

Modellistica delle linee di trasmissione

PARTE I

Modelli equivalenti nel dominio del tempo e della frequenza

prof. Antonio Maffucci

Sommario

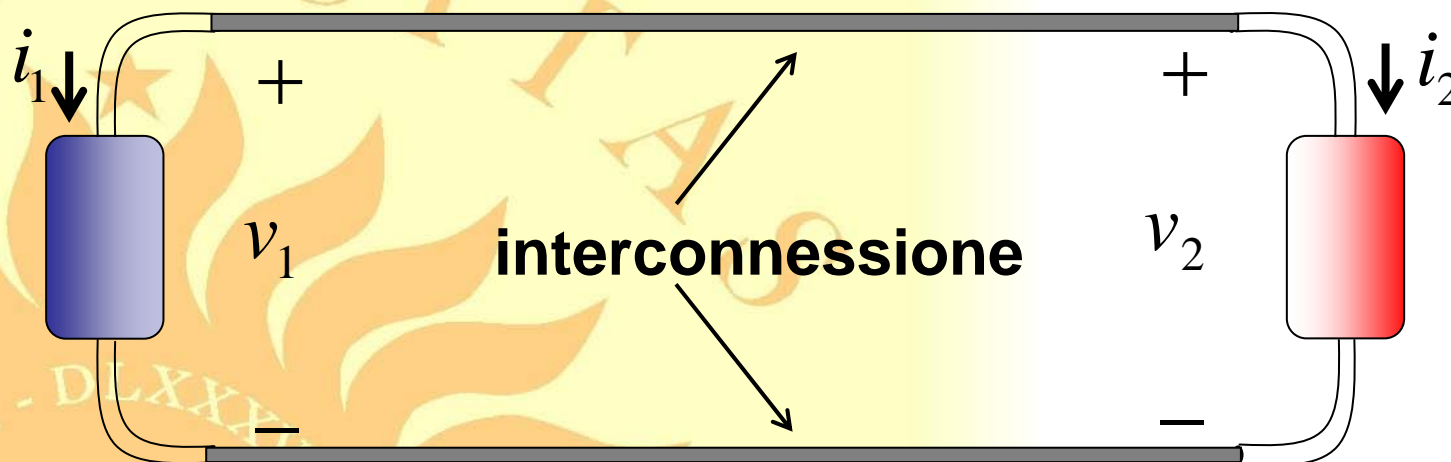
Parte I: Modelli nel dominio della frequenza e nel dominio del tempo. Circuiti equivalenti nel dominio del tempo.

Parte II: Analisi qualitativa e quantitativa di reti di elementi distribuiti e concentrati.



Effetti delle interconnessioni

Modello di una interconnessione



Modelli concentrati:

$$i_1 + i_2 = 0$$

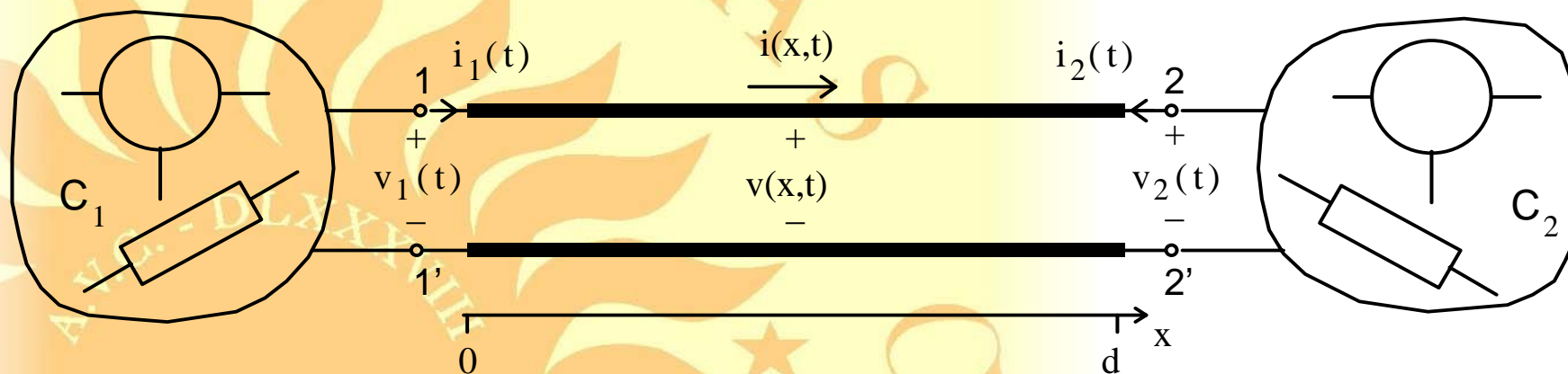
$$v_1 - v_2 = 0$$

Modelli distribuiti e full-wave

$$i_1 + i_2 \neq 0$$

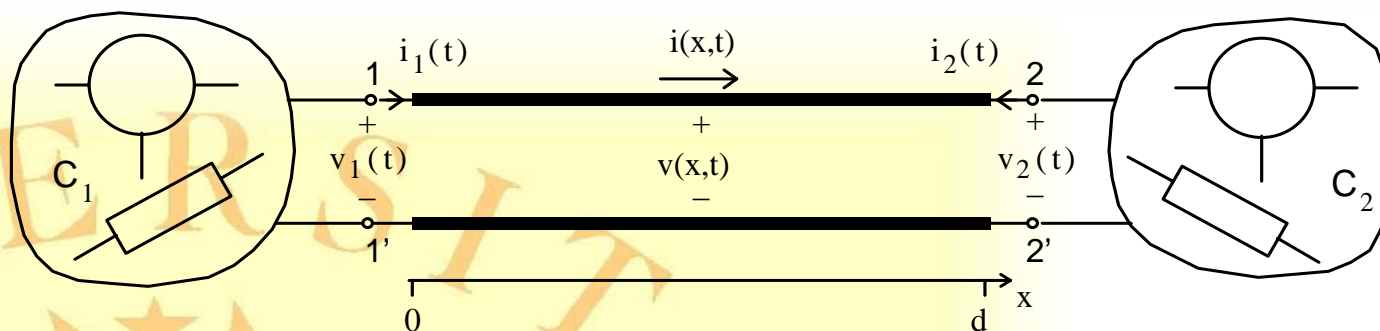
$$v_1 - v_2 \neq 0$$

Reti composte da linee di trasmissione lineari e bipoli non lineari concentrati



Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



Leggi di Kirchhoff, relazioni caratteristiche, condizioni iniziali

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned}$$

Condizioni iniziali

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= v_0(x) \\ i(x, 0) &= i_0(x) \end{aligned}$$

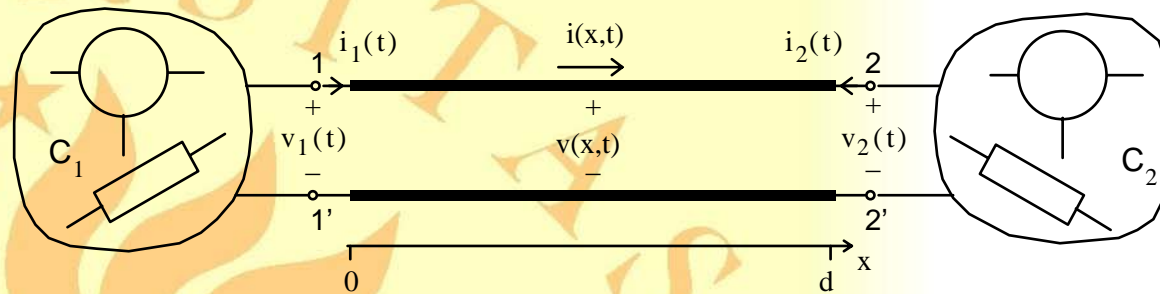
Leggi di Kirchhoff, relazioni caratteristiche, condizioni iniziali

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v(0, t) \\ i_1(t) &= i(0, t) \end{aligned}$$

