

## 5. I modelli quasi-stazionari.

Dall'esempio è emerso un risultato abbastanza importante e senz'altro già noto dallo studio dei campi. La validità delle leggi di Kirchhoff è tanto più assicurata quanto più piccolo è il rapporto tra la lunghezza caratteristica del sistema in esame e la lunghezza d'onda associata - tramite la velocità della luce  $c$  - al tempo caratteristico dello fenomeno stesso. In regime dinamico quindi le leggi di Kirchhoff sono solo leggi approssimate. Cerchiamo di evidenziare più in dettaglio la natura di questa approssimazione. Dato che il rotore del campo elettrico  $\mathbf{E}$  non è nullo, l'integrale di linea dello stesso, tra i morsetti di un sistema come quello mostrato in Fig. 5.1, dipende dalla linea prescelta. Si avrà quindi:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A\gamma_1B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B\gamma_2A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.1)$$

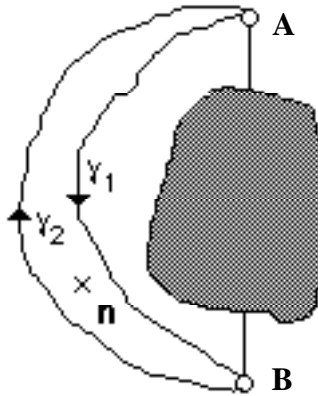


Fig.5.1. Tensione e differenza di potenziale ai morsetti di un bipolo.

Sotto questo aspetto, tale sistema potrà essere considerato una buona approssimazione di un bipolo se il termine legato alla variazione del flusso del campo magnetico è trascurabile rispetto all'integrale di linea del campo  $\mathbf{E}$  lungo una qualsiasi linea che si svolga tutta all'esterno della superficie che delimita il bipolo stesso.

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right| \gg \left| \frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right| \quad (5.2)$$

Analogamente per la non solenoidalità della densità di corrente, avremo che la corrente entrante in un morsetto differirà da quella uscente a causa del termine legato alla variazione del flusso della densità della corrente di spostamento:

$$I_1 - I_2 = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (5.3)$$

Anche in questo caso tutto ritorna a posto se è possibile trascurare tale contributo rispetto alla corrente entrante o uscente da uno dei morsetti.

$$|I| \gg \left| \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right| \quad (5.4)$$

In particolare questa condizione può essere scritta in maniera diversa se si considera che, essendo assunto trascurabile il flusso del vettore densità di corrente di spostamento, la circuitazione di  $\mathbf{H}$  dipende, naturalmente, dal solo flusso di  $\mathbf{J}$ :

$$\oint_{\gamma_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_{\gamma_c}} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.5)$$

Ne consegue che al posto di  $\mathbf{I}$  possiamo sostituire la circuitazione di  $\mathbf{H}$ .

$$\left| \oint_{\gamma_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \right| \gg \left| \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right| \quad (5.6)$$

In conclusione le condizioni che bisogna siano verificate perché anche in regime dinamico un sistema possa essere trattato, in una certa approssimazione, come un bipolo sono le seguenti:

$$|V| = \left| \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right| \gg \left| \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right| \quad (5.7)$$

$$|I| = \left| \oint_{\gamma_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \right| \gg \left| \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right| \quad (5.8)$$

dove  $\gamma$  è una linea generica - ma non troppo, come vedremo subito -, che va da un morsetto all'altro,  $S_{\gamma}$  è una superficie che si appoggia sulla linea chiusa che si ottiene chiudendo, appunto,  $\gamma$  con una linea qualsiasi che giace tutta sulla superficie che delimita il bipolo - superficie che abbiamo indicato con  $S$  - e  $\gamma_c$  è una linea chiusa che si concatena una sola volta con il bipolo stesso, come mostrato in Fig. 5.2:

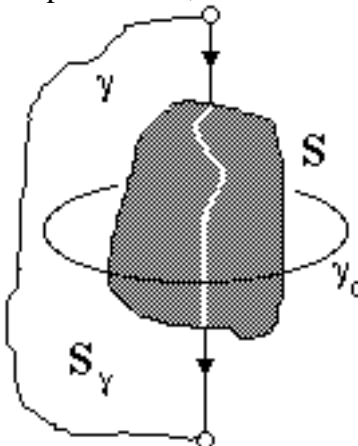


Fig. 5.2.  $\gamma_c$  è una linea chiusa che si concatena una sola volta con il bipolo

Vogliamo a questo punto valutare in quale campo dei parametri tali condizioni sono soddisfatte e quale è l'errore che si commette quando si accetta l'approssimazione che ne consegue. Per fare ciò utilizziamo una tecnica ben consolidata e di grande utilità quando occorre chiarire in quali condizioni alcuni termini di una equazione siano trascurabili rispetto ad altri e per trovare le relative soluzioni approssimate, tecnica che prevede tre passi successivi: *Analisi dimensionale* delle equazioni che descrivono il modello, *Riduzione in scala* delle variabili dipendenti ed indipendenti, e *Perturbazione*.

Cominciamo dal primo passo: è buona norma, quando si intende valutare il peso relativo dei diversi termini di una equazione, mettere l'equazione stessa in forma adimensionale. Questo è in realtà, a sua volta, il primo passo di una metodologia che va

sotto il nome di "Analisi Dimensionale". La grande forza di questa metodologia sta nel fatto che, quando si pone una equazione sotto forma adimensionale - introducendo nuove variabili ottenute dalle precedenti dividendo ognuna di esse per una grandezza di riferimento che abbia le stesse dimensioni - tali grandezze di riferimento, insieme con i parametri naturalmente presenti nella equazione originale, si trovano ad aggregarsi in un certo numero di "prodotti", che sono appunto detti "prodotti adimensionali". Una volta individuato un insieme di prodotti adimensionali completo, nel senso che ogni altro prodotto adimensionale è esprimibile come prodotto, a sua volta, di quelli dell'insieme completo, la relazione di partenza può essere espressa esclusivamente in funzione delle variabili adimensionali e dei prodotti dell'insieme completo.

Il fatto che nelle equazioni rese adimensionali compaiano particolari "prodotti adimensionali", e non altri, è già di per se molto significativo e l'analisi della natura dei prodotti adimensionali presenti è un potente strumento di approfondimento del fenomeno descritto dal modello matematico in esame. Esistono naturalmente teoremi e tecniche che consentono l'individuazione diretta dell'insieme di prodotti adimensionali più conveniente. L'equazione, una volta messa in forma adimensionale, consente generalmente deduzioni di portata insospettata. Così si esprimeva al riguardo Lord Reliaigh, che di questa tecnica faceva largo uso:

*"It happens not infrequently that results in the form of 'laws' are put forward as novelties on the basis of elaborate experiments, which might have predicted a priori after a few minutes consideration."*

Proviamo dunque ad adimensionalizzare le equazioni di Maxwell, che riscriviamo, per semplicità nel dominio della frequenza:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad (5.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \quad (5.10)$$

Aggiungiamo le equazioni costitutive, supponendo di essere in presenza di mezzi lineari:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{x})\mathbf{H} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}$$

Introduciamo, quindi, le diverse grandezze di riferimento

$L$  = riferimento per le lunghezze,

$E$  = riferimento per il campo elettrico,

$D$  = riferimento per il campo spostamento elettrico,

$B$  = riferimento per il campo d'induzione magnetica,

$H$  = riferimento per il campo magnetico,

$J$  = riferimento per la densità di corrente.

