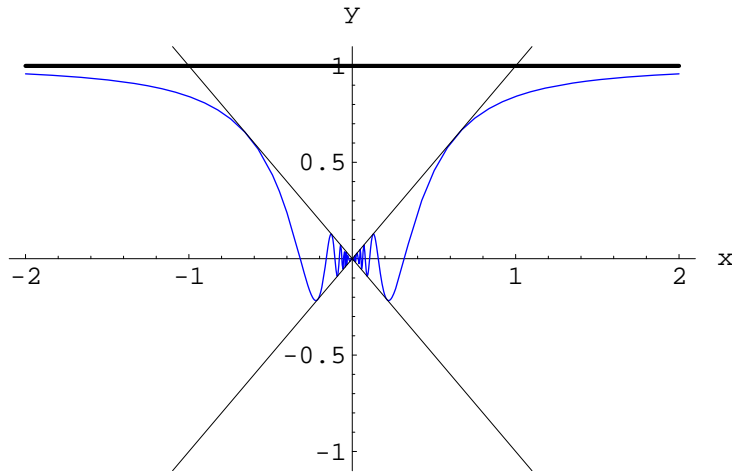


Figura 13: Grafico di $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Per $|x| \ll 1$ il grafico oscilla tra le due rette $y = x, y = -x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Il grafico di $f(x)$ è riportato in figura 13

N. 3

Eseguendo il solito cambio di variabile:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y^{n-1}} \cdot \frac{\sin y}{y} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{n-1}} = \infty \end{aligned}$$

Per $n = 2$ il grafico della funzione $f(x) = x^2 \sin x^{-1}$ oscilla tra le curve $y = x^2, y = -x^2$ per tutti i valori di x tali che $|x| \ll 1$ (figure 14-15).

N. 4

Eseguendo il cambio di variabile (56):

$$l(m, n, p) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^p(y^n)}{y^m} \tag{57}$$

Per $(m, n, p) = (1, 1, 2)$:

$$l(1, 1, 2) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y} = 0$$

Il grafico di $f(x) = x \sin^2 x^{-1}$ per $|x| \ll 1$ compie oscillazioni tra l'asse x e la retta $y = x$, come possiamo vedere dalla figura 16.

Di contro, è visibile l'asintoto orizzontale $y = 0$ nel limite $|x| \rightarrow +\infty$ (figura 17).

Per $(m, n, p) = (1, 2, 2)$:

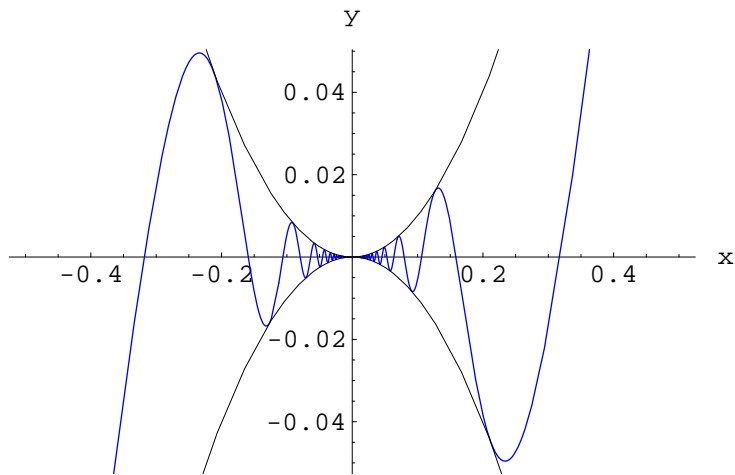


Figura 14: Grafico di $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Per $|x| \ll 1$ il grafico oscilla tra le curve $y = x^2$, $y = -x^2$.

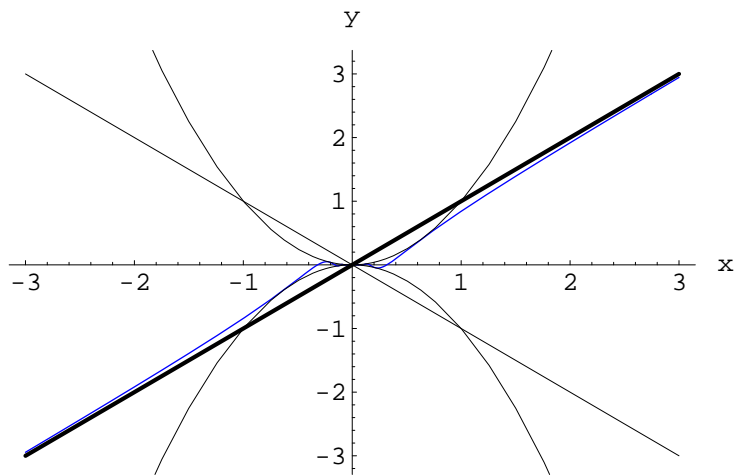


Figura 15: Grafico di $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Nel limite per $x \rightarrow \infty$ presenta due asintoti obliqui: $y = x$, $y = -x$.

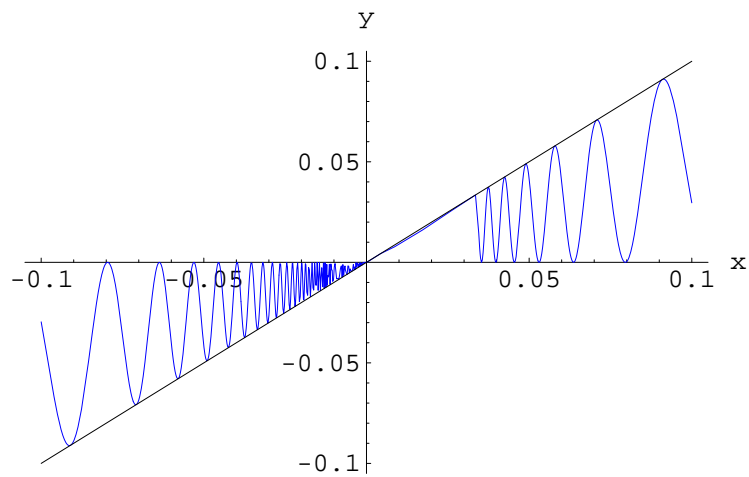


Figura 16: Grafico di $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$. Per $|x| \ll 1$ il grafico oscilla tra le curve tra l'asse x e la retta di equazione $y = x$.

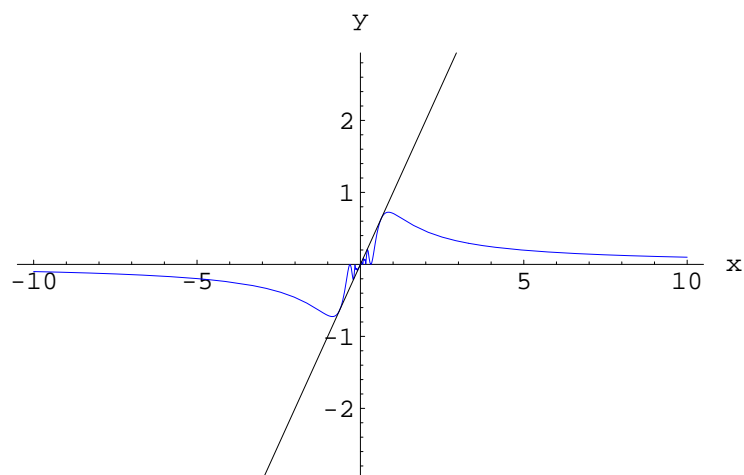


Figura 17: Grafico di $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$ nel limite $|x| \gg 1$

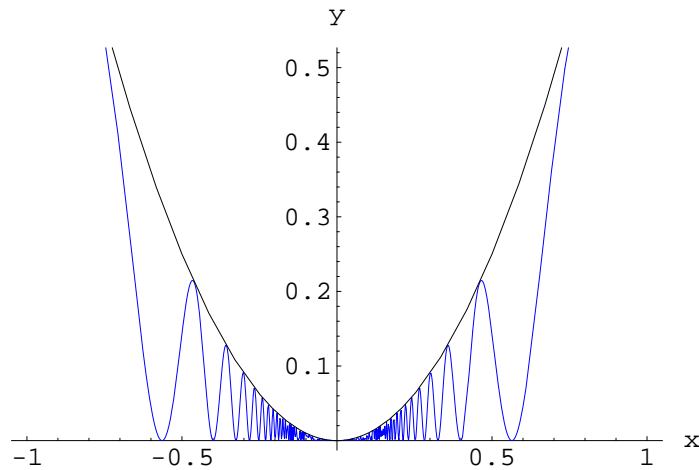


Figura 18: Grafico di $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$. Per $|x| \ll 1$ il grafico oscilla tra le curve tra l'asse x e la curva di equazione $y = x^2$.

$$\begin{aligned}
 l(1, 2, 2) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2(y^2)}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[y^3 \sin(y^2) \cdot \left(\frac{\sin(y^2)}{y^2} \right)^2 \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Per $(m, n, p) = (2, 2, 2)$:

$$\begin{aligned}
 l(2, 2, 2) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2(y^2)}{y^2} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[y^2 \left(\frac{\sin(y^2)}{y^2} \right)^2 \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Il grafico di $f(x) = x^2 \sin^2 x^{-2}$ per $|x| \ll 1$ compie oscillazioni tra l'asse x e la curva $y = x^2$, come possiamo vedere dalla figura 18.

Di contro, è visibile l'asintoto orizzontale $y = 0$ nel limite $|x| \rightarrow +\infty$ (figura 19).

Per $(m, n, p) = (5, 3, 3)$

$$\begin{aligned}
 l(5, 3, 3) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^3(y^3)}{y^5} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} y^4 \left(\frac{\sin(y^3)}{y^3} \right)^3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

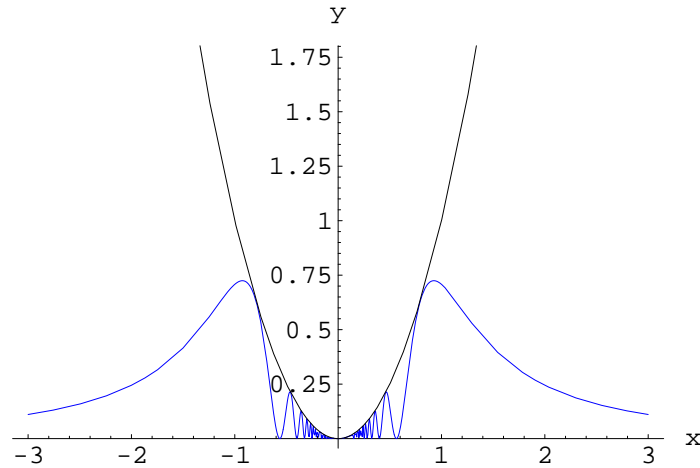


Figura 19: Grafico di $f(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x^2}$ nel limite $|x| \gg 1$

N. 5

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \frac{0}{0}$$

Formule di prostaferesi:

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x - a}{2} \cos \frac{x + a}{2}$$

Implica:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cos \frac{x+a}{2} \right) = \cos a$$

N. 6

$$l = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x+2} = \frac{0}{0}$$

Cambio di variabile:

$$\pi x = y - 2\pi \tag{58}$$

La (58) implica:

$$l = \pi \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} = \pi$$

N. 7

$$l = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{0}{0}$$

Formule di prostaferesi:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Implica:

$$l = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left(\frac{2x + h}{2} \right) \right] = \cos x$$

N. 8

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x} \cos x \right) = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

N. 9

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} = 0 \cdot \infty$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} y \tan y = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$$

N. 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x \sin x}{\sin 2x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{2 \sin x \cos x} \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

N. 11

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - 2} = \frac{0}{0}$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = \pi - x \implies l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{y} = \frac{1}{4} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{\left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$

N. 12

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x} = \frac{0}{0}$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = \frac{\pi}{3} - x \implies \cos x = \cos \left(\frac{\pi}{3} - y \right) = \frac{1}{2} \cos y + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin y$. Il limite diventa:

$$l = \frac{1}{3} \left(\lim_{y \rightarrow 0} y \frac{1 - \cos y}{y^2} - \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{3} \frac{\sin y}{y} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

N. 13

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Per le formule di prostaferesi:

$$\cos mx - \cos nx = -2 \sin \frac{(m+n)x}{2} \sin \frac{(m-n)x}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} l &= - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \left(\frac{m-n}{2} x \right) (m^2 - n^2) \sin \left(\frac{m+n}{2} x \right)}{\frac{m-n}{2} x \cdot 2 \cdot \frac{m+n}{2} x} \right] \\ &= \frac{n^2 - m^2}{2} \end{aligned}$$

In figura 1.5.1 è riportato l'andamento di $f(x) = x^{-2} (\cos mx - \cos nx)$ per diversi valori di $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$.