Condizioni al contorno

$$\begin{aligned} v(d, t) &= v_2(t) \\ -i(d, t) &= i_2(t) \end{aligned}$$

Formulazione del problema



Elementi
concentrati lineari

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

TL lineari

$$\frac{dV(x;s)}{dx} = Z(s)I(x;s)$$

$$\frac{dI(x;s)}{dx} = Y(s)V(x;s)$$

Elementi
concentrati non
lineari

$$f_k[v_k(\cdot), i_k(\cdot), t] = 0$$

Formulazione del problema

Elementi
concentrati lineari

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

TL lineari

$$\frac{dV(x; s)}{dx} = Z(s)I(x; s)$$

$$\frac{dI(x; s)}{dx} = Y(s)V(x; s)$$

Elementi
concentrati non
lineari

$$f_k[v_k(\cdot), i_k(\cdot), t] = 0$$

Il dominio della
frequenza è
naturalmente adatto a
descrivere le linee



Le simulazioni vanno
effettuate nel dominio
del tempo

Due approcci diversi

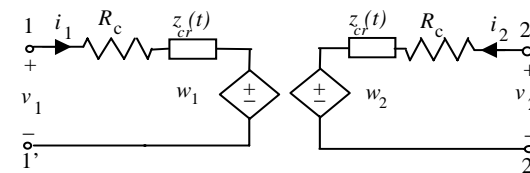
Riduzione d'ordine del
modello complessivo:
viene modellata l'intera
sottorete lineare
es.: formulazione MNA

$$\underline{Y}(s)\mathbf{V}(s) = \mathbf{I}(s)$$

Macromodello

vengono modellate le
singole linee

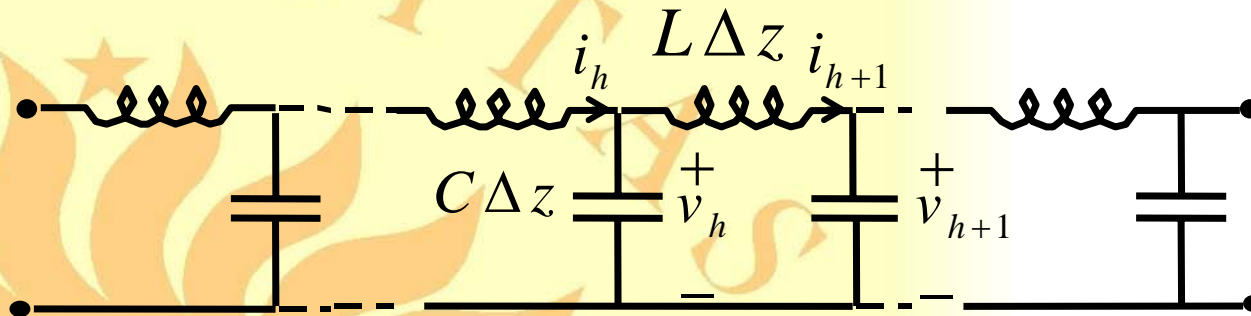
es.: formulazione MoC



Macromodeling: due approcci diversi

- **Modelli time-space** (rappresentazione del comportamento dinamico ad ogni ascissa)
 - **Segmentazione** (cascata di celle a parametri concentrati)
 - **Discretizzazione delle equazioni** (FD, FEM, Wavelet, Chebishev, metodo delle caratteristiche, metodo state-based, ...)
- **Modelli time-only** (rappresentazione del comportamento dinamico alle terminazioni)
 - **Approssimazione in frequenza** (Padé, moment matching, ...)
 - **Metodi convolutivi** (rappresentazioni ingresso-stato-uscita, rappresentazioni ingresso-uscita, ...)

Tecnica della segmentazione



Segmenti necessari per un
segnale con rise-time t_r
(banda a 3 dB): $N \geq 10 \frac{T}{t_r}$

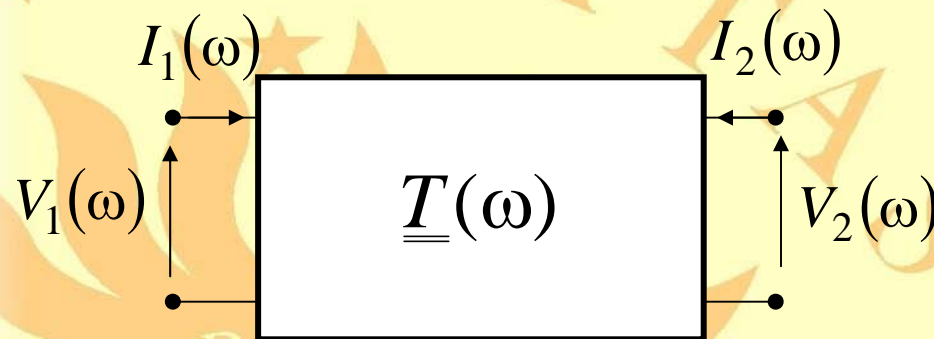
$$\begin{aligned}
 t_r &= 0.2ns & l &= 10cm \\
 C &= 1pF/cm & L &= 5nH/cm \\
 N &\geq 35
 \end{aligned}$$

☺ **semplice**

☹ **N elevati, scarsa accuratezza**

Metodi convolutivi: ingresso-uscita

Matrice di trasmissione



$$\underline{k}(\omega) = -j[\underline{Z}(\omega)\underline{Y}(\omega)]^{-1/2}$$

$$\underline{Z}_c(\omega) = [\underline{Z}(\omega)\underline{Y}(\omega)]^{-1/2} \underline{Z}(\omega)$$

$$T_{11}(\omega) = T_{22}(\omega) = \cos(\underline{k}(\omega)l)$$

$$T_{12}(\omega) = -j \sin(\underline{k}(\omega)l) \underline{Z}_c(\omega)$$

$$T_{21}(\omega) = -j \sin(\underline{k}(\omega)l) \underline{Z}_c^{-1}(\omega)$$

$$V_2(\omega) = T_{11}(\omega)V_1(\omega) + T_{12}(\omega)I_1(\omega)$$

$$-I_2(\omega) = T_{21}(\omega)V_1(\omega) + T_{22}(\omega)I_1(\omega)$$

- ☺ Analisi accurata nel DF ☹ convoluzioni temporali nel DT
 ☺ Cascata di linee ☹ identificazione delle risposte

Linea di trasmissione ideale singola

Soluzione del caso ideale

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Velocità di propagazione}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0$$

Forma viaggiante (d'Alembert)

$$f(x, t) = F^+ \left(t - x/c + \alpha^+ \right) + F^- \left(t + x/c + \alpha^- \right)$$

Le linee ideali non hanno perdite nè dispersione

Soluzione del caso ideale

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$v(x, t) = v^+(t - x/c + \alpha^+) + v^-(t + x/c + \alpha^-)$$

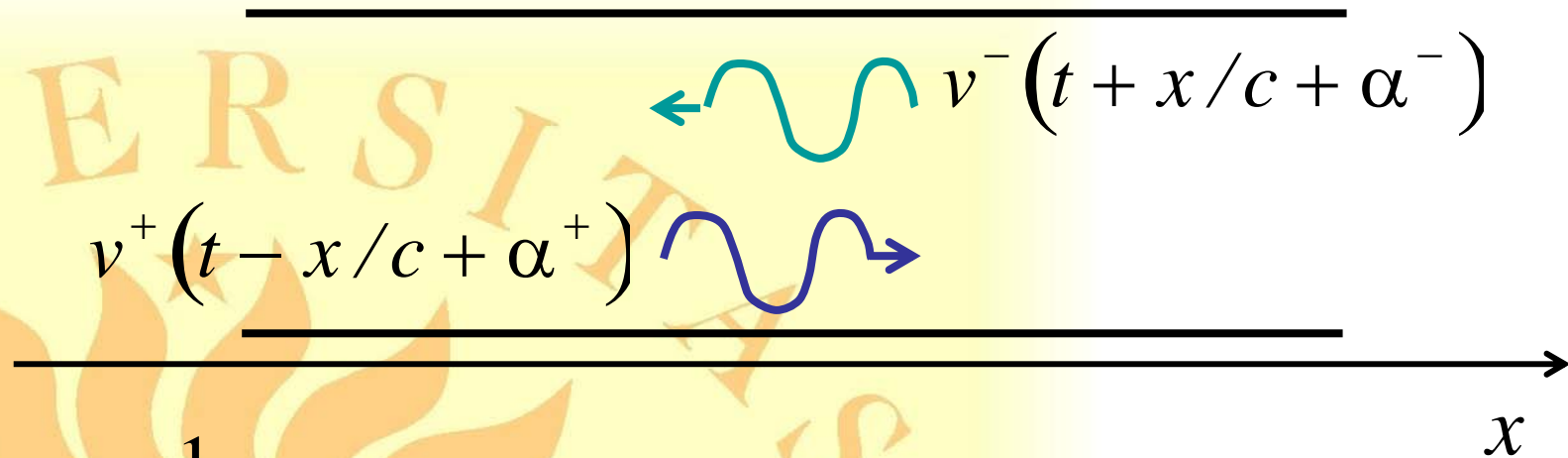
$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + \alpha^+) - v^-(t + x/c + \alpha^-)]$$

impedenza caratteristica $R_c = \sqrt{L/C}$

$v^+ = v^+(\tau)$ e $v^- = v^-(\tau)$ sono funzioni arbitrarie dipendenti dalle condizioni al contorno e iniziali