In tal modo i campi elettromagnetici e le coordinate spaziali  $\mathbf{x}$ , possono essere espresse in funzione delle grandezze dimensionali

$$\begin{cases} \mathbf{x} = L \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) = E \mathbf{e}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) = B \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) = H \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}) = D \mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}) = J \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) \end{cases} \quad (5.12)$$

e delle nuove variabili adimensionali  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{j}$ . Il secondo passo della metodologia proposta consiste nella riduzione in scala. Per poter decidere infatti, in quali condizioni i termini che vogliamo poter trascurare sono effettivamente trascurabili, sarebbe comodo che l'ordine di grandezza dei vari termini sia tutto nei parametri adimensionali e che le variabili, invece, siano di ordine di grandezza "unitario". E' evidente che ciò si può ottenere attraverso una opportuna scelta delle grandezze di riferimento, che, in questo modo, diventano grandezze *caratteristiche* del particolare fenomeno in esame. Se per esempio vogliamo che il campo elettrico adimensionale sia di ordine di grandezza unitario, basterà scegliere come campo elettrico caratteristico  $E$ , il valore medio quadratico del campo elettrico effettivo nella regione spaziale in considerazione, supponendo che i campi elettromagnetici non si discostino sensibilmente da tali valori medi. Naturalmente se la variabilità spazio temporale è molto ampia, non è detto che con una unica scelta dei valori delle grandezze caratteristiche sia possibile verificare le condizioni desiderate. Ma è d'altra parte evidente che, suddividendo il campo spazio-temporale in esame in un insieme di sottospazi sufficientemente piccoli, sarà sempre possibile, con una opportuna scelta delle grandezze caratteristiche, fare in modo che in ognuno di essi tutti i termini che contengono le variabili nelle nostre relazioni siano di ordine di grandezza unitario e che l'ordine di grandezza dei diversi termini sia, invece, confinato nelle particolari combinazioni dei prodotti adimensionali presenti. Che ciò sia sempre possibile, con una ragionevole suddivisione del campo spazio-temporale, è una caratteristica delle equazioni che descrivono fenomeni fisici, che va sotto il nome di proprietà di *ortodossia* delle variabili. Naturalmente vi sono casi in cui tale proprietà non è verificata, ma essi sono molto meno frequenti di quanto si possa pensare. Ciò che andremo a discutere varrà quindi per uno di tali sotto-domini.

La lunghezza  $L$  sarà inoltre la dimensione tipica che caratterizza il sistema in esame.

Notiamo immediatamente che, a causa delle (5.11) le quantità  $D$ ,  $J$ ,  $H$  dipendono da  $E$  e da  $B$ , perché, per esempio:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{d} = \varepsilon_{norm}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e} \\ D = \varepsilon_{ref} E \end{cases} \quad (5.13)$$

dove  $\varepsilon_{ref}$  è un valore di riferimento (costante) per la permittività elettrica tale che il valore normalizzato  $\varepsilon_{norm} = \varepsilon/\varepsilon_{ref}$  è di ordine 1. Una possibile scelta potrebbe essere  $\varepsilon_{ref} = \varepsilon_0$  (permittività del vuoto), cosicché  $\varepsilon_{norm} = \varepsilon_r$  (permittività relativa), se  $\varepsilon_r$  di ordine 1. Si noti il fatto che non è necessario che la relazione costitutiva sia lineare; ciò che è richiesto è che sia possibile definire  $\varepsilon_{ref}$  che mette in relazione  $D$  ed  $E$ , in modo tale che  $\mathbf{d}$  sia di ordine 1 quando  $\mathbf{e}$  è di ordine 1.

In modo simile abbiamo:

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{x})\mathbf{H} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b} = \mu_{norm}(\xi) \mathbf{h} \\ B = \mu_{ref} H \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{j} = \sigma_{norm}(\xi) \mathbf{e} \\ J = \sigma_{ref} E \end{cases} \quad (5.15)$$

Riscrivendo la (5.9), tenendo conto delle (5.12) abbiamo:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} = -j\omega \frac{B}{E} L \mathbf{b} \quad (5.16)$$

Definiamo:

$$\begin{cases} \tau_{em} = \frac{L}{c} \\ \alpha = c \frac{B}{E} \\ c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{ref} \mu_{ref}}} \end{cases} \quad (5.17)$$

Cioè,  $c$  è la velocità delle onde elettromagnetiche nel mezzo di riferimento,  $\tau_{em}$  è il tempo richiesto alle onde elettromagnetiche per percorrere la lunghezza caratteristica  $L$ ,  $\alpha$  è legato alla radice quadrata del rapporto tra energia magnetica ed elettrica:

$$\alpha = c \frac{B}{E} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{ref} \mu_{ref}}} \frac{\sqrt{\frac{1}{V} \int_V |\mathbf{B}|^2 dV}}{\sqrt{\frac{1}{V} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV}} = \sqrt{\frac{\int_V \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_{ref}} dV}{\int_V \frac{1}{2} \epsilon_{ref} |\mathbf{E}|^2 dV}} \quad (5.18)$$

Con queste definizioni, la (5.16) diventa

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} = -j\omega \tau_{em} \alpha \mathbf{b} \quad (5.19)$$

Usando simili argomenti per l'eq. (5.10), otteniamo:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = \frac{LJ}{H} \mathbf{j} + j\omega \frac{D}{H} L \mathbf{d} \quad (5.20)$$

Che diventa, utilizzando le (5.13)-(5.15):

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = L \mu_{ref} \sigma_{ref} \frac{E}{B} \mathbf{j} + j\omega L \mu_{ref} \epsilon_{ref} \frac{E}{B} \mathbf{d} \quad (5.21)$$

Ora introduciamo due ben noti tempi caratteristici elettromagnetici, su cui ritorneremo in modo più approfondito nei paragrafi successivi:

$$\begin{cases} \tau_m = \mu_{ref} \sigma_{ref} L^2 \\ \tau_e = \frac{\epsilon_{ref}}{\sigma_{ref}} \end{cases} \quad (5.22)$$

Il tempo  $\tau_e$  è il tempo di diffusione della carica elettrica, cioè il tempo caratteristico

con il quale si neutralizza la carica elettrica all'interno di un conduttore. Il tempo  $\tau_m$  è il tempo di diffusione della densità di corrente elettrica, cioè il tempo caratteristico con il quale la densità di corrente (e quindi il campo magnetico) penetra in un conduttore.

E' facile verificare che risulta:

$$\tau_{em}^2 = \tau_m \tau_e \quad (5.23)$$

e che

$$L \mu_{ref} \sigma_{ref} c = \frac{\tau_m}{\tau_{em}} = \frac{\tau_{em}}{\tau_e} \quad (5.24)$$

così che la (5.21) diventa:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = \frac{\tau_m}{\tau_{em}} \frac{1}{\alpha} \mathbf{j} + j\omega \tau_{em} \frac{1}{\alpha} \mathbf{d} \quad (5.25a)$$

oppure

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = \frac{\tau_{em}}{\tau_e} \frac{1}{\alpha} \mathbf{j} + j\omega \tau_{em} \frac{1}{\alpha} \mathbf{d} \quad (5.25b)$$

In conclusione, le equazioni da considerare sono la (5.19) e la (5.25) (a o b)

Siamo ora pronti a dare risposta al seguente quesito: "Che forma assumono le equazioni nel limite di bassa frequenza?", dove "bassa frequenza" ha il significato ben preciso:

$$\omega \tau_{em} \ll 1 \quad (5.26a)$$

Possiamo quantificare il "molto più piccolo" nella (5.26a), scegliendo un valore di soglia  $k < 1$  tale che la (5.26a) significhi in realtà:

$$\omega \tau_{em} < k \quad (5.26b)$$

Una scelta possibile potrebbe essere, per esempio,  $k = 0.1$ .