N. 14

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

N. 15

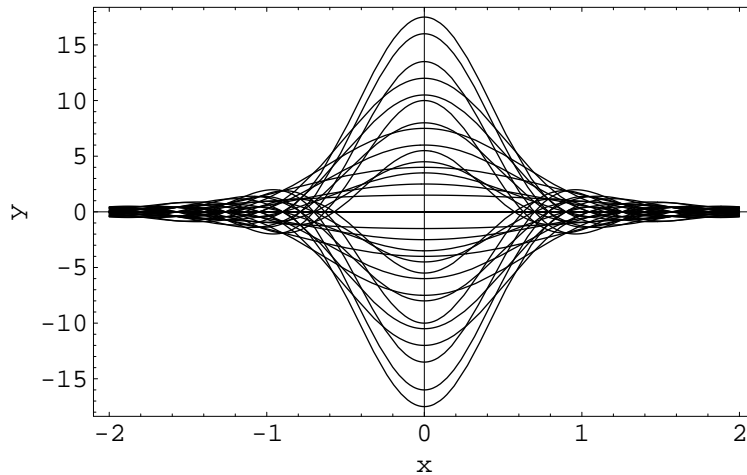
$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \frac{0}{0}$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = \arcsin x \implies x = \sin y$. Quindi: $l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$

N. 16

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 3x} = \frac{0}{0} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\frac{2x}{3x}} = \frac{2}{3}$$

N. 17



$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{\sin \pi x}$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = \pi x - \pi \Rightarrow l = \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y}{\sin y} \left(2 + \frac{y}{\pi} \right) \right] = \frac{2}{\pi}$

N. 18

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 3 \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

N. 19

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

Cambio di variabile: $x \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} \Rightarrow$

$$l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y}} \right) = \frac{\pi}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y} \right) = \pi.$$

N. 20

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos x}}{1 + \sqrt{\cos x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{4}$$

N. 21

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \right) = 1$$

1.6 Regola di De L'Hospital

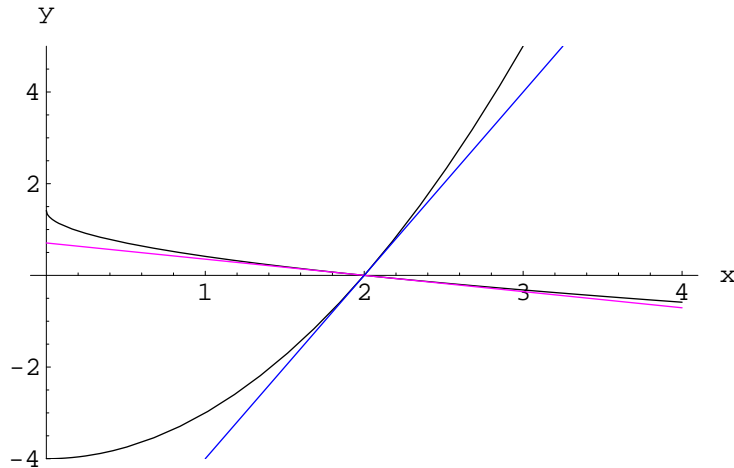
Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali di variabile reale e sia x_0 un punto di accumulazione (al finito o all'infinito) per i rispettivi insiemi di definizione delle suddette funzioni. Supponiamo inoltre che siano verificate le seguenti ipotesi:

1. f e g sono entrambe infinitesime o infinite in x_0 .
2. f e g sono entrambe derivabili in un intorno di x_0 escluso al più x_0 , ed in tale intorno g è priva di zeri.
3. Il rapporto delle derivate $f'(x)/g'(x)$ è regolare in x_0 .

Le ipotesi 1-2-3 implicano:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (59)$$

Esempi



Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{x^2 - 4} \quad (60)$$

Poniamo: $f(x) = \sqrt{2} - \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 4$. Applicando la (59):

$$l = \frac{0}{0} \underset{H}{=} -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4x\sqrt{x}} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (61)$$

Poniamo: $f(x) = \sin x$; $g(x) = x$. Applicando la (59):

$$l = \frac{0}{0} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

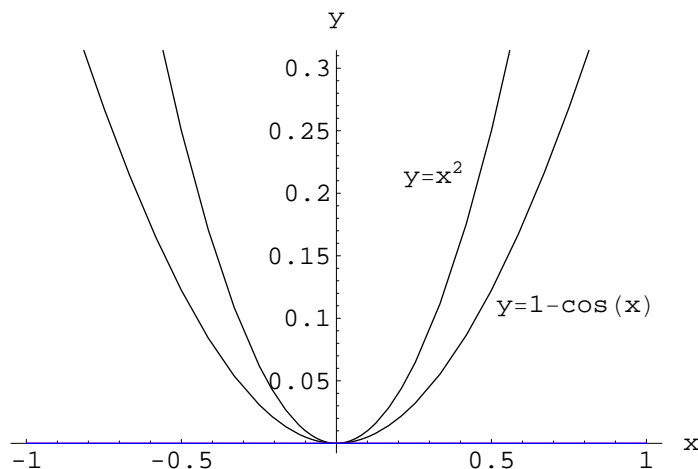
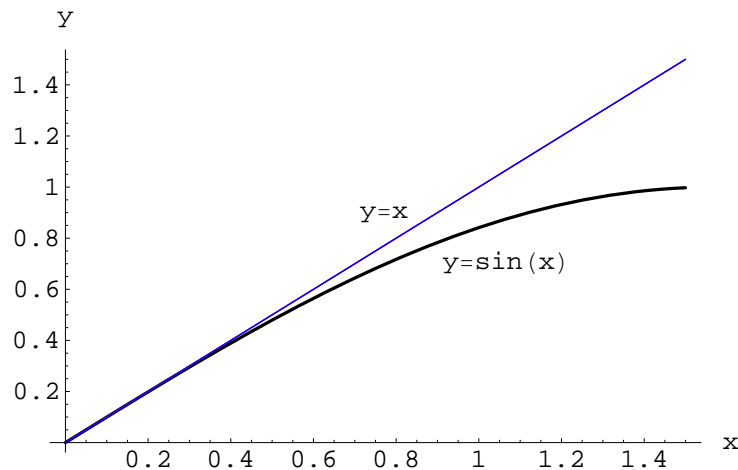
In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti: le curve $y = \sin x$ e $y = x$ hanno la medesima retta tangente nel punto $(0, 0)$.

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (62)$$

Poniamo: $f(x) = 1 - \cos x$; $g(x) = x^2$. Applicando la (59):

$$l = \frac{0}{0} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0}$$



In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti. Da tale grafico vediamo che $y = 1 - \cos x$ e $y = x^2$ hanno in $(0, 0)$ la medesima retta tangente che si identifica con l'asse delle ascisse, per cui il rapporto tra le derivate si presenta nella forma indeterminata $0/0$. In questo caso possiamo ricorrere nuovamente alla regola di De L'Hospital, passando alle derivate seconde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

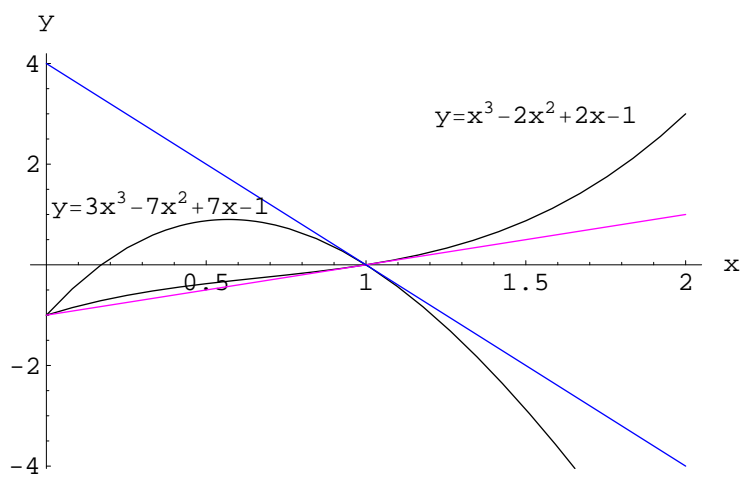
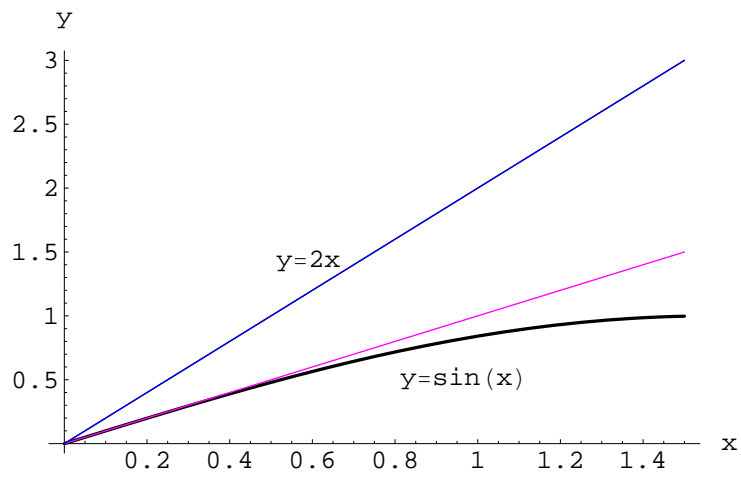
In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$; $g(x) = x^3 - 7x^2 + 7x - 1$. Abbiamo:

$$l = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 2}{3x^2 - 14x + 7} = -\frac{1}{4}$$



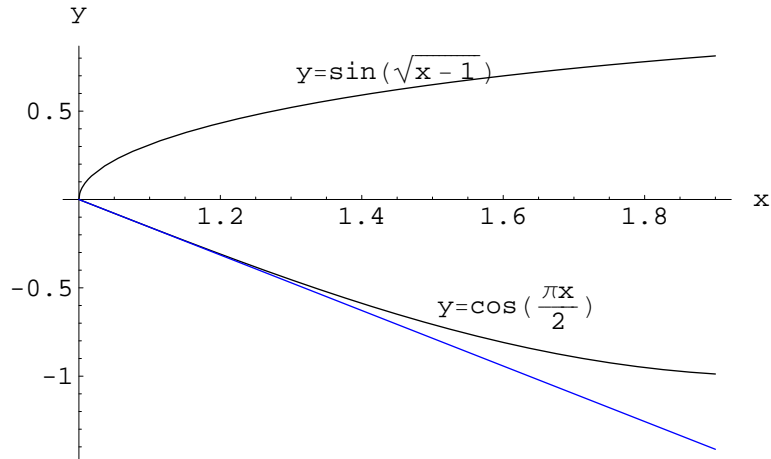


Figura 20: In questo caso la retta tangente a $y = f(x)$ si indentifica con l'asse y .