α^+ e α^- sono costanti arbitrarie

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni
Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

velocità di propagazione

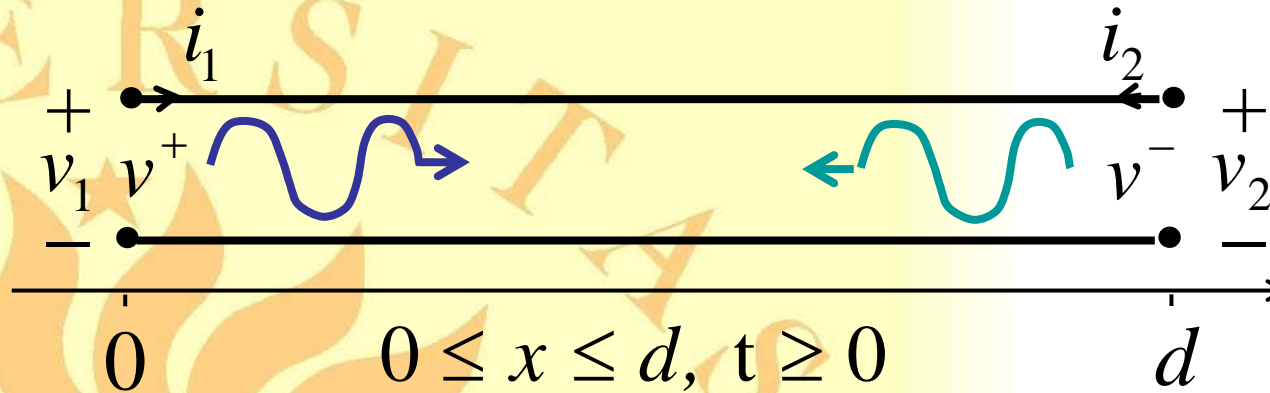
$$R_c = \sqrt{L/C}$$

impedenza caratteristica

$$v(x, t) = v^+(t - x/c + \alpha^+) + v^-(t + x/c + \alpha^-)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + \alpha^+) - v^-(t + x/c + \alpha^-)]$$

Linea di lunghezza finita

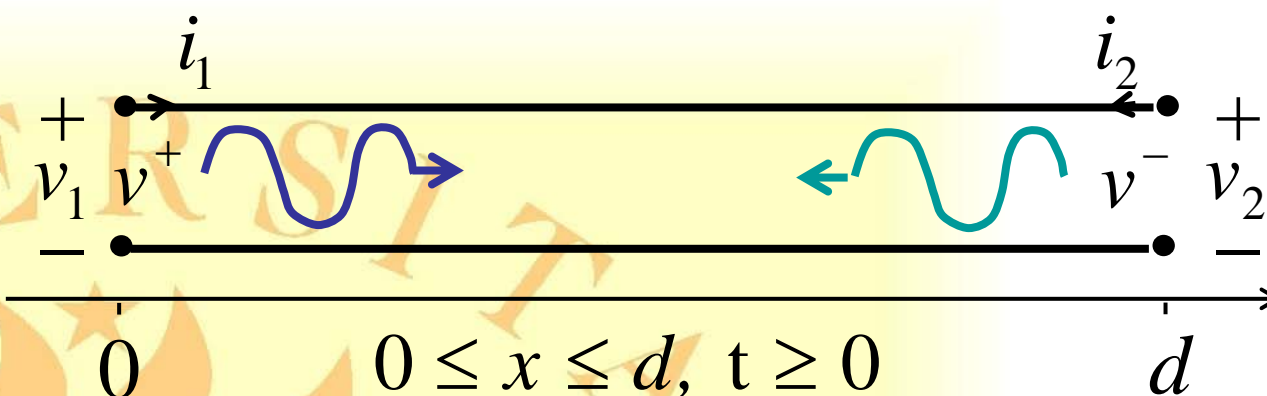


Tempo di transito $T = d/c$

$$\alpha^+ = T, \alpha^- = 0$$

$$v(x, t) = v^+(t - x/c + T) + v^-(t + x/c)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + T) - v^-(t + x/c)]$$



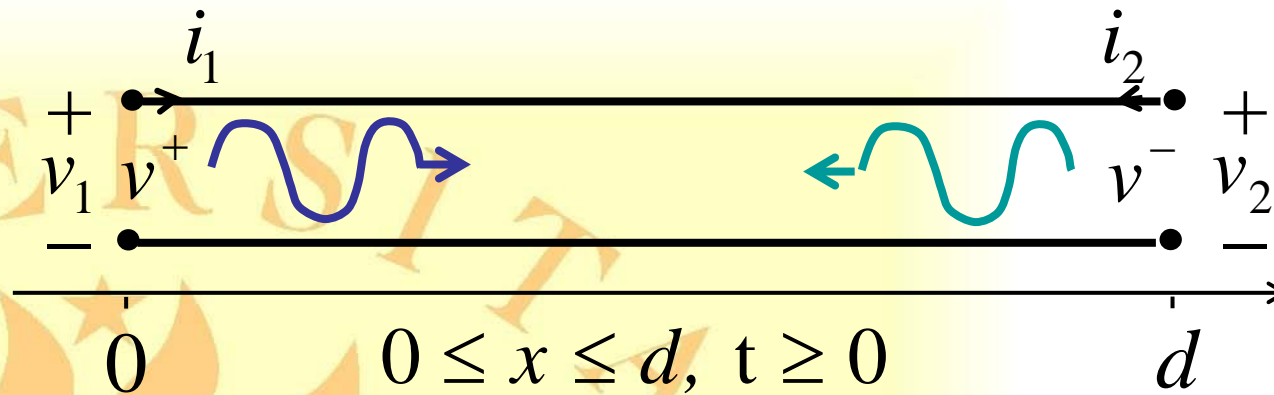
$v^+(t)$ e $v^-(t)$ sono definite per $0 \leq t < +\infty$

$v^+(t)$ è l'onda progressiva a $x=d$;

$v^-(t)$ è l'onda regressiva a $x=0$.

$$v(x, t) = v^+(t - x/c + T) + v^-(t + x/c)$$

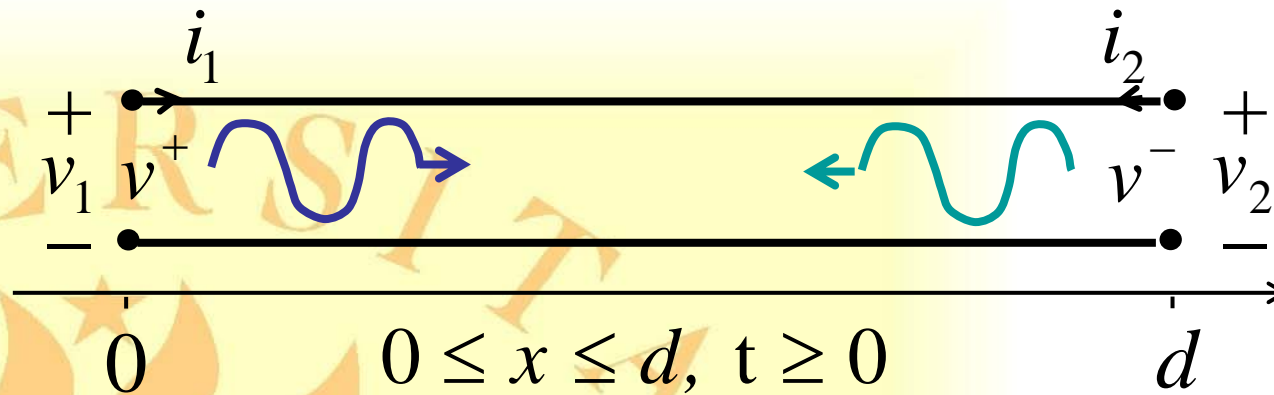
$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + T) - v^-(t + x/c)]$$