La identificazione delle equazioni da risolvere nel limite di bassa frequenza non è banale, perchè il termine  $\omega \tau_{em}$  appare con altri termini come il parametro  $\alpha$  ed alcuni tempi caratteristici elettromagnetici. Inoltre, il termine  $\alpha$  in generale varia con la frequenza e può dipendere dalla particolare geometria in esame. Abbiamo tre possibilità, corrispondenti al fatto che l'ordine di grandezza di  $\alpha$  può variare in modo che uno dei termini in cui esso è presente sia di ordine 1:

$$\text{Caso 1: } \alpha \approx \frac{1}{\omega \tau_{em}} \quad (5.27a)$$

$$\text{Caso 2: } \alpha \approx \omega \tau_{em} \quad (5.27b)$$

$$\text{Caso 3: } \alpha \approx \frac{\tau_m}{\tau_{em}} = \frac{\tau_{em}}{\tau_e} \quad (5.27c)$$

Dove il simbolo "≈" sta per "dell'ordine di". Per verificare la occorrenza di uno di tali casi, è sufficiente esaminare  $\alpha$  nel limite  $\omega \tau_{em} \rightarrow 0$ , cioè nel limite statico. Nel caso 1, abbiamo che l'energia relative al campo elettrico va a zero, il che significa che la corrente fluisce in conduttori perfetti. Nel caso 2, è l'energia relativa al campo magnetici che va a zero, il che implica che non sono presenti correnti e che il campo elettrico è presente quindi in regioni costituite da isolanti perfetti. Nel caso 3 non vi sono materiali perfetti ed è pertanto la situazione evidentemente più realistica. In quest'ultimo caso,  $\alpha$  può essere ancora molto più grande o piccolo dell'unità, in funzione delle varie situazioni. Quello che stiamo dicendo è che comunque in quest'ultimo caso, l'ordine di grandezza di  $\alpha$  non scala con la frequenza.

Esaminiamo meglio queste tre situazioni, ricordando che  $\alpha$  è la radice del rapporto tra le densità medie di energia magnetica ed elettrica. È facile convincersi che al variare della frequenza i campi elettrici e magnetici assumono valori differenti, se non altro a causa dei termini di interazione  $j\omega\mathbf{B}$  e  $j\omega\mathbf{D}$ . Sono quindi funzione della frequenza anche i valori quadratici medi  $B$  ed  $E$  quindi anche  $J$ . Di conseguenza, anche  $\alpha$ , in genere, varia. A questo punto entra in gioco il terzo passo della metodologia: la perturbazione. Dato che, infatti, la nostra attenzione è rivolta al campo dei parametri in cui  $\omega\tau_{em}$  è piccolo, possiamo immaginare di sviluppare i campi caratteristici  $E$ ,  $B$  e  $J$  in serie di potenze di  $\omega\tau_{em}$ .

$$E = E_0 + E_1(\omega\tau_{em}) + E_2(\omega\tau_{em})^2 + E_3(\omega\tau_{em})^3 + \dots \quad (5.28)$$

$$B = B_0 + B_1(\omega\tau_{em}) + B_2(\omega\tau_{em})^2 + B_3(\omega\tau_{em})^3 + \dots \quad (5.29)$$

$$J = J_0 + J_1(\omega\tau_{em}) + J_2(\omega\tau_{em})^2 + J_3(\omega\tau_{em})^3 + \dots \quad (5.30)$$

Si ricordi che il caso  $\omega\tau_{em}=0$  corrisponde al regime stazionario; di conseguenza i campi  $E_0$ ,  $B_0$  e  $J_0$  sono quelli che caratterizzano il regime stazionario del sistema in esame.

Con riferimento all'andamento di  $\alpha$ , possiamo quindi evidenziare che i tre casi prima introdotti sono inquadrabili nelle seguenti tre situazioni:

- 1) Il campo elettrico caratteristico  $E$  tende ad un limite finito al tendere di  $\omega\tau_{em}$  a zero, mentre il campo magnetico caratteristico  $B$  va a zero come  $\omega\tau_{em}$  :

$$E_0 \neq 0; \quad B_0 = 0$$

- 2) Il campo magnetico caratteristico  $B$  tende ad un limite finito al tendere di  $\omega\tau_{em}$  a zero, mentre il campo elettrico caratteristico  $E$  va a zero come  $\omega\tau_{em}$  :

$$E_0 = 0; \quad B_0 \neq 0$$

- 3) Entrambi i campi caratteristici  $E$  ed  $B$  tendono ad un limite finito quando  $\omega\tau_{em}$  va a zero:

$$E_0 \neq 0; \quad B_0 \neq 0$$

Avremo di conseguenza i tre casi corrispondenti per  $\alpha$ , definiti dalle (5.27).

In altri termini, se immaginiamo di sviluppare  $\alpha$  in serie di potenze di  $\omega\tau_{em}$ , il primo termine di tale sviluppo va come  $\omega\tau_{em}$ , come  $1/\omega\tau_{em}$  o è indipendente da  $\omega\tau_{em}$  rispettivamente.

Caso 1:  $\alpha \cong \alpha_1\omega\tau_{em}$

Proviamo ad esaminare il primo caso. Se, dunque,  $\alpha$  va a zero come  $\omega\tau_{em}$ , deve risultare  $E_0 \neq 0, B_0 = 0$ . Conseguentemente, anche  $J_0 = 0$ , essendo pari a zero il campo magnetico in condizioni stazionarie. Sostituendo tale dipendenza nelle disuguaglianze che avevamo in precedenza evidenziato, avremo:

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{e} \cdot d\xi \right| \gg \left| (\omega\tau_{em})^2 \alpha_1 \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_{\xi} \right| \quad (5.31)$$

$$\left| \int_{\gamma_c} \mathbf{h} \cdot d\boldsymbol{\xi} \right| \gg \left| \frac{1}{\alpha_1} \iint_S \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_{\xi} \right| \quad (5.32)$$

dove, naturalmente  $\alpha_1 = c \frac{B_1}{E_0}$

Vediamo che, al tendere di  $\omega \tau_{em}$  a zero, la prima delle disuguaglianze può essere soddisfatta, mentre la seconda non lo è, in generale.

Sostituendo ancora la dipendenza di  $\alpha$  da  $\omega \tau_{em}$  nelle equazioni di Maxwell in forma adimensionale, si ottiene:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} = -j(\omega \tau_{em})^2 \alpha_1 \mathbf{b} \quad (5.33)$$

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = \frac{1}{\omega \tau_e} \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{j} + j \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{d} \quad (5.34)$$

E' bene in questo caso approfondire il ruolo svolto dal parametro  $\sigma_{ref}$ . Infatti, poiché  $J_0 = 0$  e  $E_0 \neq 0$ ,  $\sigma_{ref}$  dipenderà anch'esso da  $\omega \tau_{em}$ <sup>1</sup>:

$$\sigma_{ref} \cong \frac{J_1 \omega \tau_{em}}{E_0 + E_1 \omega \tau_{em}} \cong \sigma_1 \omega \tau_{em} \quad (5.35)$$

Conseguentemente

$$\frac{1}{\omega \tau_e} = \frac{\sigma_{ref}}{\omega \varepsilon_{ref}} \cong \frac{\sigma_1 \tau_{em}}{\varepsilon_{ref}} = \frac{\tau_{em}}{\tau_{e1}}, \quad (5.36)$$

quantità che tende a zero con la conducibilità. Si noti anche che

$$\frac{\sigma_1 \tau_{em}}{\alpha_1 \varepsilon_{ref}} = \frac{\sigma_1 E_0 L}{\varepsilon_{ref} c^2 B_1} = \frac{J_1 L \mu_{ref}}{B_1}$$

Sulla base di tali considerazioni le equazioni del modello adimensionalizzato possono essere scritte nel modo seguente:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} = -j(\omega \tau_{em})^2 \alpha_1 \mathbf{b} \quad (5.37)$$

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = \frac{\tau_{em}}{\tau_{e1}} \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{j} + j \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{d} \quad (5.38)$$

Come si vede, nella prima equazione compare a secondo membro, al tendere di  $\omega$  a zero, un termine che va come  $(\omega \tau_{em})^2$ . Se  $\omega \tau_{em}$  è piccolo, trascurando i termini che lo contengono, le equazioni in forma non adimensionale prendono la forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5.39)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \quad (5.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.42)$$

Sono le equazioni caratteristiche del modello che va sotto il nome di modello del campo "Quasi Stazionario Elettrico" (Q.S.E.).