In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = \sin \sqrt{x-1}$; $g(x) = \cos \left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Abbiamo:

$$l = \frac{0}{0} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos \sqrt{x-1}}{\sin \left(\frac{\pi x}{2}\right) \sqrt{x-1}} = -\frac{1}{\pi} \frac{1^-}{1-0^+} = -\infty$$

In figura 20 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti. Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = \sin \sqrt{x} + x^2$; $g(x) = \tan x$. Abbiamo:

$$l = \frac{0}{0} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + 2x \right) \cos^2 x = +\infty$$

In figura 21 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)}{g(x)},$$

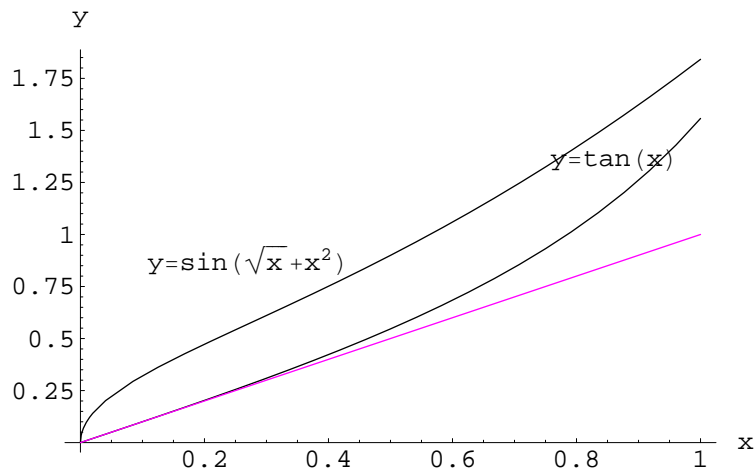


Figura 21: In questo caso la retta tangente a $y = f(x)$ si indentifica con l'asse y , quindi il rapporto diverge.

essendo: $f(x) = |x^3 - 1| - 2x^2 - 1$; $g(x) = \sqrt{2+x}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Per applicare la regola di De L'Hospital valutiamo a parte la derivata di $f(x)$. A tale scopo osserviamo che:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2, \text{ se } x > 1$$

$$f(x) = -x^3 - 2x^2, \text{ se } x < 1$$

Quindi la derivata:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x, \text{ se } x > 1$$

$$f'(x) = -3x^2 - 4x, \text{ se } x < 1$$

Da ciò segue:

$$l = - \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{2+x}} = \frac{0}{0} \underset{H}{=} -2 \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x^2 + 4x) \sqrt{2+x} = 0^+$$

In figura 22 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

Calcolare il limite:

$$l_\mu = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\mu(x)}{g(x)},$$

essendo: $f_\mu(x) = \sin(x^{1/\mu}) + x^\mu$; $g(x) = \tan x$. Qui è $\mu \in (1, +\infty)$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$, quindi:

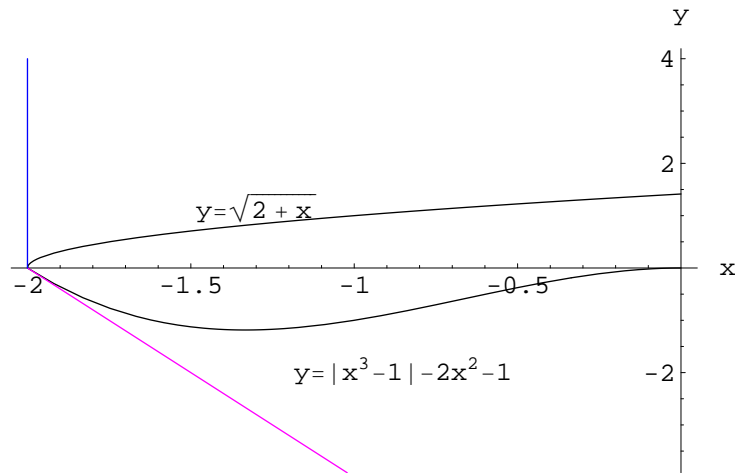


Figura 22: La retta tangente a $y = g(x)$ ha equazione $x = -2$, quindi il rapporto tra i coefficienti angolari è $\frac{f'(-2)}{\infty} = 0$.

$$\begin{aligned}
 l_\mu &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'_\mu(x)}{g'(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\mu} x^{\frac{1-\mu}{\mu}} \cos(x^{1/\mu}) + \mu x^{\mu-1}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\cos^2 x \left(\frac{1}{\mu} \frac{\cos(x^{1/\mu})}{x^{\frac{\mu-1}{\mu}}} + \mu x^{\mu-1} \right) \right] \\
 &= \frac{0}{+\infty} = +\infty,
 \end{aligned}$$

cioè $l_\mu = +\infty, \forall \mu \in (1, +\infty)$.

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x}$$

Abbiamo:

$$l = \frac{0}{0} \underset{H}{=} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2 x}{x} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} \sin x = -1 \cdot 0 = 0$$

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = \sin(\pi x)$; $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$, quindi:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= \frac{3\pi}{2} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} \cos(\pi x)}{x} \\ &= \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{0^+ \cdot (-1^-)}{(-1^-)} \\ &= 0^+ \end{aligned}$$

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = xe^x$; $g(x) = 1 - \cos x$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$, quindi:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+x)}{1 - \cos x} \\ &= \frac{1 \cdot (1+0)}{0} \\ &= \infty \end{aligned}$$

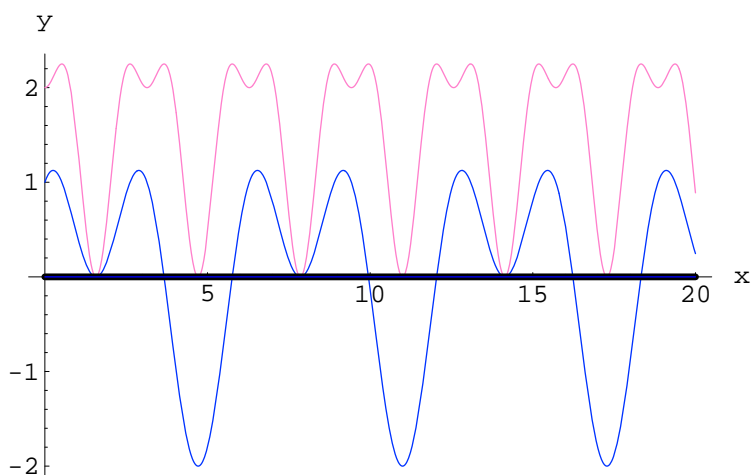
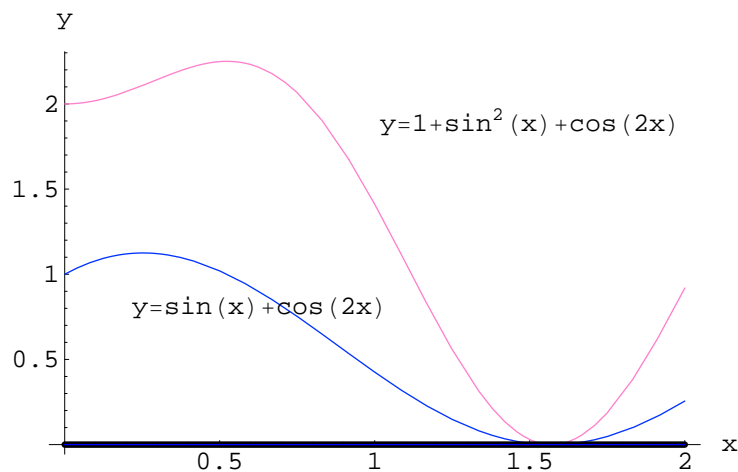
Precisamente:

$$\begin{aligned} l_+ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1^+ \cdot (1+0^+)}{0^+} = +\infty \\ l_- &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1^- \cdot (1+0^-)}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = \sin x + \cos 2x$; $g(x) = 1 + \sin^2 2x + \cos 2x$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$, quindi:



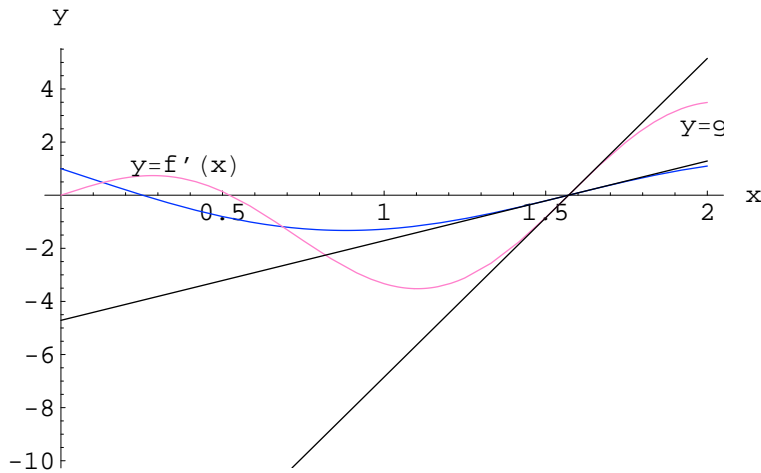
$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2 \sin 2x}{4 \sin 2x - 2 \sin 2x} \\
 &= \frac{0}{0}
 \end{aligned}$$

Cioè anche il rapporto tra le derivate prime si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Dal grafico di figura 1.6 vediamo infatti che le due curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$ hanno in $P(\pi/2, 0)$ la medesima retta tangente che si identifica con l'asse x (grassetto in figura).

In figura 1.6 è riportato il grafico delle medesime funzioni nell'intervallo $[0, 6\pi]$.

In tal caso si riapplica la regola di De L'Hospital calcolando il limite del rapporto delle derivate seconde che non sono infinitesime in x_0 (figura 1.6).