dalle condizioni iniziali: $v^+(t)$ e $v^-(t)$ per $0 \leq t \leq T$

$$v_0^+(t) = \frac{1}{2} \{v_0[c(T-t)] + R_c i_0[c(T-t)]\}$$

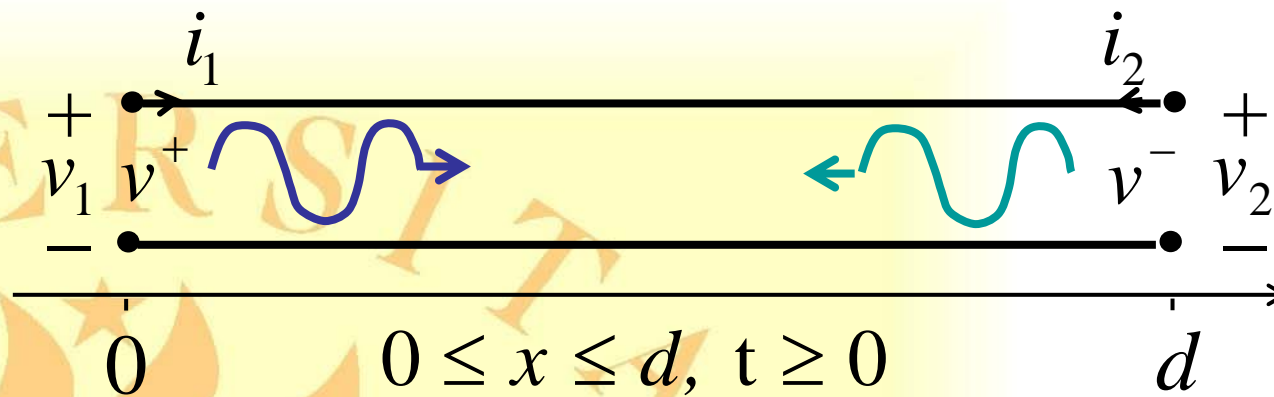
$$v_0^-(t) = \frac{1}{2} \{v_0(ct) - R_c i_0(ct)\}$$



Le grandezze elettriche terminali sono esprimibili come:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v^+(t+T) + v^-(t) \\ R_c i_1(t) &= v^+(t+T) - v^-(t) \end{aligned} \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v^+(t-x/c+T) + v^-(t+x/c) \\ i(x,t) &= \frac{1}{R_c} [v^+(t-x/c+T) - v^-(t+x/c)] \end{aligned}$$



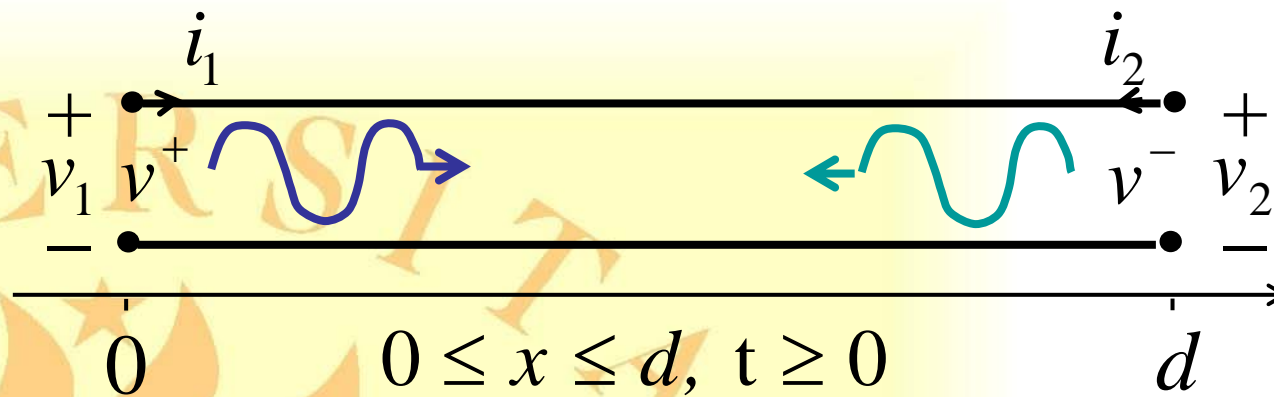
Le grandezze elettriche terminali sono esprimibili come:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v^+(t) + v^-(t+T) \\ -R_c i_2(t) &= v^+(t) - v^-(t+T) \quad t \geq 0 \quad (\text{destra}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v^+(t - x/c + T) + v^-(t + x/c) \\ i(x,t) &= \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + T) - v^-(t + x/c)] \end{aligned}$$

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$$v_1(t) = v^+(t+T) + v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{destra})$$

$$R_c i_1(t) = v^+(t+T) - v^-(t)$$

(sinistra)

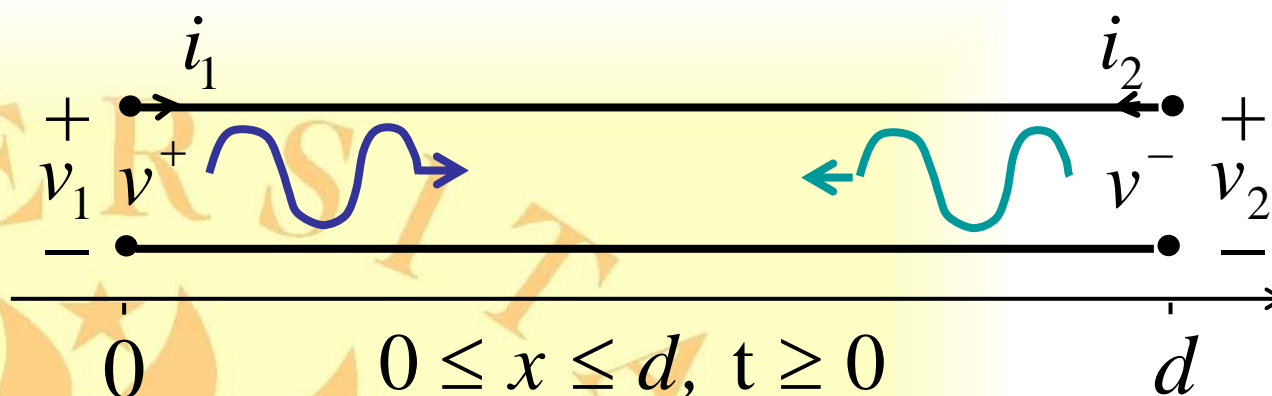
$$v_2(t) = v^+(t) + v^-(t+T) \quad t \geq 0$$

$$-R_c i_2(t) = v^+(t) - v^-(t+T)$$

$$\begin{cases} v^+(t) = v_0^+(t) \\ v^-(t) = v_0^-(t) \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$$v_1(t) = v^+(t+T) + v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

$$v_1(t) = R_c i_1(t) + 2v^-(t)$$

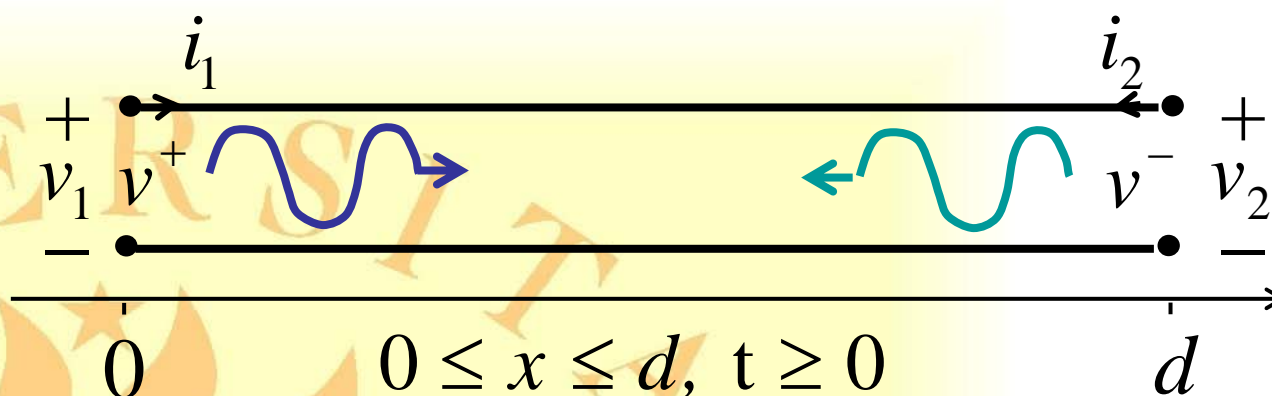
(destra)

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v^+(t) + v^-(t+T) \\ -R_c i_2(t) &= v^+(t) - v^-(t+T) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

$$\begin{cases} v^+(t) = v_0^+(t) \\ v^-(t) = v_0^-(t) \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$$v_1(t) = v^+(t+T) + v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

$$v_1(t) = R_c i_1(t) + 2v^-(t)$$

(destra)