<sup>1</sup> Si noti che  $\varepsilon_{ref}$  e  $\mu_{ref}$  sono indipendenti dalla frequenza, non prendendo in considerazione situazioni ideali nelle quali  $\varepsilon$  e  $\mu$  divergono (come ad esempio nel caso ideale dei materiali magnetici perfetti con  $H_0=0$  e  $B_0 \neq 0$ ).

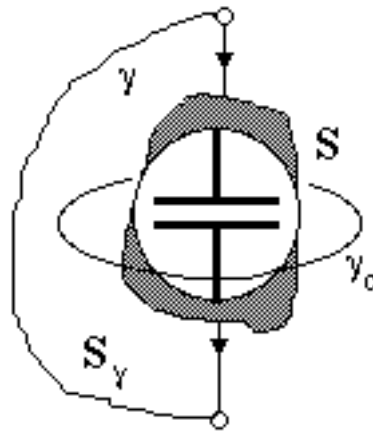


### Il condensatore ideale

Cerchiamo ora di esaminare più a fondo le caratteristiche fisiche di un sistema nel quale le approssimazioni descritte siano valide. In primo luogo, affinché il campo magnetico caratteristico al tendere di  $\omega \tau_{em}$  a zero sia nullo, deve anche, essere nulla, nel regime stazionario, come abbiamo già visto, la densità di corrente caratteristica.

$$E_0 \neq 0, B_0 = 0, J_0 = 0$$

Ciò implica che nel regime stazionario, all'interno del sistema che stiamo considerando, deve essere impedito il passaggio della corrente. Deve essere presente, quindi, una regione, caratterizzata dalla presenza di un dielettrico "perfetto", interposta tra i due morsetti. Il nostro sistema sembra avere le caratteristiche, dunque, di un "condensatore".



$$E_0 \neq 0, B_0 = 0, J_0 = 0$$

Fig. 5.3. Il bipolo "condensatore ideale"

Non si tratta ancora, però, di un "bipolo", nel senso prima descritto, in quanto la seconda disequaglianza non è soddisfatta; si potrà, dunque per un tale sistema parlare di tensione indipendente dal percorso di integrazione, ma non è assicurato, per qualsiasi superficie, che la somma delle correnti entranti sia eguale a quella uscente. Basta pensare per esempio ad una superficie che passi nella zona occupata dal dielettrico. Se però ci limitiamo a considerare esclusivamente superfici che tagliano entrambi i conduttori di accesso al sistema - se, in altri termini, consideriamo soltanto superfici tutte esterne ad una superficie che delimita l'intero sistema in esame, e che ne caratterizza la sua dimensione complessiva - allora è possibile fare in modo che anche la seconda disequaglianza sia soddisfatta. Considerando, infatti, l'equazione di continuità per la densità di corrente, o, se si vuole, la seconda equazione di Maxwell, si vede immediatamente che il flusso del vettore  $\mathbf{J}$  attraverso una tale superficie, e quindi anche la somma di tutte le correnti entranti nel sistema, può essere diverso da zero solo se all'interno della superficie stessa, e quindi del bipolo, si verifica una variazione della carica totale contenuta; in particolare, quindi, la carica totale contenuta deve essere diversa da zero perché la corrente entrante sia diversa da quella uscente.

$$I_1 - I_2 = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} \quad (5.43)$$

A questo punto interviene il modo in cui il sistema è realizzato. Se assumiamo, infatti, che esso sia ad induzione completa, in ogni condizione di funzionamento si

potrà realizzare la condizione che la quantità di carica su un elettrodo sia uguale ed opposta a quella distribuita sull'altro elettrodo. Altrimenti, tale condizione può essere ottenuta agendo opportunamente sull'alimentazione esterna. Se assumiamo, infatti, che la carica totale è nulla all'istante 0 e che il sistema esterno, che alimenta il nostro bipolo, soddisfi la condizione di portare ad un morsetto la stessa quantità di carica che toglie dall'altro, allora evidentemente anche l'altra condizione risulterà soddisfatta in ogni istante, a condizione, come si diceva, di limitarsi a superfici che non entrino nel bipolo, e quindi tagliano entrambi i morsetti di accesso.

Resta da dire quale sarà la caratteristica elettrica - cioè il legame tensione corrente ai morsetti - del bipolo condensatore. Per far ciò basta considerare una superficie che taglia il dielettrico contenuto. Si avrà che la corrente entrante sarà pari al flusso di  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ; ma, d'altra parte, il campo elettrico deve risultare proporzionale alla tensione ai morsetti, che è il suo integrale di linea tra i morsetti appunto, e, quindi, se ne conclude che la corrente è proporzionale alla derivata della tensione.

$$i \propto \varepsilon \frac{d\mathbf{E}}{dt} \propto \frac{dv}{dt}, \quad (5.44)$$

ovvero:

$$i = C \frac{dv}{dt}. \quad (5.45)$$

Il coefficiente di proporzionalità coincide, naturalmente, con il coefficiente di proporzionalità tra carica e differenza di potenziale del caso statico, e rappresenta la "capacità" del condensatore.

Caso 2:  $\alpha \cong \frac{\alpha_{-1}}{\omega \tau_{em}}$

In maniera analoga si può trattare il caso in cui  $\alpha$  diverge come  $\frac{1}{\omega \tau_{em}}$ . Se riprendiamo in esame le due disequaglianze messe in evidenza in precedenza, e sostituiamo la dipendenza di  $\alpha$  da  $\omega \tau_{em}$ , scopriamo che, mentre la seconda è certamente soddisfatta, la prima non può esserlo per qualsiasi superficie e linea considerate:

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{e} \cdot d\xi \right| \gg \left| \alpha_{-1} \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_{\xi} \right| \quad (5.46)$$

$$\left| \int_{\gamma_c} \mathbf{h} \cdot d\xi \right| \gg \left| \frac{(\omega \tau_{em})^2}{\alpha_{-1}} \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_{\xi} \right| \quad (5.47)$$

dove, naturalmente  $\alpha_{-1} = c \frac{B_0}{E_1}$

Vediamo il verificarsi di un fenomeno analogo nelle equazioni di Maxwell in forma adimensionale:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} = -j \alpha_{-1} \mathbf{b} \quad (5.48)$$

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = \frac{\omega \tau_m}{\alpha_{-1}} \mathbf{j} + j(\omega \tau_{em})^2 \frac{1}{\alpha_{-1}} \mathbf{d} \quad (5.49)$$

Anche in questo caso è necessario approfondire il ruolo svolto dal parametro  $\sigma_{ref}$ . Infatti, poiché  $J_0 \neq 0$  ed  $E_0 = 0$ ,  $\sigma_{ref}$  dipenderà anch'esso da  $\omega \tau_{em}$ :

$$\sigma_{ref} \cong \frac{J_0 + J_1 \omega \tau_{em}}{E_1 \omega \tau_{em}} \cong \frac{\sigma_{-1}}{\omega \tau_{em}} \quad (5.50)$$

Conseguentemente

$$\omega \tau_m = \mu_{ref} \omega \sigma_{ref} L^2 \cong \frac{\mu_{ref} \sigma_{-1} L^2}{\tau_{em}} = \frac{\tau_{m1}}{\tau_{em}}, \quad (5.51)$$