Abbiamo:



$$\begin{aligned}
 l &= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 4 \cos 2x}{8 \cos 2x - 4 \cos 2x} \\
 &= -\frac{1}{-8 + 4} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = ax + \sin x$; $g(x) = bx + \sin x$ con $a, b \in \mathbb{R}$, e $a \neq b$. Questo è un esempio di limite in cui la regola di De L'Hospital dà un risultato diverso. Apparentemente il limite non esiste, poiché la funzione $\sin x$ è non regolare per $x \rightarrow \infty$. In realtà il limite esiste:

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(a + \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left(b + \frac{\sin x}{x} \right)} \\
 &= \frac{a + 1}{b + 1}
 \end{aligned}$$

Di contro, se utilizziamo la regola di De L'Hospital, si trova:

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \cos x}{b + \cos x},$$

che non porta ad alcun risultato, giacché la funzione $\cos x$ è non regolare per $x \rightarrow \infty$.

Calcolare il limite:

$$l(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x, a)}{g(x, a)},$$

essendo: $f(x, a) = \sin \sqrt{x-a}$; $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$ con $a \in (0, +\infty)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
 l(a) &= \frac{0}{0} \\
 &= -a \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\cos \sqrt{x-a}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sqrt{x-a}} \\
 &= -a \cdot \frac{1}{0^+} \\
 &= a \cdot (-\infty) \\
 &\stackrel{(a>0)}{=} -\infty
 \end{aligned}$$

1.6.1 Esercizi proposti

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$
6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x) \cot x$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{a}{x}\right)$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \sin\left(\frac{a}{x}\right)$, $n \in (0, +\infty)$
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1)$
13. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
15. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right]$

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{2}{4+\ln x}}$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$
19. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\frac{\pi x}{2})}$
20. $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + bc + 1)^{\frac{1}{ax^2 + bx}}$
21. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{1-x}}$
23. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} \quad (a > 0)$
29. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$
30. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
31. $f(x) = (e^{ax} - bx)^{\frac{1}{x}}$ con $a, b > 0$, determinare: $l_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; $l_{\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$
33. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\ln(\sin 2x)}$
34. $\lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln x \cdot \ln(\ln x)]$
35. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - \arctan x^2}{(1 - \cos x)^3}$
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\arcsin x - x}$
37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$

38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x}$
39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$
40. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
41. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right)$
42. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \tan x$
43. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi-2x|}$
44. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x \ln x)$
45. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$
46. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$
48. $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\sin x}$
49. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x}$
50. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\pi-2 \arctan x}$
51. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)-ax}{\sin(bx)-bx}, a \neq b$
52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x}$
53. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}}$
54. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+a^x)^{\frac{1}{x}}; a > 0$
55. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{\tan x \sqrt{\sin x}}$
56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin x - x \cos x}$
57. $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) \ln x$
58. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) \frac{1}{\log_a x}$
59. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$

$$60. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} \sqrt{1+x} - e}{x^2}$$

$$61. \text{Calcolare: } l_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{\pm}} f(x), \text{ con } f(x) = \sqrt{1 + \tan x + \tan^2 x} (1 - e^{\pi-2x})$$

$$62. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}$$

$$63. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 \sin^2 x)^{1/\cos 2x}$$

$$64. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\pi - 4x) \ln(1 - \tan^2 x)$$

$$65. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+\pi-4 \arctan x)}{\sin(1-x)}$$

$$66. \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3 \arctan x - \pi}{3 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \pi}$$

1.6.2 Soluzioni

$$1. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \frac{1}{2}$$

$$2. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}$$

$$3. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{0} = \infty$$

$$4. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sinh x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = 1$$

$$5. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y^2} = 3$$

$$6. l = \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 - 1} = \infty$$

$$7. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 2x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} 5 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 10x}{\cos 2x} = 5$$

$$8. l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \sin^2 \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$9. l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \cdot \frac{x}{\tan x} \right) = 1$$

$$10. l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin ay}{y} = a$$

Il grafico di $f(x) = x \sin\left(\frac{a}{x}\right)$ è riportato in figura 23.

$$11. l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin ay}{y^n} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a}{y^{n-1}} \left(\frac{\sin ay}{ay} \right) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ +\infty, & n > 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases}$$

Il grafico di $f(x) = x^n \sin\left(\frac{a}{x}\right)$ è riportato in figura 24.

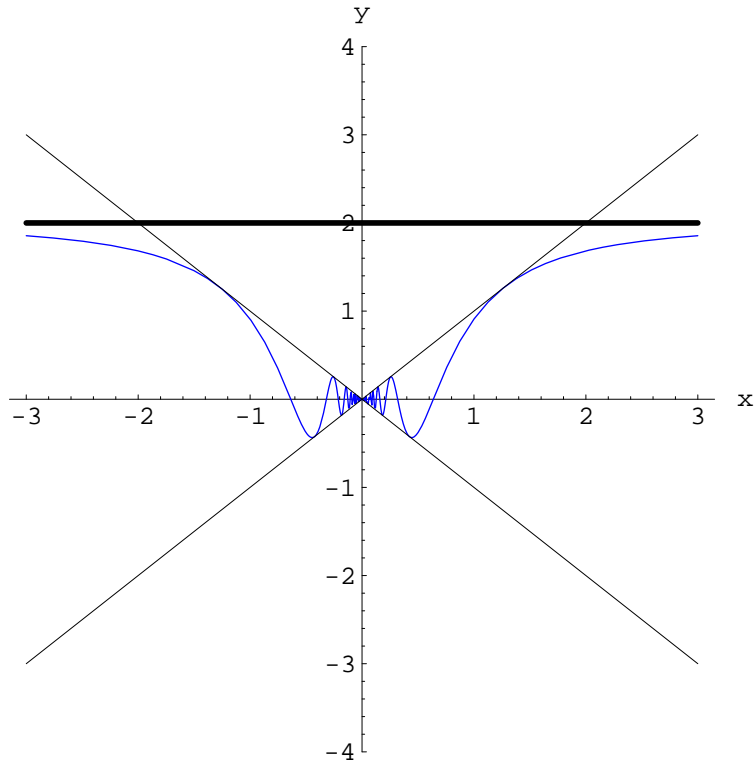


Figura 23: Grafico di $f(x) = x \sin \frac{a}{x}$ per $a = 2$.

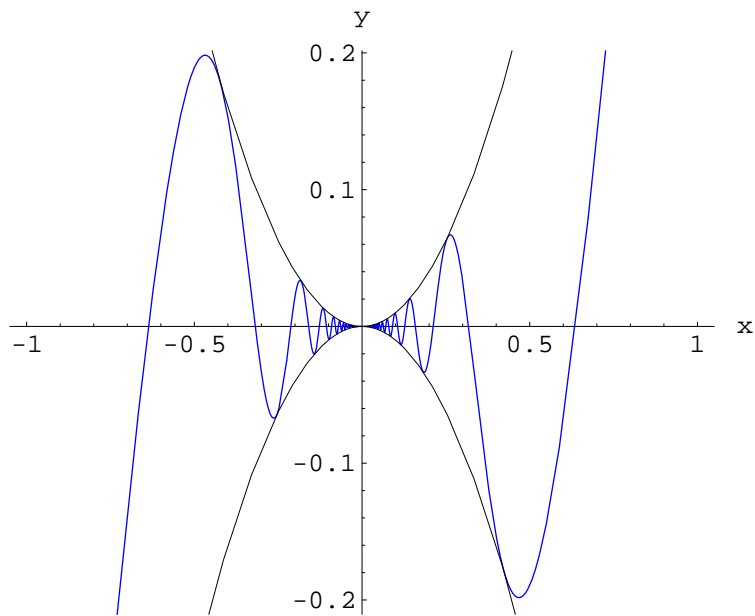


Figura 24: Grafico di $f(x) = x^n \sin \frac{a}{x}$ per $a = 2, n = 2$.

12. $l = 0 \cdot \infty$. Eseguiamo il cambio di variabile: $x = e^y$, quindi:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{y \rightarrow 0} y \ln(e^y - 1) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(e^y - 1)}{y^{-1}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 e^y}{e^y - 1} \\ &\stackrel{H}{=} -\lim_{y \rightarrow 0} (2y + y^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$13. l = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$14. l = 0^0 = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^\lambda, \lambda = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^- \implies l = e^{0^-} = 1^-$$

$$15. l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^{1/6} - 1}{x^{2/3}}}{\frac{-3x^{1/6} + 5\sqrt{x} - 2}{x^{2/3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2 + 5x^{1/6} + 5\sqrt{x}} = \frac{1}{12}$$

$$16. l = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = \infty^0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^\lambda; \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \implies l = e^{0^+} = 1^+$$

$$17. l = 0^0; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{4 + \ln x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{4 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4x + 1} = 2 \implies l = e^2$$

$$18. l = 0^0; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x = 0 \cdot \infty = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \right) = 0 \implies l = 1$$

$$19. l = 0^0; l = e^\lambda; \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 1} [\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(1-x)] = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x)}{[\cos(\frac{\pi x}{2})]^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{H}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}{1-x} \cdot \frac{1}{\sin(\frac{\pi x}{2})} \right] = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}{1-x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} -\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x) = 0 \implies l = 1$$

$$20. l = 1^\infty; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax^2 + bx + 1)}{ax^2 + bx} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx)(ax^2 + bx + 1)} = b \implies l = e^b$$

$$21. l = 1^\infty; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = -1 \implies l = \frac{1}{e}$$

$$22. l = \infty^0; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^- \implies l = e^{0^-} = 1^-$$

$$23. l = 1^\infty; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\tan \frac{\pi x}{2})}{\cot(\frac{\pi x}{2})} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} \sin^2(\frac{\pi x}{2})}{-\frac{\pi}{2} \sin^2(\frac{\pi x}{2})} = -1 \implies l = \frac{1}{e}$$

$$24. l = \infty^0; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x \sin x} = -1 \implies l = -\frac{1}{e}$$

$$25. l = \infty^0; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \tan x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \ln x = 0 \cdot \infty = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0 \implies l = 1$$