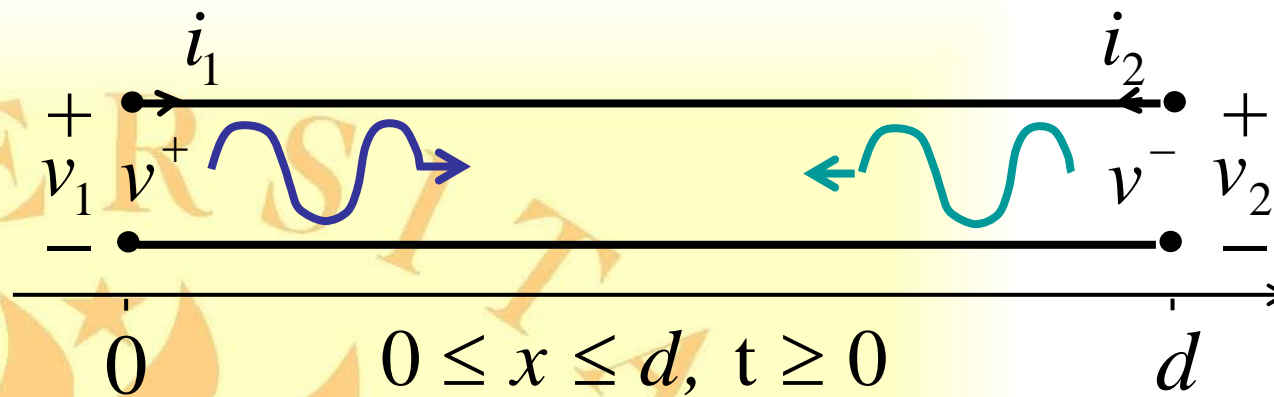
$$v_2(t) = v^+(t) + v^-(t+T) \quad t \geq 0$$

$$v_2(t) = R_c i_2(t) + 2v^+(t)$$

$$\begin{cases} v^+(t) = v_0^+(t) \\ v^-(t) = v_0^-(t) \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$$v^+(t+T) = v_1(t) - v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

$$v_1(t) = R_c i_1(t) + 2v^-(t)$$

(destra)

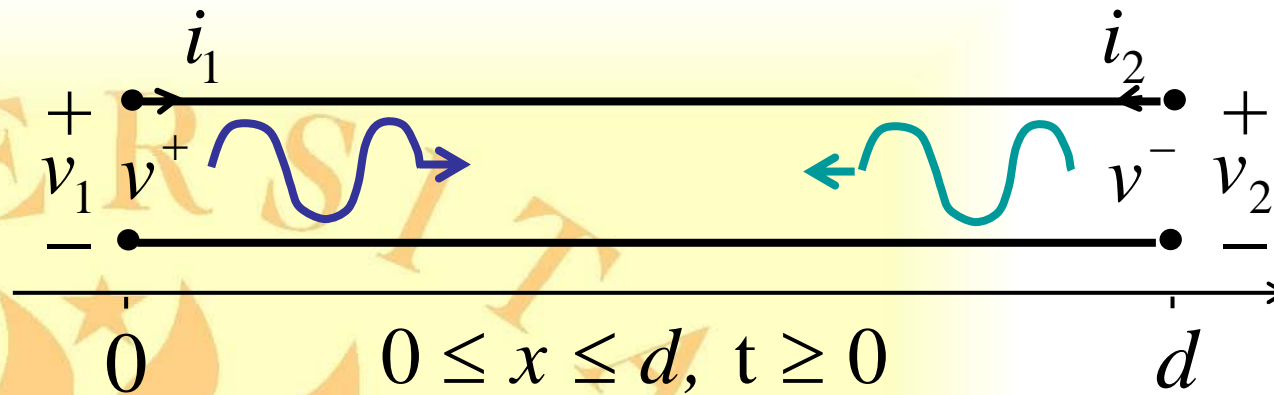
$$v_2(t) = v^+(t) + v^-(t+T) \quad t \geq 0$$

$$v_2(t) = R_c i_2(t) + 2v^+(t)$$

$$\begin{cases} v^+(t) = v_0^+(t) \\ v^-(t) = v_0^-(t) \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$$v^+(t+T) = v_1(t) - v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

$$v_1(t) = R_c i_1(t) + 2v^-(t)$$

(destra)

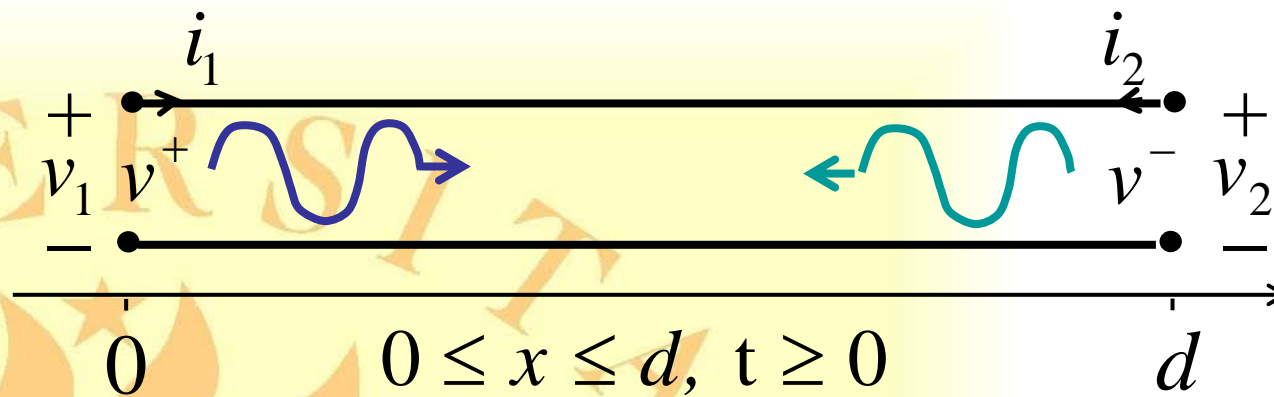
$$v^-(t+T) = v_2(t) - v^+(t) \quad t \geq 0$$

$$v_2(t) = R_c i_2(t) + 2v^+(t)$$

$$\begin{cases} v^+(t) = v_0^+(t) \\ v^-(t) = v_0^-(t) \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$

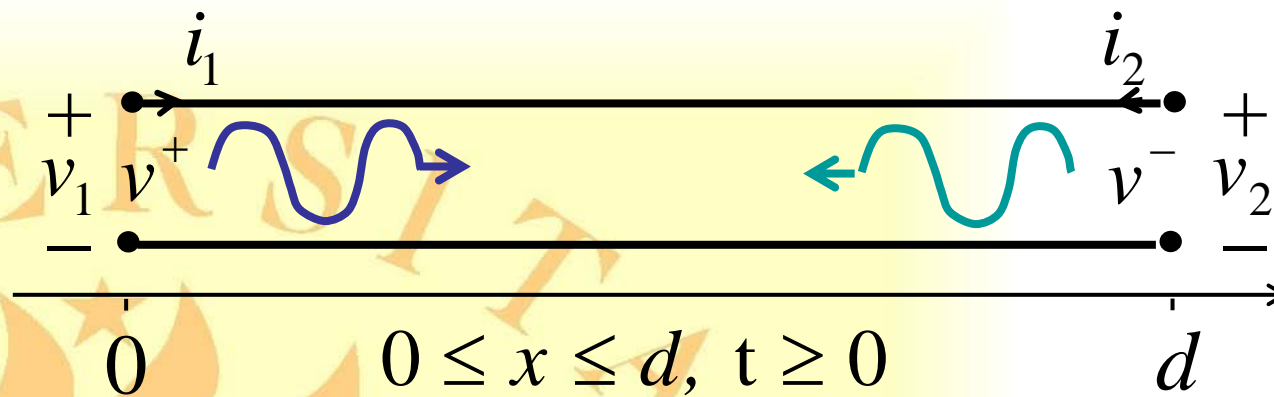
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$$\begin{aligned} v_1(t) &= R_c i_1(t) + 2v^-(t) \\ v_2(t) &= R_c i_2(t) + 2v^+(t) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} v^+(t+T) &= v_1(t) - v^-(t) \\ v^-(t+T) &= v_2(t) - v^+(t) \end{aligned} \quad t \geq 0 \quad \left\{ \begin{aligned} v^+(t) &= v_0^+(t) \\ v^-(t) &= v_0^-(t) \end{aligned} \right. \quad 0 \leq t \leq T$$