Si noti anche che

$$\frac{\mu_{ref} \sigma_{-1} L^2}{\alpha_{-1} \tau_{em}} = \frac{\mu_{ref} \sigma_{-1} L^2 E_1}{c B_0 \tau_{em}} = \frac{\mu_{ref} \sigma_{-1} L E_1}{B_0} = \frac{J_0 L \mu_{ref}}{B_0} \quad (5.52)$$

Sulla base di tali considerazioni le equazioni del modello adimensionalizzato possono essere scritte nel modo seguente:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} = -j \alpha_{-1} \mathbf{b} \quad (5.53)$$

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = \frac{\tau_{m1}}{\tau_{em}} \frac{1}{\alpha_{-1}} \mathbf{j} + j \frac{(\omega \tau_{em})^2}{\alpha_{-1}} \mathbf{d} \quad (5.54)$$

Compare ancora un termine in  $(\omega \tau_{em})^2$ , che, se trascurato, porta al modello del campo "Quasi Stazionario Magnetico" (Q.S.M.). In forma non adimensionale, si ottiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j \omega \mathbf{B} \quad (5.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.57)$$

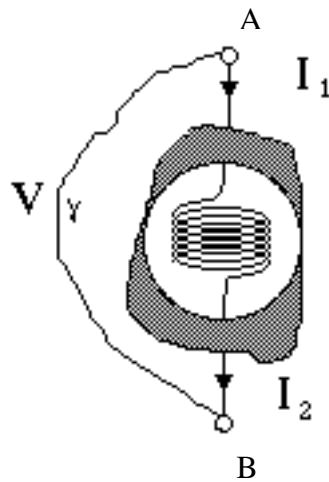
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.58)$$

### L'induttore ideale

Possiamo, anche questa volta, esaminare più a fondo la natura di un sistema fisico in cui tale modello possa essere ritenuto valido. Perché  $\alpha$  vada come l'inverso di  $\omega \tau_{em}$  occorre, abbiamo visto, che sia nullo il corrispondente campo elettrico nel caso statico, e diverso da zero quello magnetico.

Ne consegue che nel sistema in esame deve essere presente una corrente anche in regime stazionario e quindi, al suo interno, deve esistere un percorso, tra un morsetto e l'altro, che si sviluppa tutto in materiale conduttore. Ma c'è di più: dato che il campo elettrostatico deve essere nullo, il conduttore interessato da corrente deve essere perfetto.

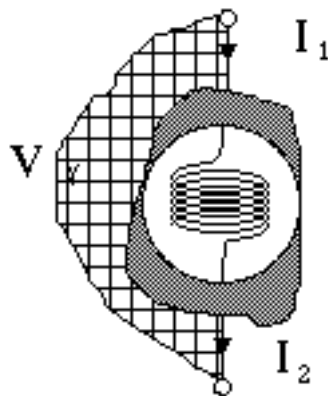
E' chiaro, a questo punto che il sistema 'ricorda' un induttore; ma dal nostro punto di vista esso non può essere ancora considerato un bipolo. Infatti mentre la condizione sulle correnti è certamente verificata, non lo è in generale quella sulle tensioni.



$$E_0 = 0, B_0 \neq 0, J_0 \neq 0$$

Fig. 5.4. L'induttore ideale

Sviluppando infatti l'integrale di linea del campo lungo una linea chiusa - che si chiuda, appunto, all'interno, lungo il conduttore - si ha che il contributo, dovuto al tratto interno della linea, è nullo, a causa della presenza del materiale conduttore, e, quindi, la circuitazione coincide con la tensione ai morsetti che è, a sua volta, pari alla derivata del flusso concatenato dalla linea chiusa. Tale flusso, però, dipende dalla scelta della linea nel suo tratto esterno.

Fig. 5.5. La superficie che definisce  $\Phi_e$ 

Con questa suddivisione potremo distinguere due contributi alla derivata del flusso.

$$V_{AB} = \frac{d\Phi_i}{dt} + \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (5.59)$$

Se supponiamo che ragioni costruttive impongano che il flusso esterno sia molto più piccolo di quello interno - come, per esempio accade quando all'interno il conduttore si sviluppa in numerose spire, così come schematicamente mostrato in fig. 5.4 -, allora potremo trascurare il contributo corrispondente. Si noti che tale situazione implica necessariamente che la linea esterna sia *ragionevole*; escluderemo dunque linee "irragionevoli" che si sviluppino lungo "numerose spire" come quella mostrata, per esempio, in figura 5.6.

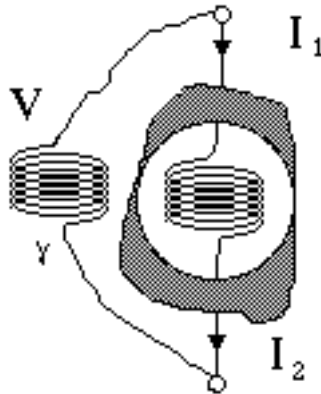


Fig. 5.6. Esempio di una linea irragionevole

Del resto è nostra intenzione applicare questa proprietà alle maglie di una rete: se queste costituiscono linee *irragionevoli* vuol dire che si è mal schematizzato il sistema fisico che la rete rappresenta.

Supponiamo allora, per fissare le idee, che il sistema fisico di riferimento sia costituito da un conduttore perfetto avvolto a spirale in un numero  $N$  elevato di spire, accessibile dai morsetti  $A$  e  $B$  (Fig. 5.4). Consideriamo una linea chiusa  $\gamma$  costituita da un tratto esterno  $\gamma_e$  che si sviluppa tra i punti  $B$  ed  $A$  ed un tratto  $\gamma_i$  che segue la linea media del conduttore da  $A$  a  $B$ . Dalla legge di Faraday si ha:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A\gamma_i B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B\gamma_e A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.60)$$

Si può affermare immediatamente che l'integrale lungo  $\gamma_i$  è nullo poiché è nullo il campo elettrico in un conduttore perfetto ( $J$  è finita e pertanto  $E=J/\sigma=0$ , poiché si è assunto  $1/\sigma=0$ ).

Consideriamo poi un'altra linea chiusa  $\gamma'$  costituita da un tratto esterno  $\gamma'_e$  che si sviluppa ancora tra i punti  $B$  ed  $A$  lungo un percorso differente e lo stesso tratto interno  $\gamma_i$  che segue la linea media del conduttore da  $A$  a  $B$ .

Anche in questo caso otteniamo:

$$\oint_{\gamma'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{B\gamma'_e A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{S_{\gamma'}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.61)$$

Supponiamo ora di scomporre la superficie  $S_{\gamma}$  orlata da  $\gamma$  in due parti distinte, l'una,  $S_i$ , orlata dalle  $N$  spire di cui è costituito l'avvolgimento, l'altra,  $S_e$ , che si appoggi al contorno esterno  $\gamma_e$  e ad un tratto che giaccia sulla superficie che delimita il nostro sistema, come illustrato in fig. 5.5.

Con questa suddivisione si potranno distinguere due contributi alla derivata del flusso cui si riduce l'integrale a secondo membro della (5.60) nell'ipotesi che la curva non vari nel tempo:

$$\iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{d}{dt} \iint_{S_i} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{d}{dt} \iint_{S_e} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.62)$$

Se si suppone che ragioni costruttive impongano che il flusso esterno sia molto più piccolo di quello interno, come avviene, per esempio, nel caso in cui il numero  $N$  di spire sia abbastanza elevato, allora sarà possibile trascurare il contributo corrispondente nella (5.62). Ovviamente, si è implicitamente assunto che la linea esterna abbia uno

sviluppo ragionevolmente prossimo al dispositivo e che non si concateni con esso. Non sono pertanto accettabili linee come quelle mostrate, per esempio, in fig. 5.6.