26. $l = \infty^0$; $l = e^\lambda$, $\lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln(\cot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cot x)}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 \implies l = 1$
27. $l = \infty^0$; $l = e^\lambda$, $\lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln(\sin x)} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\cot x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = -1 \implies l = \frac{1}{e}$
28. $l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} a \lim_{x \rightarrow 0} e^{ax} = a$
29. $l = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2(x-1)} = -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \stackrel{H}{=} -\frac{\pi^2}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \cos \pi x = \frac{\pi^2}{2}$
30. $l = 1^\infty$; $l = e^\lambda$, $\lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = -\frac{1}{2}$, $l = \frac{1}{\sqrt{e}}$
31. $l_{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty^0$; $l_{+\infty} = e^{\lambda_{+\infty}}$,
 $\lambda_{+\infty} \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{ax-bx})}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a-be^{-ax}}{1-2xe^{-ax}} = a \implies l_{+\infty} = e^a$
 $l_{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{ax} - bx)^{\frac{1}{x}} = \infty^0$; $l_{-\infty} = e^{\lambda_{-\infty}}$; $\lambda_{-\infty} \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{ax-bx})}{x} =$
 $= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ae^{-ax}-b}{e^{-ax}-bx} = \frac{0-b}{+\infty} = -b \cdot 0^+ = 0^-$
 $l_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1^\infty$; $l_0 = e^{\lambda_0}$, $\lambda_0 \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{ax-bx})}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax}-b}{e^{ax}-bx} = a-b \implies l_0 = e^{a-b}$
32. $l = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2 \sin 2x}{12x^2} =$
 $= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{3}$
33. $l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x (\sin x - \cos x)}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{0} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
34. $l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{(\ln x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x \ln x}}{-\frac{1}{\ln^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^-$
35. $l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{2x}{1+x^4}}{3(1-\cos x)^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1+x^4) - 2x}{3(1-\cos x)^2 \sin x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{\sin x (1-\cos x)^2 (1+x^4)} =$
 $= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot \left(\frac{x^2}{1-\cos x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1+x^4} \right] = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{1+x^4} \right] = \frac{8}{3}$
36. $l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{1-x^2} = 2$
37. $l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3 \sin^2 x \cos x} = \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sin^2 x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x \sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sin^2 x} =$
 $= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2 \sin x \cos x} = -\frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) = -\frac{1}{6}$
38. $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[e^x(1-x) - 1] \cos^2 x}{(1-\cos^2 x)(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\sin^2 x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - e^x}{2 \sin x \cos x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} e^x = -\frac{1}{2}$

$$39. l = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2e^x}{1+2e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{2e^x(1+2e^{-x})} \right] \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \right) = 1$$

$$40. l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^-$$

$$41. l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\cos(x^{-1}))}{x^{-1}} \stackrel{H}{=} -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2};$$

ricordiamo che: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

$$42. l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$43. l = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\pi-2x}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\pi-x}{2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\sin x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cos x} =$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-\sin x} = -1$$

$$44. l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\arcsin x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(\arcsin x)^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\arcsin x)^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right) \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arcsin x = 0^-$$

$$45. l = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} = 0$$

$$46. l = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2 \cot^2 x}{x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cot^2 x + 2x^2 \cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\cot^2 x + x \cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + x \frac{\cos x}{\sin^3 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x \cos^2 x}{\sin^3 x} =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2 \cos 2x}{3 \sin^2 x \cos x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2 \cos 2x}{\sin^2 x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{3}$$

$$47. l = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2+\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-2+\cos x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2+\cos x}{x^4} =$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \stackrel{H}{=} \dots \stackrel{H}{=} \frac{1}{6}$$

$$48. l = 0^0; l = e^\lambda, \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|x|} \frac{d}{dx} |x|}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cos x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{|x|} \frac{d}{dx} |x| = 0 \implies l = 1$$

$$49. l = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x e^x}{e^x} = +\infty$$

$$50. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^{-1}} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{1+x^2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x(1+x)} = \frac{1}{2}$$

$$51. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos(ax) - a}{b \cos(bx) - b} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(ax) - 1}{(ax)^2} \cdot \frac{(bx)^2}{\cos(bx) - 1} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right] = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3}{b^3}$$

$$52. \text{Dall'es. 40: } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \implies l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \ln(1+x) + x}{(1+x) \sin x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 + \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 2$$

$$53. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x^2)} = 0$$

$$54. l = \infty^0 = e^\lambda; \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+a^x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \ln a \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{1+a^x}$$

$$= \ln a \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^x(a^{-x}+1)} = \ln a \implies l = e^{\ln a} = a$$

$$55. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos^2 x} + \frac{\tan x \cos x}{2\sqrt{\sin x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sin x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos^2 x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}{\frac{\sin x \cos^2 x + 2 \sin x}{2\sqrt{\sin x} \cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} \sin x \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x + 2 \sin x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} \sin x}{\sin x \cos^2 x + 2 \sin x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}{\frac{\sin x}{x} \cos^2 x + 2 \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$56. l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{1}{2}$$

$$57. l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{(x - \sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-(x - \sin x)^{-2} (1 - \cos x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)^2}{x(1 - \cos x)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(x - \sin x)^2}{x^3} \frac{x^2}{1 - \cos x} \right] =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)^2}{x^3} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x)(1 - \cos x)}{3x^2} = -\frac{4}{3} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$58. l = 0^0 = \lim_{x \rightarrow 0} a^{\log_a [(\sin x)^{1/\log_a x}]} = a^{\lim_{x \rightarrow 0} \log_a [(\sin x)^{1/\log_a x}]} = a^\lambda; \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \log_a [(\sin x)^{1/\log_a x}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(\sin x)}{\log_a x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\log_a e} \cdot x \cdot \log_a e \right) = 1 \implies l = a$$

$$59. l = \infty^0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\frac{1}{x})^{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\tan x \ln(\frac{1}{x})} = e^\lambda; \lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\cot x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{\sin x}{x} = 0 \implies l = 1$$

$$60. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} \sqrt{1+x} - e}{x^2} = \frac{0}{0}. \text{ Calcoliamo la derivata del numeratore:}$$

$$f(x) = (1+x)^{1/x} \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}$$

$$\ln f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+x) \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x(x+2) - 2(1+x) \ln(1+x)}{2x^2(1+x)} \implies$$

$$\implies f'(x) = f(x) \frac{x(x+2) - 2(1+x) \ln(1+x)}{2x^2(1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}}{x^2} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2) - 2(1+x) \ln(1+x)}{2x^2(1+x)} \right] = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2) - 2(1+x) \ln(1+x)}{4x^3(1+x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{4} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2) - 2(1+x) \ln(1+x)}{x^3} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = \frac{e}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 2(1+x) \ln(1+x)}{x^3} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \ln(1+x)}{3x^2} = \\
&\frac{0}{0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{2}{1+x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x)} = \frac{e}{12}
\end{aligned}$$

61. Determiniamo l_- ; eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = \tan x,$$

quindi:

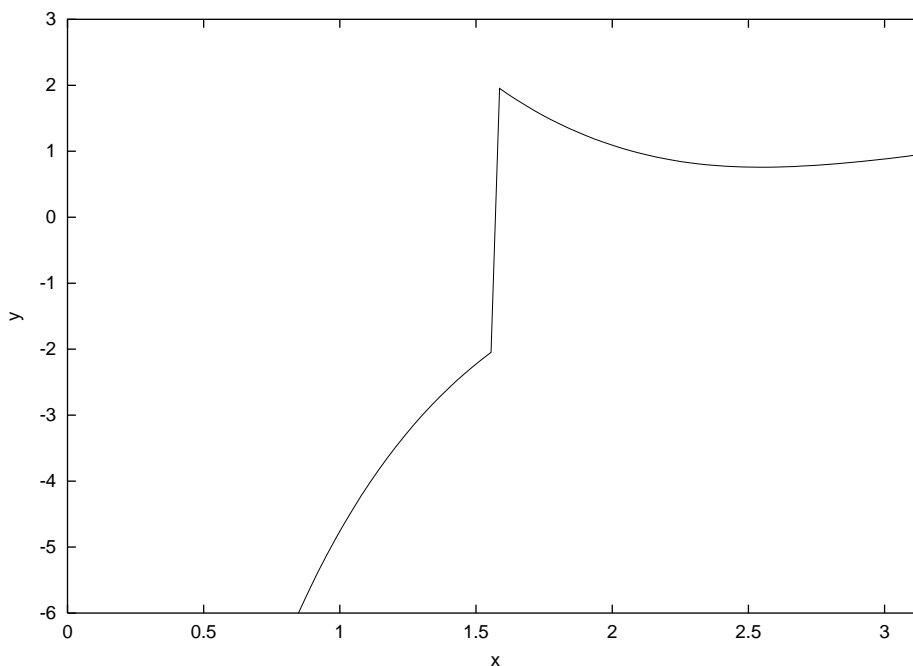
$$l_- = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y), \quad \text{con } f(y) = \sqrt{1+y+y^2} e^{\pi-2 \arctan y}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
l_- &= 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{\pi-2 \arctan y}}{\sqrt{1+y+y^2}} \\
&= \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} -4 \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(1+y+y^2)^{3/2}}{2y^3 + y^2 + 2y + 1} \right] \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\pi-2 \arctan y} \right) \\
&= -4 \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(1+y^{-1}+y^{-2})^{3/2}}{2+y^{-1}+2y^{-2}+y^{-3}} \right] \\
&= -4 \cdot \frac{1}{2} = -2
\end{aligned}$$

Il limite destro è:

$$\begin{aligned}
l_+ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 - e^{\pi-2x}}{(1 + \tan x + \tan^2 x)^{-1/2}} \\
&= \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} 4 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi-2x}}{\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \right) (1 + \tan x + \tan^2 x)^{-3/2}} \\
&= 4 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\frac{(1 + \tan x + \tan^2 x)^{3/2}}{\cos x + 2 \sin x} \cdot \cos^3 x \right] \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x (1 + \tan x + \tan^2 x)^{3/2} = 0 \cdot \infty \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\cos^2 x + \frac{\sin 2x}{2} + \sin^2 x \right)^{3/2} \\
&= +2
\end{aligned}$$



Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = +2, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2$$

Si conclude che la funzione $f(x)$ presenta in $x_0 = \pi/2$ una **discontinuità di prima specie**. Come vedremo più avanti tale locuzione si riferisce alla circostanza secondo cui la funzione non è continua in x_0 . Incidentalmente, essa è ivi non regolare, esistendo i due limiti sinistro e destro, ma con valori diversi. La grandezza:

$$s(x_0) = l_+ - l_- = 4,$$

esprime il **salto** della funzione in x_0 . Il grafico della funzione è riportato in figura 61, in cui è visibile la discontinuità.

62. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, tuttavia non è conveniente applicare direttamente la regola di De l'Hospital, se non dopo alcune manipolazioni. Più precisamente:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt[4]{1 - \cos x}} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{\frac{x^2}{1 - \cos x}} \right) \end{aligned}$$

Il limite del secondo termine tra parentesi vale $\sqrt[4]{2}$, per cui eseguendo il cambio di

variabile $x \rightarrow y = \sqrt{x}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt[4]{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2^y - 1}{y} \\ &\stackrel{H}{=} \sqrt[4]{2} \ln 2 \lim_{x \rightarrow 0} 2^x \\ &= \sqrt[4]{2} \ln 2 \end{aligned}$$

63. $l = 1^\infty$; $l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{\ln(2 \sin^2 x)^{1/\cos 2x}} = e^\lambda$;

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \sin^2 x)}{\cos 2x} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \sin^2 x} = -1 \implies l = \frac{1}{e}$$

64. $l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 - \tan^2 x)}{(\pi - 4x)^{-1}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{2 \tan x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1 - \tan^2 x}}{4(\pi - 4x)^{-2}} = -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} \right) \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\pi - 4x)^2}{1 - \tan^2 x} \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\pi - 4x)^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-8(\pi - 4x)}{-2 \frac{\tan x}{\cos^2 x}} = 4 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\pi - 4x) \cos^2 x}{\tan x} = 0$

65. Eseguiamo il cambio di variabile: $x \rightarrow y = 1 - x$:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln [1 + \pi - 4 \arctan (1 - y)]}{\sin y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln [1 + \pi - 4 \arctan (1 - y)]}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln [1 + \pi - 4 \arctan (1 - y)]}{y} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln (1 + \pi - 4 \arctan x)}{1 - x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(1 + x^2)(1 + \pi - 4 \arctan x)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

66. $l = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} 2 \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}{1 + x^2} = \frac{1}{4}$

2 Infinitesimi ed infiniti (parte seconda)

2.1 Parte principale di un infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi in x_0 . Supponiamo che $f(x)$ sia di ordine non inferiore a $g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

Si definisce **parte principale prima** dell'infinitesimo $f(x)$ la funzione così definita:

$$p_1(x) = \lambda_1 g(x), \quad (63)$$

identicamente non nulla se e solo se f e g sono dello stesso ordine. Nel caso contrario (cioè f è di ordine superiore a g), risulta $\lambda_1 g(x) \equiv 0$, poiché è $\lambda_1 = 0$.