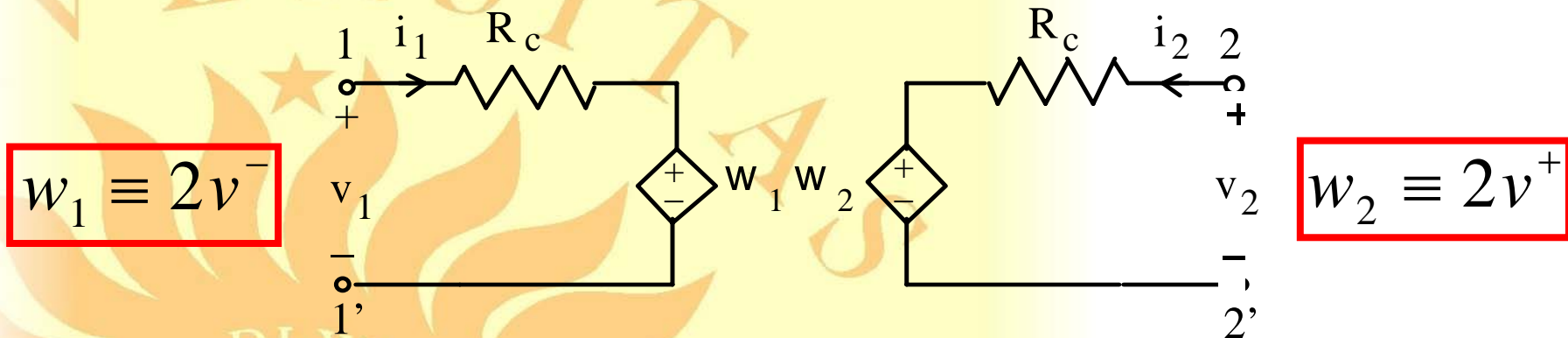


$v^+(t)$ e $v^-(t)$ sono variabili di stato della linea, infatti:

$$w_{em}(x, t) = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cv^2$$

$$= C[v^+(t - x/c + T)]^2 + C[v^-(t + x/c)]^2$$

Linea di lunghezza finita: doppio-bipolo equivalente (Branin 1967)



legge di controllo dei generatori pilotati:

$$\begin{aligned} w_1(t+T) &= 2v_2(t) - w_2(t) \\ w_2(t+T) &= 2v_1(t) - w_1(t) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

$$\begin{cases} w_1(t) = 2v_0^-(t) \\ w_2(t) = 2v_0^+(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

Risoluzione iterativa

$$iT \leq t \leq (i+1)T$$

$w_1(t)$ dipende da $v_1(t-T)$ e $v_2(t-T)$

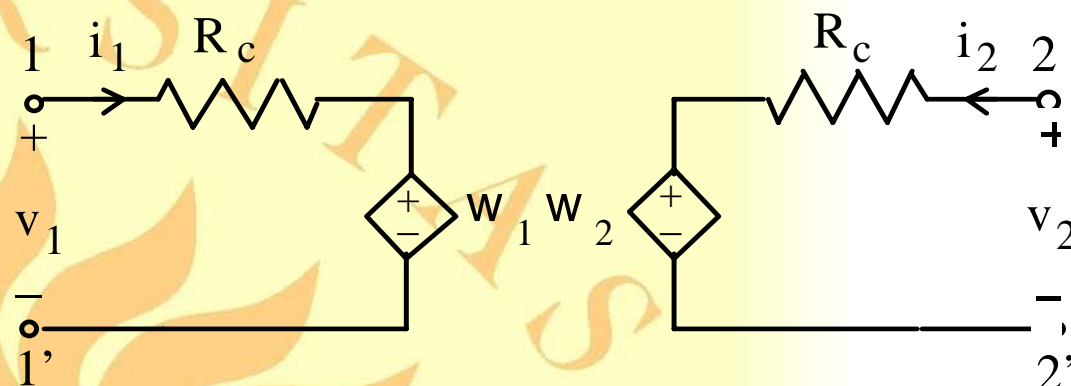
$w_2(t)$ dipende da $w_1(t-T)$ e $v_2(t-T)$

legge di controllo dei generatori pilotati:

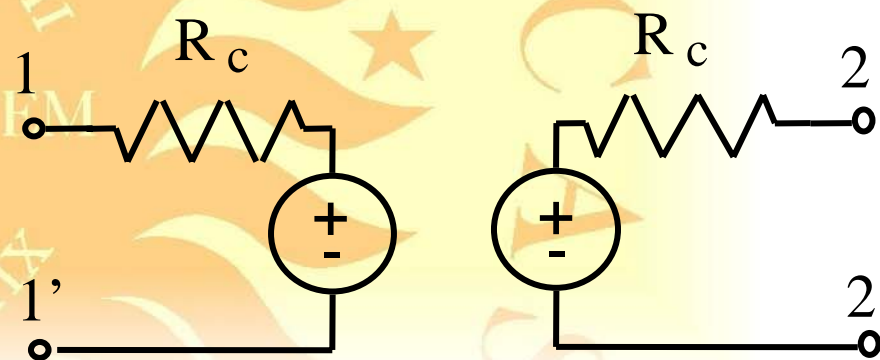
$$\begin{aligned} w_1(t+T) &= 2v_2(t) - w_2(t) \\ w_2(t+T) &= 2v_1(t) - w_1(t) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

$$\begin{cases} w_1(t) = 2v_0^-(t) \\ w_2(t) = 2v_0^+(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

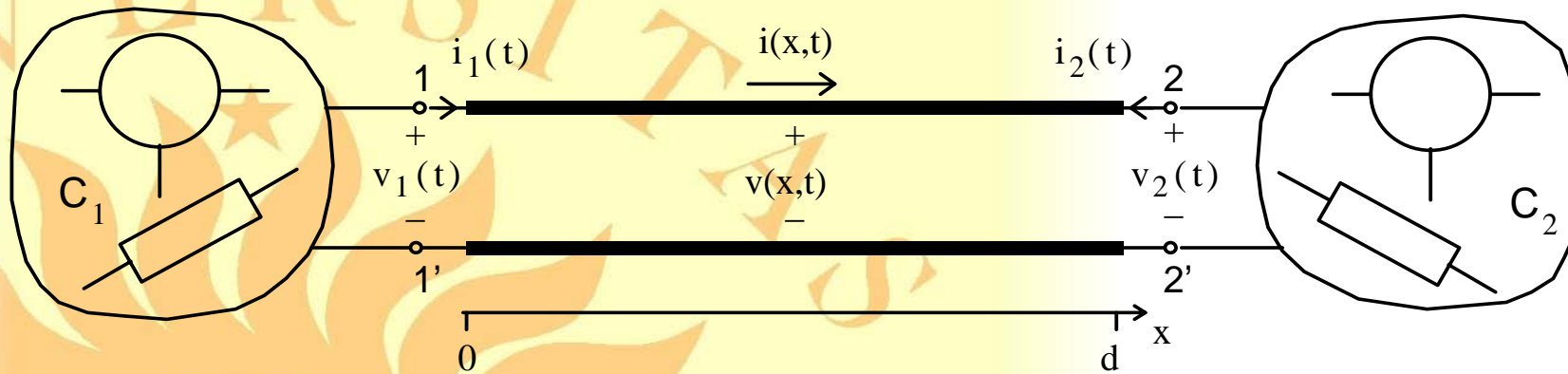
Risoluzione iterativa: approccio SPICE



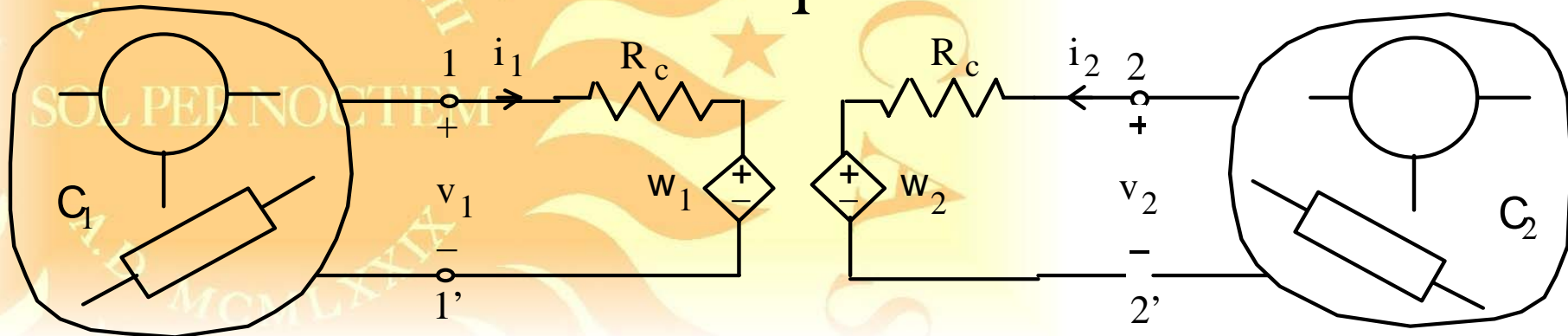
$$iT \leq t \leq (i+1)T \quad \text{per } i = 0, 1, 2, \dots$$