Sulla base di tali considerazioni, le equazioni (5.60) e (5.61) possono essere approssimate come segue:

$$\int_{B\gamma_e A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cong -\frac{d}{dt} \iint_{S_i} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.63)$$

$$\int_{B\gamma_e' A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cong -\frac{d}{dt} \iint_{S_i} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.64)$$

Poiché i secondi membri sono uguali tra loro, tali risultano essere anche i primi membri e, quindi, in questa approssimazione, gli integrali a primo membro dipendono solo dalla posizione dei punti A e B e non dalla linea che li congiunge. Essi definiscono pertanto la differenza di potenziale  $V_{BA}$ :

$$\int_{B\gamma_e' A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_{BA} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_i} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.65)$$

Poiché, il campo magnetico, in quest'approssimazione, è prodotto dalla sola densità di corrente  $\mathbf{J}$ , avendo trascurato nell'eq. (5.10) il contributo della corrente di spostamento, nei mezzi lineari è possibile ottenere una relazione lineare tra campo (e quindi flusso) e corrente. Risulta pertanto

$$V_{AB} = \frac{d}{dt} \iint_{S_i} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{d\Phi_i}{dt} \propto \frac{di}{dt} \quad (5.66)$$

Ovvero:

$$V_{AB} = L \frac{di}{dt} \quad (5.67)$$

Il coefficiente di proporzionalità coincide, naturalmente, con il coefficiente di proporzionalità tra flusso e corrente del caso statico, e rappresenta l'induttanza dell'induttore.

Caso 3: 
$$\alpha \approx \frac{\tau_m}{\tau_{em}} = \frac{\tau_{em}}{\tau_e}$$

Possiamo, in questo caso, distinguere tre possibilità, illustrate schematicamente in Fig. 5.7. Si noti che  $\tau_{em}$  è sempre tra  $\tau_e$  and  $\tau_m$ , grazie alla (5.23).

Richiamiamo le equazioni da risolvere:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} = -j\omega \tau_{em} \alpha \mathbf{b} \quad (5.68)$$

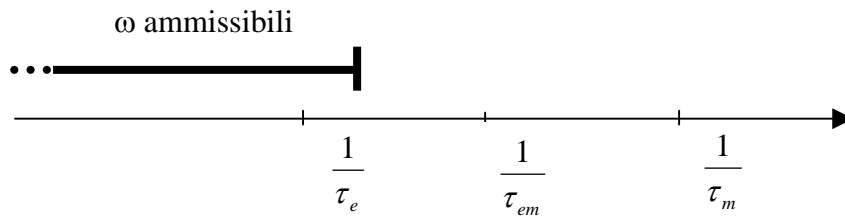
$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} = \frac{\tau_{em}}{\tau_e} \frac{1}{\alpha} \mathbf{j} + j\omega \tau_{em} \frac{1}{\alpha} \mathbf{d} \quad (5.69)$$

Dove, grazie alla (5.27c):

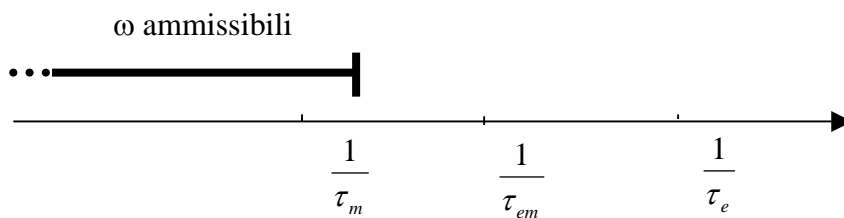
$$\omega \alpha \tau_{em} \approx \omega \tau_m \quad (5.70)$$

$$\omega \tau_{em} \frac{1}{\alpha} \approx \omega \tau_e \quad (5.71)$$

Caso 3A:  $\frac{1}{\tau_e} \ll \frac{1}{\tau_{em}} \ll \frac{1}{\tau_m} \Rightarrow \frac{1}{\tau_e} < k \frac{1}{\tau_{em}}, \frac{1}{\tau_{em}} < k \frac{1}{\tau_m}$



Caso 3B:  $\frac{1}{\tau_m} \ll \frac{1}{\tau_{em}} \ll \frac{1}{\tau_e} \Rightarrow \frac{1}{\tau_m} < k \frac{1}{\tau_{em}}, \frac{1}{\tau_{em}} < k \frac{1}{\tau_e}$



Caso 3C:  $\frac{1}{\tau_m} \approx \frac{1}{\tau_{em}} \approx \frac{1}{\tau_e}$

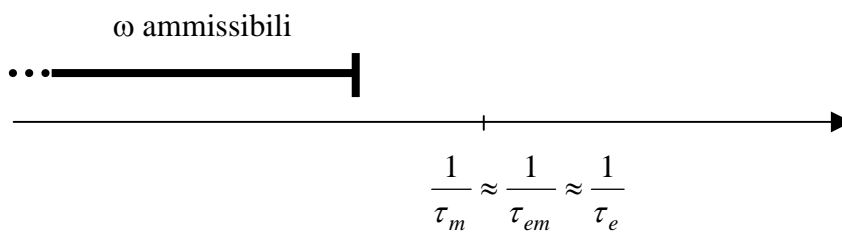


Fig. 5.7.

### Caso 3A

Nel caso 3A, risulta dalla (5.27c) che  $\alpha \ll 1$ ; questo significa che l'energia del campo elettrico è dominante rispetto a quella del campo magnetico. Inoltre, abbiamo:

$$\omega \tau_m < k \omega \tau_{em} < k^2 \quad (5.72)$$

Decidiamo di non considerare termini di ordine  $k^2$ , così che il termine a destra dell'equazione (5.19) sia trascurabile:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} \cong 0 \quad (5.73)$$

Possiamo distinguere varie possibilità differenti.

- “Frequenze relativamente elevate”, cioè  $\omega \approx \frac{1}{\tau_e}$

In questo caso anche il secondo termine a destra dell'eq. (5.69) è di ordine 1, per cui le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j \omega \mathbf{D} \end{cases} \quad (5.74)$$

Esse sono, come abbiamo già visto, le equazioni del modello *Quasi Stazionario Elettrico (Q.S.E)*. Il circuito equivalente che ne scaturisce, sarà ottenuto in questo caso da un opportuno numero di condensatori e resistori.

- “Frequenze estremamente basse”, cioè  $\omega \approx k^2 \frac{1}{\tau_e}$  (si noti la presenza di  $k^2$ )

In questo caso abbiamo:

$$\omega \tau_e \approx k^2 \quad (5.75)$$

Pertanto, trascurando i termini in  $k^2$ , otteniamo:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} \cong \frac{\tau_{em}}{\tau_e} \frac{1}{\alpha} \mathbf{j} \quad (5.76)$$

Le equazioni da risolvere sono quindi le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \end{cases} \quad (5.77)$$

Esse sono le equazioni della *Conduzione Quasi Stazionaria (Q.S.C.)*.

Esaminiamo un po' più a fondo quest'ultimo modello.