Poniamo:

$$f_1(x) = f(x) - \lambda_1 g(x) \quad (64)$$

La funzione f_1 è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda_1 = 0$$

Dalla (64):

$$f(x) = \underbrace{\lambda_1 g(x)}_{\text{p.p.}} + \underbrace{f_1(x)}_{\text{infin. sup.}} \quad (65)$$

La (65) esprime lo sviluppo dell'infinitesimo $f(x)$ in termini della sua parte principale e di un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

Supponiamo che l'infinitesimo $f_1(x)$ di ordine superiore a $g(x)$, sia di ordine non inferiore a $[g(x)]^2$; ciò implica:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} = \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (66)$$

Si definisce **parte principale seconda** dell'infinitesimo $f(x)$ la funzione:

$$p_2(x) = \lambda_2 g(x)^2 \quad (67)$$

Poniamo:

$$f_2(x) = f_1(x) - \lambda_2 g(x)^2 = f(x) - \lambda_1 g(x) - \lambda_2 g(x)^2 \quad (68)$$

La funzione $f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g(x)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} - \lambda_2 = 0$$

Dalla (68) otteniamo lo sviluppo dell'infinitesimo $f(x)$ in termini della sua parte principale prima, della sua parte principale seconda e di un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^2$:

$$f(x) = \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + f_2(x) \quad (69)$$

Possiamo definire una **parte principale terza** dell'infinitesimo $f(x)$, confrontando $f_2(x)$ con $[g(x)]^3$ (nell'ipotesi in cui $f_2(x)$ sia di ordine non inferiore a $[g(x)]^3$):

$$p_3(x) = \lambda_3 g(x)^3; \quad \mathbb{R} \ni \lambda_3 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g(x)^3}$$

Definiamo:

$$f_3(x) = f_2(x) - \lambda_3 g(x)^3$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_3(x)}{g(x)^3} = 0$$

Otteniamo quindi lo sviluppo dell'infinitesimo $f(x)$ in termini della sua parte principale prima, della sua parte principale seconda, della sua parte principale terza e di un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^3$:

$$f(x) = \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + \lambda_3 g(x)^3 + f_3(x) \quad (70)$$

Tale procedimento può essere iterato, pertanto la (70) si scrive:

$$f(x) = \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + \dots \lambda_n g(x)^n + f_n(x) \quad (71)$$

Qui la funzione $f_n(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^n$. Per esprimere ciò, è consuetudine scrivere la (71) nella forma:

$$f(x) = \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + \dots \lambda_n g(x)^n + O[g(x)^{n+1}], \quad (72)$$

dove $O[g(x)^{n+1}]$ è un termine dello stesso ordine di $[g(x)]^{n+1}$.

2.1.1 Esempi

Assegnati i due infinitesimi in $x_0 = 1$:

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = x - 1$$

Abbiamo:

$$\lambda_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

Quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine, e la parte principale prima di $f(x)$ è $p_1(x) = 2(x-1)$. La funzione (64) è:

$$f_1(x) = x^2 - 1 - 2(x-1) = (x-1)^2$$

Determiniamo il limite λ_2 :

$$\lambda_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} = 1$$

Quindi la parte principale seconda è:

$$p_2(x) = (x-1)^2$$

La funzione (68):

$$f_2(x) = f_1(x) - p_2(x) \equiv 0$$

Si conclude che lo sviluppo di $f(x)$ è:

$$x^2 - 1 = \underbrace{2(x-1)}_{\text{p.p. prima}} + \underbrace{(x-1)^2}_{\text{infin. sup.}}$$

Assegnati i due infinitesimi in $x_0 = 1$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+x^2}{2}\right); \quad g(x) = 1-x,$$

determinare la parte principale prima e la parte principale seconda di f .
Soluzione.

Il limite λ_1 è:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln\left(\frac{x+x^2}{2}\right)}{1-x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+2x}{x+x^2} \\ &= -\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

per cui la parte principale di f è:

$$\lambda_1 g(x) = -\frac{3}{2}(1-x)$$

La funzione $f_1(x)$ definita dalla (64) è:

$$f_1(x) = \ln\left(\frac{x+x^2}{2}\right) + \frac{3}{2}(1-x)$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln\left(\frac{x+x^2}{2}\right) + \frac{3}{2}(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{3}{2}}{x-1} \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)(x^2+x)} \\ &= -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

Quindi la parte principale seconda di f è:

$$\lambda_2 g(x)^2 = -\frac{5}{8}(1-x)^2$$

Si conclude che la decomposizione di f in parti principali è:

$$f(x) = -\frac{3}{2}(1-x) - \frac{5}{8}(1-x)^2 + f_3(x)$$

Qui $f_3(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(1-x)^2$. Utilizzando la convenzione (71), l'ultima equazione va scritta come:

$$f(x) = -\frac{3}{2}(1-x) - \frac{5}{8}(1-x)^2 + O[(1-x)^3]$$

Assegnati gli infinitesimi nel limite per $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

determinare: parte principale prima, parte principale seconda e parte principale terza dell'infinitesimo $f(x)$ rispetto all'infinitesimo $g(x)$, scrivendo quindi il corrispondente sviluppo di f .

Soluzione

Determinamo il limite:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{0}{0} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \end{aligned}$$

Quindi la parte principale prima di f è:

$$\lambda_1 g(x) = \frac{1}{x}$$

La funzione $f_1(x)$ è:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) - \lambda_1 g(x) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Il limite λ_2 :

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Quindi la parte principale seconda è identicamente nulla, giacché la funzione $f_1(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^2$:

$$p_2(x) \equiv 0$$

Ciò implica che la funzione $f_2(x)$ è:

$$f_2(x) \equiv f_1(x)$$

Calcoliamo il limite λ_3 :

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{g(x)^3} & (73) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{3}{x^4}} \\
&= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Dalla (73) segue:

$$p_3(x) = -\frac{1}{3x^3}$$

La funzione $f_3(x)$:

$$f_3(x) = f_2(x) - p_3(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}$$

Pertanto lo sviluppo di $f(x)$ si scrive:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + f_3(x),$$

con $f_3(x)$ infinitesimo di ordine superiore a x^{-3} . Utilizzando la convenzione (71), l'ultima equazione va scritta come:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (74)$$

2.2 Determinazione dell'ordine di un infinitesimo/infinito

2.2.1 Esercizi proposti

1. Assegnata la funzione:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}},$$

verificare che è un infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$, determinando poi il suo ordine.

2. Applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sin x (\cos x - 1) - \tan^3 x}{\sqrt{\sin x} + x^2 \cos x + x \cdot \ln(1+x)}$$

3. Determinare nel limite per $x \rightarrow 0^+$ l'ordine del seguente infinitesimo:

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

4. Determinare nel limite per $x \rightarrow 1$ l'ordine del seguente infinitesimo:

$$f(x) = \ln x$$

5. Determinare nel limite per $x \rightarrow 1$ l'ordine del seguente infinitesimo:

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)^4 + x^5 + \sqrt{x} \sin^3 x}{\sin x + 7x^4}$$

6. Si consideri nel limite per $x \rightarrow +\infty$, l'infinitesimo:

$$f(x) = (x^n + 1)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}},$$

con λ parametro reale.

Determinare per quale valore di λ tale infinitesimo è di ordine massimo.

7. Si consideri nel limite per $x \rightarrow 0$ l'infinitesimo:

$$f(x) = 1 - \cos x + \lambda \sin^2 x$$

Determinare il valore del parametro reale λ tale che f sia di ordine superiore al secondo.

8. Assegnata la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^5}{x + \sin x}},$$

verificare che è infinitesima in $x_0 = 0$, determinando poi il suo ordine.

9. Confrontare le seguenti coppie di infinitesimi (in $x_0 = 0$):

a $f(x) = x - \ln(1+x)$; $g(x) = 1 - \cos x$

b $f(x) = x - \sin x$; $g(x) = \tan^2 x - \sin^2 x$

c $f(x) = x \sin x$; $g(x) = 1 - \cos x$

d $f(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$; $g(x) = \tan x - x$

10. Calcolare i seguenti limiti:

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x^4 + \cos x \sin^2 x}{x + x \tan x + \sin x \tan^2 x}$

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \tan^2 x + \sqrt{x} \sin^2 x}{x + x^2 \cos^2 x - \tan^3 x}$

c $f(x) = x \sin x$; $g(x) = 1 - \cos x$

d $f(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$; $g(x) = \tan x - x$

2.2.2 Soluzioni

N. 1

Il limite per $x \rightarrow 0^+$ si calcola facilmente con la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \underset{H}{=} 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2/3}}{1+x} = 0$$

Assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$, abbiamo che se f è dotato di ordine, esso deve verificare la condizione:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha \sqrt[3]{x}} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha \sqrt[3]{x}} \underset{H}{=} \frac{3}{3\alpha + 1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{2}{3}-\alpha}}{x+1} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{2}{3}$$

Si conclude che $f(x)$ è di ordine $2/3$. Più precisamente, per $x \rightarrow 0^+$ è $f(x) \sim g(x)$, giacché è $l = 1$. Quindi nel limite per $x \rightarrow 0^+$, $f(x)$ si comporta come $x^{2/3}$.

N. 2

Il limite può essere scritto come:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)},$$

essendo:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad f_1(x) = \sin x (\cos x - 1) - \tan^3 x$$

$$g(x) = \sqrt{\sin x}, \quad g_1(x) = x^2 \cos x + x \cdot \ln(1+x)$$

Si tratta di dimostrare che $f_1(x)$ e $g_1(x)$ sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a $f(x)$, $g(x)$ rispettivamente. Iniziamo con la coppia di infinitesimi $f(x)$, $f_1(x)$. La funzione $f(x)$ è manifestamente un infinitesimo di ordine $\alpha = 2/3$; determiniamo l'ordine di $f_1(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x (\cos x - 1) - \tan^3 x}{x^{\alpha_1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin x}{x^{\alpha_1-2}} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{\tan^3 x}{x^{\alpha_1}} \right] = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha_1 - 2 = 1 \iff \alpha_1 = 3$$

Quindi al numeratore possiamo trascurare $f_1(x)$. Passiamo alla coppia $g(x)$, $g_1(x)$. È facile rendersi conto che $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $\beta = 1/2$. La funzione $g_1(x)$ invece è tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cos x + x \cdot \ln(1+x)}{x^{\beta_1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^{2-\beta_1} \cos x + \frac{\ln(1+x)}{x^{\beta_1-1}} \right]$$

Questo limite è una quantità finita non nulla se, e solo se $\beta_1 = 2$. Ciò implica che $g_1(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$. Quindi il limite proposto è:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{\sin x}} = 0$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $\alpha = 2/3$, $\beta = 2$.