Reti composte da linee di trasmissione lineari e bipoli non lineari concentrati



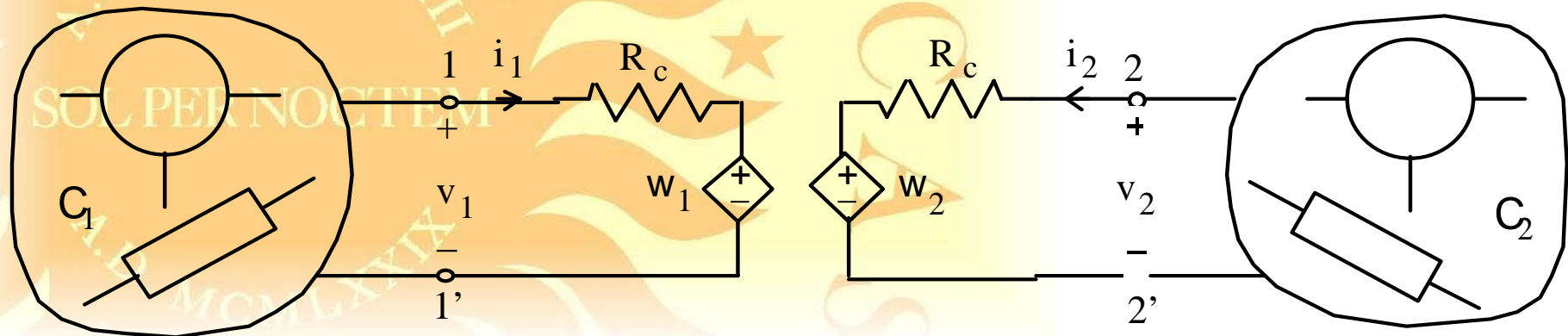
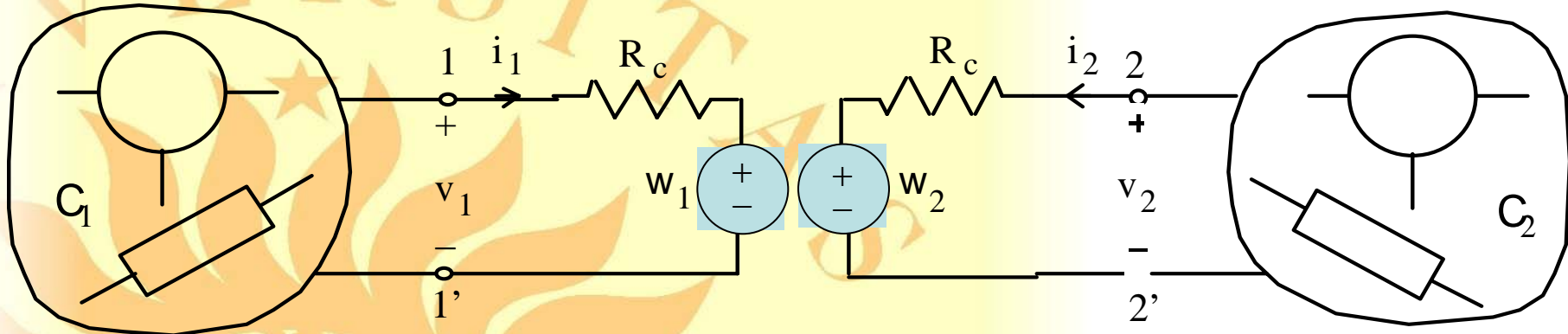
circuito equivalente



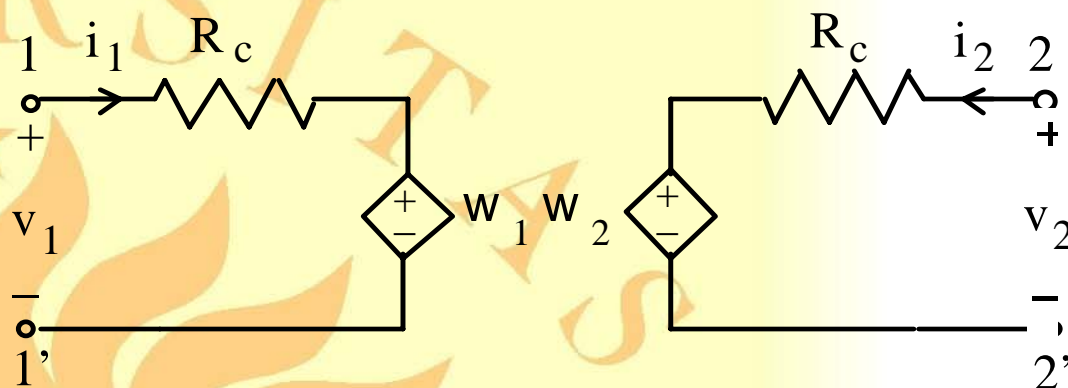
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006

$$iT \leq t \leq (i + 1)T \text{ per } i = 0, 1, 2, \dots$$

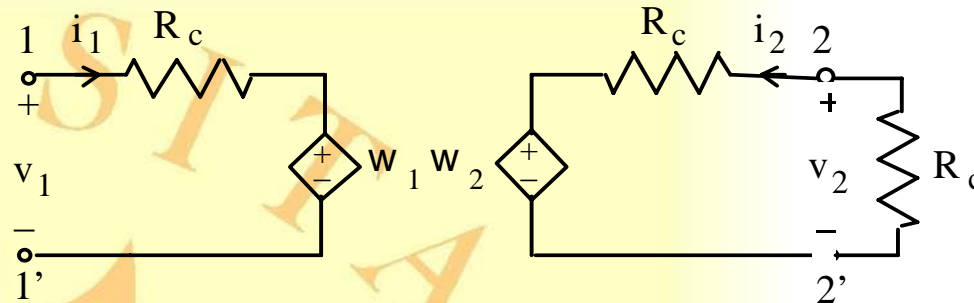


Funzionamento a regime



Questo circuito non è adatto a descrivere condizioni di regime (sinusoidale, periodico, ...)

Linea adattata



$$\begin{cases} v_2 = R_c i_2 + w_2 \\ v_2 = -R_c i_2 \end{cases} \Rightarrow 2v_2 = w_2$$

$$w_1(t+T) = 2v_2(t) - w_2(t)$$

$$w_1(t+T) = 0 \quad t \geq 0$$

$$\Downarrow$$

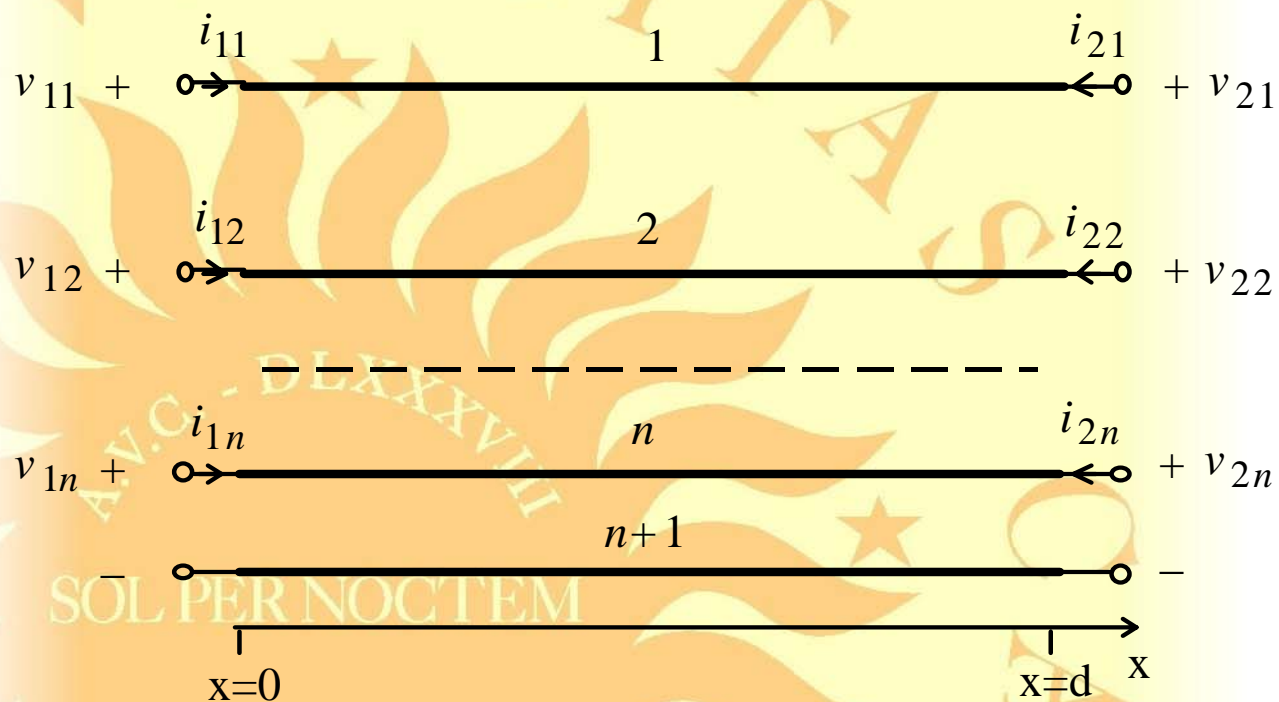
$$w_1(t) = 0 \quad t \geq T$$

$$v^-(t) = 0 \quad t \geq T$$



Linea di trasmissione ideale multiconduttore

Linea multiconduttore ideale



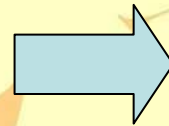
$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t}$$