#### Il resistore ideale

L'approssimazione introdotta comporta che sono trascurabili entrambi i contributi associati alle derivate temporali. Considerando le equazioni di Maxwell in forma integrale ciò è equivalente alla seguente approssimazione:

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{e} \cdot d\xi \right| \gg \left| (\omega \tau_{em}) \alpha_0 \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_{\xi} \right| \quad (5.78)$$



$$\left| \int_{\gamma_c} \mathbf{h} \cdot d\boldsymbol{\xi} \right| \gg \left| \frac{(\omega\tau_{em})}{\alpha_0} \iint_{S_\gamma} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_\xi \right| \quad (5.79)$$

dove, naturalmente  $\alpha_0 = c \frac{B_0}{E_0}$

Ricordiamo quanto abbiamo precedentemente ottenuto. I secondi membri delle disuguaglianze sembrano essere entrambi di ordine  $\omega\tau_{em}$ . In realtà, tenendo conto che in questo caso (eq. (5.70))  $\omega\alpha_0\tau_{em} \approx \omega\tau_m$ , poiché abbiamo anche  $\omega\tau_m < k\omega\tau_{em} < k^2$ , risulta

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{e} \cdot d\boldsymbol{\xi} \right| \gg \left| (\omega\tau_{em}) \alpha_0 \iint_{S_\gamma} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_\xi \right| \approx \left| \omega\tau_m \iint_{S_\gamma} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_\xi \right| \approx \left| (\omega\tau_{em})^2 \iint_{S_\gamma} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_\xi \right| \quad (5.80)$$

Analogamente per frequenze molto basse, cioè per  $\omega \approx k^2 \frac{1}{\tau_e}$ , risulta

$$\left| \int_{\gamma_c} \mathbf{h} \cdot d\boldsymbol{\xi} \right| \gg \left| \frac{(\omega\tau_{em})}{\alpha_0} \iint_{S_\gamma} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_\xi \right| \approx \left| \frac{k^2\tau_{em}}{\tau_e\alpha_0} \iint_{S_\gamma} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_\xi \right| \approx \left| k^2 \iint_{S_\gamma} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_\xi \right| \quad (5.81)$$

poiché  $\frac{\tau_{em}}{\tau_e\alpha_0} \approx 1$

Trascurando termini in  $k^2$  otteniamo pertanto le seguenti equazioni in forma non adimensionale

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \end{cases}$$

Abbiamo già visto che queste sono le equazioni del modello *Q.S.C.*. Anche se esse coincidono con quelle del campo stazionario di corrente, si ricordi che in questo caso i campi non sono costanti nel tempo. Ricordiamo che quando  $\alpha$  resta finito al tendere di  $\omega\tau_{em}$  a zero, siamo in presenza di un mezzo a conducibilità finita. Infatti, come abbiamo già detto, in questo caso debbono essere non nulli tutti i campi nel limite stazionario:

$$E_0 \neq 0; B_0 \neq 0, J_0 \neq 0$$

Il fatto che  $J_0$  sia diverso da zero, implica la presenza di un conduttore; d'altra parte, la presenza di un campo elettrico anche nel limite stazionario, richiede che tale conduttore sia "non perfetto". Ricordiamo che le approssimazioni che hanno portato all'approssimazione *Q.S.C.* sono le seguenti (equazioni (5.72) e (5.75)):

$$\begin{aligned} \omega\tau_m < k\omega\tau_{em} < k^2 \\ \omega\tau_e \approx k^2 \end{aligned}$$

Riscriviamole mettendo in evidenza il tempo caratteristico della dinamica del fenomeno

$$T = \frac{2\pi}{\omega} :$$

$$\tau_m \ll T$$

$$\tau_e \ll T$$

In pratica, se il tempo di diffusione del campo magnetico  $\tau_m$ , attraverso la dimensione caratteristica del conduttore, è trascurabile rispetto al tempo caratteristico della dinamica del fenomeno in esame, allora è possibile ritenere praticamente nullo il rotore del campo elettrico. Se inoltre il tempo di diffusione delle cariche  $\tau_e$  è anch'esso molto minore del tempo caratteristico del fenomeno, allora il termine legato alla densità di corrente di spostamento può essere trascurato nella corrispondente equazione di Maxwell. In questo caso è possibile assumere all'interno del materiale conduttore un modello Quasi Stazionario di Corrente. Il circuito equivalente è allora basato su un certo numero di soli resistori, tenendo conto che la caratteristica esterna del bipolo in esame sarà imposta, esclusivamente, dalla conducibilità del materiale e della geometria del sistema. Si ha infatti

$$V \propto E \propto J \propto I$$

In altri termini,  $V = RI$ , ed il sistema in esame sarà equivalente ad un resistore ideale.

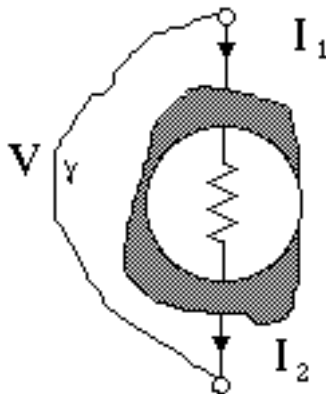


Fig. 5.7 Il resistore ideale

- “Basse frequenze”, cioè  $\omega \approx k \frac{1}{\tau_e}$

In questo caso abbiamo:

$$\omega \tau_e \approx k \quad (5.82)$$

Questa situazione è di confine. Infatti, se decidiamo di non considerare anche termini di ordine  $k$ , abbiamo di nuovo il caso *Q.S.C.*, altrimenti ritorniamo al caso *Q.S.E.*

### Caso 3B

Nel caso 3B, risulta dalla (5.27c) che  $\alpha \gg 1$ ; questo significa che l'energia del campo magnetico è dominante rispetto a quella del campo elettrico. Inoltre, abbiamo:

$$\omega \tau_e < k \quad \omega \tau_{em} < k^2 \quad (5.83)$$

E quindi, trascurando termini di ordine  $k^2$ , la (21) diventa:

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{h} \cong \frac{\tau_{em}}{\tau_e} \frac{1}{\alpha} \mathbf{j} \quad (5.84)$$

In altre parole, la densità di corrente di spostamento è trascurabile.

Possiamo allora distinguere varie possibilità differenti.

- “Frequenze relativamente elevate”, cioè  $\omega \approx \frac{1}{\tau_m}$

In questo caso il secondo termine a destra dell'eq. (20) è di ordine 1, per cui le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j \omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \end{cases} \quad (5.85)$$

Esse sono le equazioni del modello *Quasi Stazionario Magnetico (Q.S.M)*. Il circuito equivalente che ne scaturisce, sarà ottenuto in questo caso da un opportuno numero di induttori e resistori.

- “Frequenze estremamente basse”, cioè  $\omega \approx k^2 \frac{1}{\tau_m}$  (si noti il  $k^2$ )

In questo caso abbiamo:

$$\omega \tau_m \approx k^2 \quad (5.86)$$

Pertanto, trascurando i termini in  $k^2$ , otteniamo dalla (5.68):

$$\nabla_{\xi} \times \mathbf{e} \cong 0 \quad (5.87)$$

Le equazioni da risolvere sono quindi le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \end{cases} \quad (5.88)$$

Esse sono le equazioni della *Conduzione Quasi Stazionaria (QSC)* già analizzate in precedenza. Il circuito equivalente, in questo caso è ancora, come in precedenza, basato su un certo numero di soli resistori.

- “Basse frequenze”, cioè  $\omega \approx k \frac{1}{\tau_m}$

In questo caso abbiamo:

$$\omega \tau_m \approx k \quad (5.89)$$

Questa situazione è di confine. Infatti, se decidiamo di non considerare anche termini di ordine  $k$ , abbiamo di nuovo il caso *Q.S.C*, altrimenti ritorniamo al caso *Q.S.M*.

### Caso 3C

Nel caso 3C, risulta dalla (5.27c) che  $\alpha \approx 1$ ; questo significa che l'energia del campo magnetico è dello stesso ordine di grandezza di quella del campo elettrico. Inoltre, abbiamo:

$$\omega \tau_e \approx \omega \tau_{em} \approx \omega \tau_m \quad (5.90)$$

Cioè, il termine a destra nell'eq. (5.68) ed il secondo termine a destra nell'eq. (5.69) sono dello stesso ordine.