N. 3

Il limite si calcola facilmente con la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \stackrel{H}{=} \frac{2}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 2$$

N. 4

Qui l'infinitesimo di riferimento è $u(x) = x - 1$, donde l'ordine α di $\ln x$ è tale che esiste finito e diverso da zero il limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^\alpha} \\ = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{1-\alpha}}{x} \neq 0 \iff \alpha = 1 \end{aligned}$$

N. 5

Per determinare l'ordine di f è conveniente utilizzare alcune proprietà degli infinitesimi. Precisamente, sia ϕ è infinitesimo in x_0 esprimibile come:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^N \phi_k(x),$$

essendo ϕ_k N infinitesimi di ordine β_k rispettivamente. È facile convincersi che l'ordine di ϕ è

$$\beta = \min_{k \in \mathcal{N}} \{\beta_k\}, \text{ con } \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\} \quad (75)$$

Nel nostro caso è:

$$f(x) = \frac{\phi(x)}{\eta(x)}$$

Qui è:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{k=1}^3 \phi_k(x); \quad \eta(x) = \sum_{k=1}^2 \eta_k(x) \\ \phi_1(x) &= (1 - \cos x)^4, \quad \phi_2(x) = x^5, \quad \phi_3(x) = \sqrt{x} \sin^3 x \\ \eta_1(x) &= \sin x, \quad \eta_2(x) = 7x^4 \end{aligned}$$

Determiniamo gli ordini dei singoli infinitesimi.

Infinitesimo	Ordine
$\phi_1(x)$	$\beta_1 = 8$
$\phi_2(x)$	$\beta_2 = 5$
$\phi_3(x)$	$\beta_3 = 7/2$

Giustificiamo la tabella. ϕ_1 è di ordine 8 in quanto $1 - \cos x$ è di ordine 2; β_2 è banale; $\phi_3(x)$ è tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^{\frac{\beta_3-1}{3}-\frac{1}{6}}} \right)^3 \neq 0 \iff \beta_3 = \frac{7}{2}$$

Per la (75) è $\beta = 7/2$. Passiamo a η .

Infinitesimo	Ordine
$\eta_1(x) = \sin x$	$\gamma_1 = 1$
$\eta_2(x) = 7x^4$	$\gamma_2 = 4$

Quindi: $\gamma = 1$. Trattandosi di un rapporto, l'ordine di f è $\alpha = \beta - \gamma = 5/2$.

N. 6

Riscriviamo la funzione:

$$f(x) = (x^n + 1)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}$$

Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = \frac{1}{x}$$

Quindi l'ordine di f è tale che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x^n)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}}{\frac{1}{x^\alpha}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(x^n + 1)^{\frac{1}{1+\lambda^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{\alpha(1+\lambda^2)}}{(x^n + 1)} \right]^{\frac{1}{1+\lambda^2}} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha(1+\lambda^2)}}{(x^n + 1)} \right]^{\frac{1}{1+\lambda^2}} \\ &= l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha(1 + \lambda^2) = n \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio fornisce l'ordine di f in funzione del parametro λ .

$$\alpha(\lambda) = \frac{n}{1 + \lambda^2}$$

Evidentemente:

$$\alpha_{\max} = \alpha(0) = n$$

Si conclude che il valore di λ che massimizza l'ordine di f è $\lambda = 0$.

N. 7

Il valore richiesto è soluzione di:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \lambda \sin^2 x}{x^2} = 0$$

Risolvendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lambda \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{2}$$

N. 8

Il limite per $x \rightarrow 0$ è:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^5}{x + \sin x}} \\ &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{1 + \frac{\sin x}{x}}} = 0 \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} [f(x)]^3 &= f_1(x) + f_2(x) \\ f_1(x) &= x^3 + x^5 \\ f_2(x) &= x + \sin x \end{aligned}$$

Gli ordini di f_1 e f_2 sono rispettivamente $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, quindi l'ordine di f^3 è $\alpha_1 - \alpha_2 = 2$, da cui l'ordine di f è $\alpha = 2/3$.

N. 9

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)(1+\sin x)} = 0 \implies f$ è un infinitesimo di ordine superiore a g .

b. Calcoliamo il limite del rapporto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \cos^2 x}{\sin^4 x}$$

Il numeratore è un infinitesimo di ordine 3, mentre il denominatore è di ordine 4. Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$.

c. Determiniamo separatamente gli ordini dei due infinitesimi.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} &\stackrel{H}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^{\alpha-1}} \\ &\stackrel{H}{=} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^{\alpha-2}} \\ &\neq 0 \iff \alpha = 4 \end{aligned}$$

Passiamo all'infinitesimo g .

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^\beta} \\
& \stackrel{\text{H}}{=} \frac{1}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^{\beta-1} \cos^2 x} \\
& \stackrel{\text{H}}{=} -\frac{1}{\beta} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^{\beta-1}} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} \right) \\
& \neq 0 \iff \beta = 3
\end{aligned}$$

Si conclude che in $x_0 = 0$ la funzione $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

N. 10

Poniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x^4 + \cos x \sin^2 x}{x + x \tan x + \sin x \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)},$$

essendo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x, \quad f_1(x) = x^4 + \cos x \sin^2 x \\
g(x) &= x, \quad g_1(x) = x \tan x + \sin x \tan^2 x
\end{aligned}$$

f_1 e g_1 sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a f e g rispettivamente, quindi per il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x^4 + \cos x \sin^2 x}{x + x \tan x + \sin x \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3$$

N. 11

Poniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + \tan^2 x + \sqrt{x} \sin^2 x}{x + x^2 \cos^2 x - \tan^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)},$$

essendo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x}, \quad f_1(x) = \tan^2 x + \sqrt{x} \sin^2 x \\
g(x) &= x, \quad g_1(x) = x^2 \cos^2 x - \tan^3 x
\end{aligned}$$

f_1 e g_1 sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a f e g rispettivamente, quindi per il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + \tan^2 x + \sqrt{x} \sin^2 x}{x + x^2 \cos^2 x - \tan^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

2.3 Complementi

Nella sezione 1.4 abbiamo introdotto la nozione di infinitesimo (e di infinito) non dotato di ordine, definendo poi gli infinitesimi di ordine infinitamente grande/piccolo (analoghe definizioni per gli infiniti). Un'applicazione diretta della regola di De L'Hospital ci permette di dimostrare le seguenti proposizioni.

Theorem 4 Sia $\lambda \in (0, +\infty)$. La funzione $f_1(x) = e^{\lambda x}$ è per $x \rightarrow +\infty$ un infinito di ordine infinitamente grande. La funzione $f_2(x) = e^{-\lambda x}$ è per $x \rightarrow +\infty$ un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

Proof. Assumiamo come infinito di riferimento $v(x) = x$, quindi preso $n \in \mathbb{N}$, calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^n} \quad (76)$$

Il limite 76 si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, per cui applicando n volte la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^n} \stackrel{H}{=} \frac{\lambda}{n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^{n-1}} = \frac{\lambda^2}{n(n-1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^{n-2}} = \dots \stackrel{H}{=} \frac{\lambda^n}{n!} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\lambda x} = +\infty$$

In forza dell'arbitrarietà di n :

$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^n} = +\infty \right) \implies$ per $x \rightarrow +\infty$, $e^{\lambda x}$ è un infinito di ordine infinitamente grande.

La funzione $f_2(x)$ è per $x \rightarrow +\infty$, un infinitesimo. Assumiamo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x^{-1}$. Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{u(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x^{-n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

In forza dell'arbitrarietà di n :

$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x^n} = +\infty \right) \implies$ per $x \rightarrow +\infty$, $e^{-\lambda x}$ è un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

Corollary 5 La funzione $f_1(x) = e^{\lambda x}$ è per $x \rightarrow -\infty$, un infinitesimo di ordine infinitamente grande; la funzione $f_2(x) = e^{-\lambda x}$ è per $x \rightarrow -\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande

Proof. Nel caso di $f_1(x)$, assumiamo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x^{-1}$. Eseguiamo la sostituzione $x \rightarrow y = -x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^{-n}} = \frac{1}{(-1)^{-n}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda y}}{y^{-n}} = 0,$$

ciò dimostra l'asserto, essendo n un arbitrario intero naturale.

Nel caso di $f_2(x)$ assumiamo come infinito di riferimento $v(x) = x$. Sotto la sostituzione $x \rightarrow y = -x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x^n} = \frac{1}{(-1)^n} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda y}}{y} = +\infty,$$

donde l'asserto.

Un caso interessante è offerto dal comportamento agli estremi del proprio insieme di definizione, della funzione logaritmo. Precisamente, abbiamo i seguenti teoremi:

Theorem 6 Per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$ la funzione $f(x) = \ln x$ è un infinito di ordine infinitamente piccolo.

Proof.

Esaminiamo prima il comportamento per $x \rightarrow 0^+$, assumendo come infinito di riferimento $v(x) = x^{-1}$. Fissiamo ad arbitrio un intero naturale n :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{v(x)^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{n+1}}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = 0,$$

donde l'asserto.

Passiamo al limite per $x \rightarrow +\infty$, assumendo come infinito di riferimento $v(x) = x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{v(x)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

donde l'asserto.

Corollary 7 Per $x \rightarrow 0^+$ la funzione $f(x) = x \ln x$ è un infinitesimo non dotato di ordine. Più precisamente, è di ordine minore di 1 e maggiore α , per ogni $\alpha \in (0, 1)$. Per $x \rightarrow +\infty$ la funzione $f(x) = x \ln x$ è un infinito non dotato di ordine. Più precisamente, è di ordine maggiore di 1 e minore di α , per ogni $\alpha > 1$.

Proof. Dimostriamo innanzitutto che $f(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Quindi assumiamo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{u(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

cioè $f(x)$ è un infinitesimo di ordine minore di 1. D'altro canto, preso arbitrariamente $\alpha \in (0, 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = 0 \tag{77}$$

La (77) è verificata $\forall \alpha \in (0, 1)$ e ciò dimostra la seconda parte dell'asserto per $x \rightarrow 0^+$. Passiamo al limite per $x \rightarrow +\infty$, iniziando osservando banalmente che $f(x)$ è ivi un infinito. Assumiamo come infinito di riferimento $v(x) = x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

cioè $f(x)$ è un infinito di ordine maggiore di 1. D'altro canto, se α è un arbitrario numero reale maggiore di 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0,$$

donde l'asserto.

Theorem 8 *Siano*

$$f(x) = x \ln x, \quad g(x) = x \ln x \cdot \ln \ln x$$

Risulta: per $x \rightarrow +\infty$, $g(x)$ è un infinito di ordine superiore a $f(x)$. Inoltre, $g(x)$ è un infinito non dotato di ordine. È di ordine maggiore di 1, e minore di α , per ogni $\alpha > 1$

Proof. La prima parte si dimostra banalmente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \ln x = +\infty$$

Per la seconda parte, preso $\alpha > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha-1}} \stackrel{H}{=} \frac{1}{\alpha-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln \ln x}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{(\alpha-1)^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1} \ln x} = 0$$

Il teorema appena dimostrato si generalizza al sistema delle tre funzioni seguenti:

$$f(x) = x \ln x, \quad g(x) = x \ln x \cdot \ln \ln x, \quad h(x) = x \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x$$

Qui $h(x)$ è un infinito (per $x \rightarrow +\infty$) di ordine superiore rispetto a $g(x)$ e a sua volta quest'ultima è un infinito di ordine superiore rispetto a $f(x)$. Inoltre, $f(x), g(x), h(x)$ sono infiniti non dotati di ordine che è maggiore di 1 e minore di un qualunque $\alpha > 1$. Iterando il procedimento costruiamo una classe di infiniti:

$$x \ln x, \quad x \ln x \cdot \ln \ln x, \dots, \quad x \ln x \cdot \dots \cdot \ln \ln \dots \ln x, \dots$$

ciascuno dei quali è di ordine superiore rispetto al precedente e non è dotato di ordine che è maggiore di 1 e minore di un qualunque $\alpha > 1$.