Abbiamo due possibilità (ricordiamo la (5.26)):

- “Frequenze estremamente basse”, cioè  $\omega \approx k^2 \frac{1}{\tau_m}$  (si noti il  $k^2$ )

In questo caso abbiamo:

$$\omega \tau_m \approx \omega \tau_e \approx k^2 \quad (5.91)$$

E quindi i due termini sono entrambi trascurabili e la situazione è quella del modello *Q.S.C.*.

- “Basse frequenze”, cioè  $\omega \approx k \frac{1}{\tau_m}$

In questo caso abbiamo:

$$\omega \tau_e \approx \omega \tau_m \approx k \quad (5.92)$$

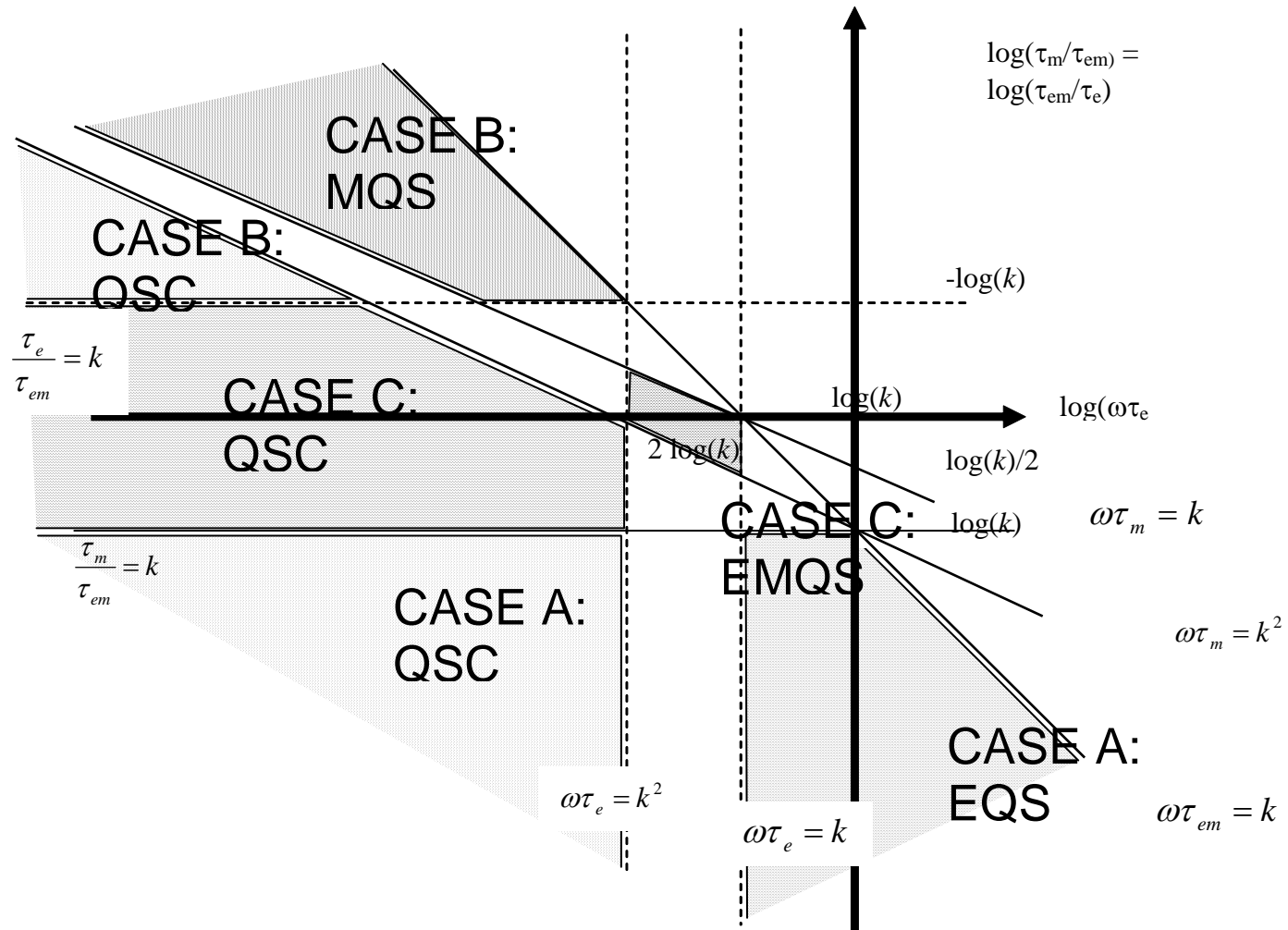
Se decidiamo di trascurare anche termini di ordine  $k$ , allora abbiamo di nuovo il modello *Q.S.C.* Altrimenti, se manteniamo tali termini abbiamo:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j \omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j \omega \mathbf{D} \end{cases} \quad (5.93)$$

Che sono le equazioni di Maxwell complete, ma sempre nel limite (5.26) di bassa frequenza. Questo implica, come vedremo, che può essere ancora trascurabile la propagazione, così che potremmo chiamare questa situazione il modello *Quasi Statico Elettromagnetico (Q.S.E.M.)*. Il circuito equivalente che ne scaturisce, sarà ottenuto in questo caso da un opportuno numero di condensatori, induttori e resistori.

Le approssimazioni discusse possono essere sinteticamente riassunte nel diagramma di fig. 5.8.

In conclusione, si tratta di inquadrare nel limite  $\omega \tau_{em}$  piccolo, campi e circuiti in uno stesso modello generale, che potremmo rappresentare con lo schema di principio mostrato in figura 5.8. In esso compaiono regioni in cui il modello *Q.S.E* è da ritenersi applicabile e regioni in cui invece il modello *Q.S.M.* è valido, collegate tra di loro con regioni in cui il modello *Q.S.C.* è valido – eventualmente nel limite di conduttore perfetto. Il modello circuitale rientra in questo schema.



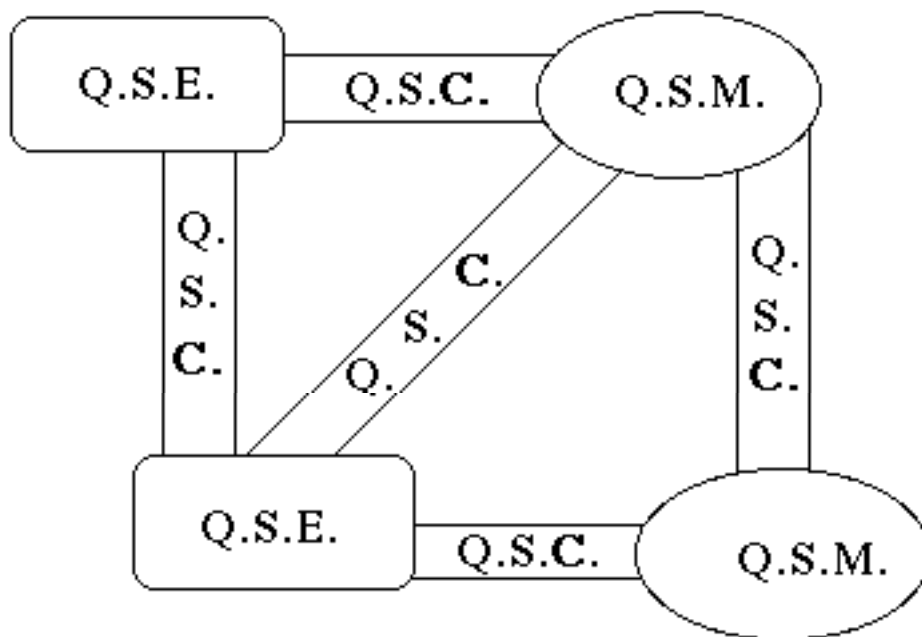


Fig. 5.9 Il passaggio dai campi ai circuiti