3 Le funzioni continue

3.1 Introduzione

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$. Si consideri x_0 punto di accumulazione al finito per X . Se la funzione è convergente in x_0 , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \tag{78}$$

Il numero reale l non è legato al valore $f(x_0)$ assunto dalla funzione in x_0 , anzi la funzione può anche essere ivi non definita. Peraltro, esiste una speciale classe di funzioni per le quali risulta $f(x_0) = l$. Sono le cosiddette **funzioni continue** e nel caso in esame, diremo che la funzione $f(x)$ è **continua in x_0** , donde la (78) si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (79)$$

Ricordando la definizione di limite:

$$(f(x) \text{ è continua in } x_0) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall J(f(x_0)), \exists I(x_0) : x \in X \cap I(x_0) \implies f(x) \subset J(f(x_0))), \quad (80)$$

essendo J, I due intorni di $f(x_0)$ e x_0 rispettivamente. La (80) può essere riscritta in termini dei raggi dei suddetti intorni:

Definition 9

$$(f(x) \text{ è continua in } x_0) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (81)$$

Notation 10 La definizione (80) è banalmente verificata nel caso in cui x_0 sia un punto isolato di X . Infatti, in tal caso esiste un intorno $I_0(x_0) : X \cap I_0(x_0) - \{x_0\} = \emptyset$, donde:

$$\forall J(f(x_0)), \exists I_0(x_0) : x \in X \cap I_0(x_0) \implies f(x) = f(x_0) \subset J(f(x_0))$$

L'Osservazione 9 implica che la definizione di continuità si estende a qualunque $x \in X$, quindi sussiste la

Definition 11 $(f(x) \text{ è continua in } X) \stackrel{\text{def}}{\iff} (f(x) \text{ è continua in ogni } x \in X)$

Introduciamo una grandezza denominata **oscillazione** della funzione $f(x)$ in X .

Definition 12 Si definisce **oscillazione** di $f(x)$ in X il numero reale $\omega(f, X)$:

$$\omega(f, X) = \sup_{x', x'' \in X} |f(x') - f(x'')| \quad (82)$$

Ciò premesso, sussiste il seguente:

Theorem 13 Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(x)$ sia continua in x_0 , è che preso un intorno $I_\delta(x_0)$, l'oscillazione $\omega(f, X \cap I_\delta(x_0))$ sia un infinitesimo nel limite $\delta \rightarrow 0$.

Proof. Dimostriamo la sufficienza della condizione.

Per ipotesi è:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) = 0,$$

cioè:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |\omega(f, X \cap I_\delta(x_0))| < \varepsilon \quad (83)$$

Per la (82):

$$x \in X \cap I_\delta(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \sup_{x', x'' \in X \cap I_\delta(x_0)} |f(x') - f(x'')| = \omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) < \varepsilon$$

Ciò implica:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X \cap I_\delta(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

cioè la (81).

Dimostriamo la necessità della condizione.

La continuità della funzione implica:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) : x', x'' \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) &\implies |f(x') - f(x'')| = \\ &= |f(x') - f(x_0) + f(x_0) - f(x'')| \leq \underbrace{|f(x') - f(x_0)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x_0) - f(x'')|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) : x', x'' \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) &\implies \\ \implies |f(x') - f(x'')| &\leq \sup_{x', x'' \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0)} |f(x') - f(x'')| = \omega(f, X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0)) < \varepsilon \end{aligned} \quad (84)$$

donde l'asserto.

3.2 Punti di discontinuità

Sia $f(x)$ definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione.

Definition 14 $f(x)$ è **discontinua** in x_0 se **non** risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (85)$$

In tal caso, chiamiamo x_0 **punto di discontinuità** della funzione.

Se $f(x)$ è discontinua in x_0 significa che sono possibili i seguenti casi:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0), l \in \mathbb{R}$
2. $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

Nel caso 1 si dice che x_0 è una **discontinuità eliminabile** (o **rimovibile**). Tale definizione si giustifica osservando che la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{per } x \neq x_0 \\ l, & \text{per } x = x_0 \end{cases}, \quad (86)$$

è continua in x_0 .

Nei casi 2 e 3, si dice che x_0 è una **discontinuità non eliminabile**.

Example 15 *Provare che la funzione*

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (87)$$

ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

Soluzione. La funzione (87) non è definita in $x = 0$. D'altro canto, sappiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

donde $x = 0$ è una singolarità eliminabile. La funzione:

$$\begin{aligned} g(x) &= x \sin \frac{1}{x}, \text{ per } x \neq 0 \\ g(x) &= 0, \text{ per } x = 0, \end{aligned}$$

è continua in $x = 0$.

Le discontinuità non eliminabili si classificano in:

- a. discontinuità di prima specie
- b. discontinuità di seconda specie

Esaminiamole separatamente.

3.2.1 Discontinuità di prima specie

In questo caso esistono finiti i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l^-, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l^+ \quad (88)$$

tali che:

$$l^\pm \in \mathbb{R}, \quad l^+ \neq l^-$$

La grandezza:

$$s(x_0) \stackrel{def}{=} l^+ - l^-, \quad (89)$$

si dice **salto di discontinuità** di $f(x)$. Se la funzione è definita in x_0 e risulta:

$$f(x_0) = \frac{l^+ + l^-}{2},$$

diremo che la discontinuità in x_0 è una **discontinuità simmetrica**.

Il grafico di una funzione che ha una discontinuità di prima specie nel punto x_0 , presenta un'interruzione in corrispondenza della retta di equazione $x = x_0$. Il salto $s(x_0)$ è la misura del segmento $\overline{P'_0 P''_0}$, essendo $P'_0(x_0, l^+)$, $P''_0(x_0, l^-)$. Nel caso di una discontinuità simmetrica, il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è il punto medio del segmento $\overline{P'_0 P''_0}$.

Example 16 *Mostrare che la funzione*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right),$$

ha in $x = 2$ una discontinuità di prima specie.

Soluzione. *Calcoliamo il limite destro e il limite sinistro:*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

donde l'asserto. Il salto di discontinuità è:

$$s(2) = \pi$$

Il grafico della funzione è riportato in figura 25

3.2.2 Discontinuità di seconda specie

Sono tutte e sole le discontinuità non eliminabili che non siano di prima specie. Quindi si verifica almeno una delle circostanze seguenti:

1. $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
2. $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
3. $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \mp\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

Se x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie, e ad esempio non esiste il limite destro di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$, in ogni intorno di x_0 la funzione compie infinite oscillazioni che non si smorzano. Infatti, solo in tal caso è violata la definizione di limite.

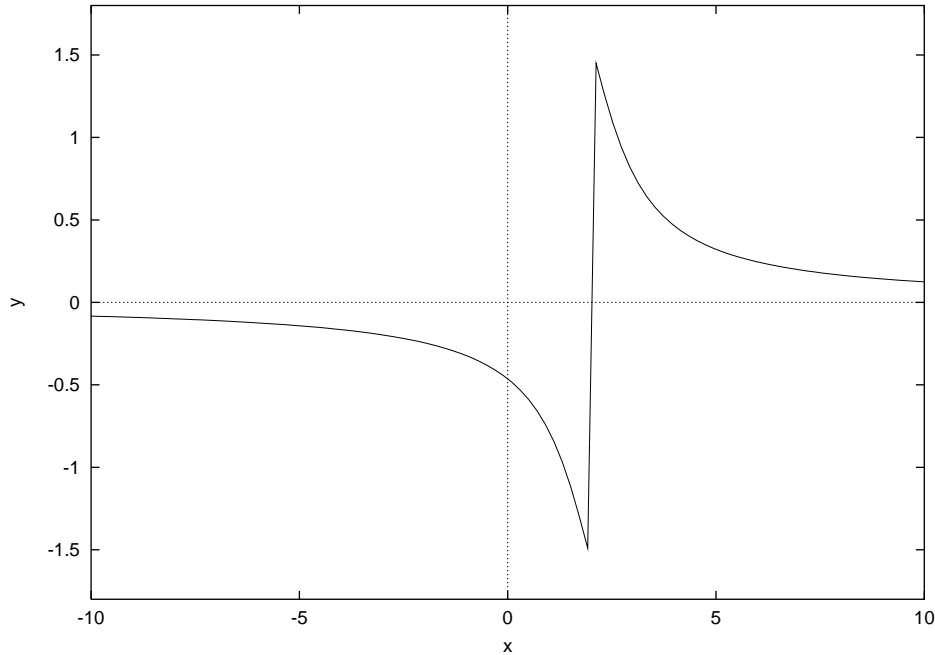


Figura 25: Grafico di $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$. Si noti la discontinuità di prima specie nel punto $x = 2$.

Example 17 *Mostrare che la funzione*

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad (90)$$

ha in $x = 0$ una discontinuità di seconda specie.

Soluzione. La funzione (90) non è definita in $x = 0$. Inoltre non esiste il limite per $x \rightarrow 0$, in quanto la funzione compie infinite oscillazioni intorno al punto $x = 0$ (si veda la fig. 7.).

Example 18 *Provare che la funzione*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \frac{1}{x}, \text{ per } x < 0 \\ f(x) &= \cos(200x), \text{ per } x > 0 \end{aligned} \quad (91)$$

ha in $x = 0$ una discontinuità di seconda specie.

Soluzione. La funzione è convergente a destra:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Il limite sinistro non esiste: per $x \rightarrow 0^-$ la funzione compie infinite oscillazioni che non si smorzano come possiamo vedere dal grafico di figura 26.

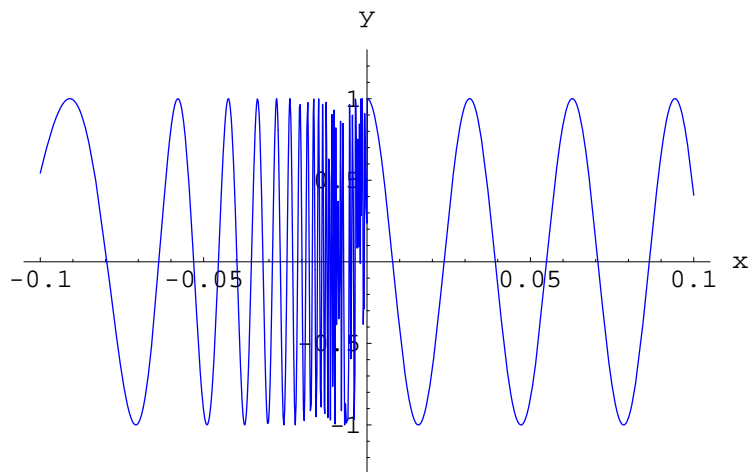


Figura 26: Grafico della funzione data dall'equazione (91).