Linea multiconduttore ideale

$$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} - \mathbf{LC} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{T}_v \mathbf{u}(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - \left(\mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{T}_v \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

Linea multiconduttore ideale: diagonalizzazione

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - (\mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{T}_v) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{T}_v = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

$$(\mathbf{L} \mathbf{C}) \mathbf{e} = \beta \mathbf{e}$$

$$\mathbf{T}_v = |\mathbf{e}_1 : \mathbf{e}_2 : \dots : \mathbf{e}_n|$$

$$c_h = \frac{1}{\sqrt{\beta_h}} > 0$$

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} - \beta_h \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = 0$$

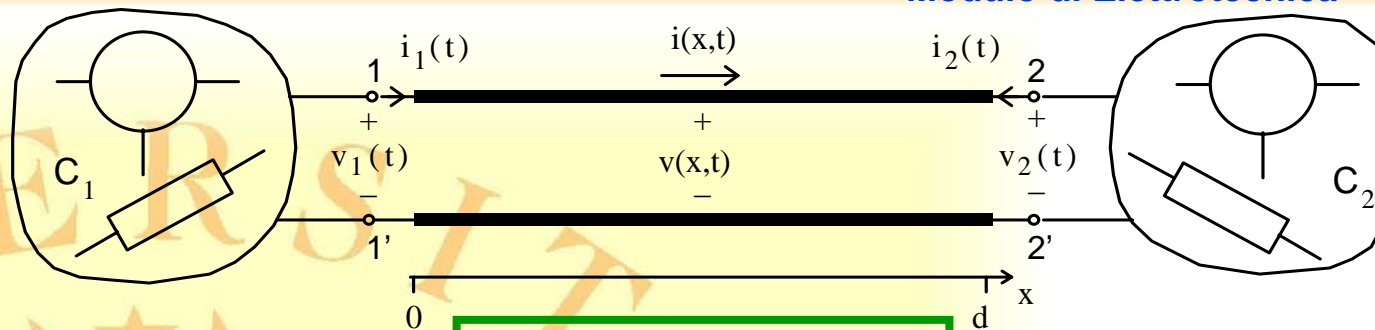
$$\mathbf{v}(x, t) = \sum_{h=1}^n \mathbf{e}_h \left[u_h^+(t - x/c_h + \alpha_h^+) + u_h^-(t + x/c_h + \alpha_h^-) \right]$$

$$\mathbf{i}(x, t) = \mathbf{R}_c^{-1} \sum_{h=1}^n \mathbf{e}_h \left[u_h^+(t - x/c_h + \alpha_h^+) - u_h^-(t + x/c_h + \alpha_h^-) \right]$$

Linea di trasmissione singola con perdite

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



Leggi di Kirchhoff, relazioni caratteristiche, condizioni iniziali

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv$$

Condizioni iniziali

$$v(x, 0) = v_0(x)$$

$$i(x, 0) = i_0(x)$$

Leggi di Kirchhoff, relazioni caratteristiche, condizioni iniziali

$$v_1(t) = v(0, t)$$

$$i_1(t) = i(0, t)$$

Condizioni al contorno

$$v(d, t) = v_2(t)$$

$$-i(d, t) = i_2(t)$$

Soluzione delle equazioni TL

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv \end{aligned}$$

$$c^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = \frac{R}{L}, \quad \beta = \frac{G}{C}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha\beta v = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha \beta v = 0$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \quad \nu = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)$$

$$v(x, t) = e^{-\mu t} u(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \nu^2 u$$

Condizioni di Heaviside $v = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v^2 u = 0$$

$$u(x, t) = U^\pm \left(t \mp x/c + \alpha^\pm \right)$$

$$v(x, t) = e^{-\mu t} v^\pm \left(t \mp x/c + \alpha^\pm \right)$$

Le perdite introducono solo attenuazione

Quando $v \neq 0$, la soluzione generale dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v^2 u$$

non può essere posta nella forma di d'Alembert perchè la velocità di fase dipende dalla frequenza.

Per linee con parametri dipendenti da frequenza, l'attenuazione stessa dipende dalla frequenza.

Possiamo usare lo stesso approccio visto per le linee ideali:

- (i) Caratterizzare la linea nel dominio di Laplace con relazioni puramente algebriche
- (ii) derivare il modello nel DT applicando il teorema di convoluzione

Equazioni costitutive nel dominio di Laplace:

$$Z = Z(s) \quad \text{p.u.l. line impedance}$$

$$Y = Y(s) \quad \text{p.u.l. line admittance}$$

dipendono dalla natura fisica delle interconnessioni e dalle frequenze di lavoro

$$\frac{dV}{dx} = -Z(s)I$$

$$\frac{dI}{dx} = -Y(s)V$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - k^2(s)V = 0$$

$$I = -\frac{1}{Z_c(s)} \frac{dV}{dx}$$

$$k(s) = \sqrt{Z(s)Y(s)}$$

$$Z_c(s) = Y^{-1}(s)k(s)$$

Costante di propagazione

Impedenza caratteristica

$$V(x, s) = V^+(s)e^{-k(s)(x-x^+)} + V^-(s)e^{k(s)(x-x^-)}$$

$$I(x; s) = \frac{1}{Z_c(s)} \left[V^+(s)e^{-k(s)(x-x^+)} - V^-(s)e^{k(s)(x-x^-)} \right]$$

Linee di trasmissione RLGC

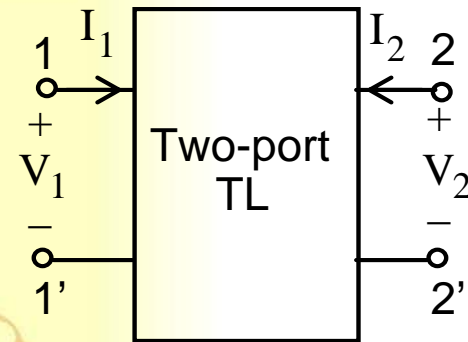
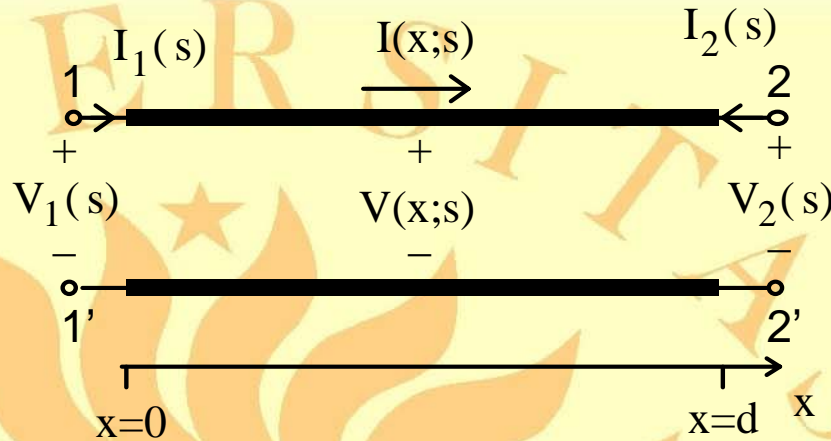
$$Z(s) = R + sL \quad Y(s) = G + sC$$

$$Z_c(s) = \sqrt{\frac{R + sL}{G + sC}} = R_c \sqrt{\frac{1 + (\mu + \nu)/s}{1 + (\mu - \nu)/s}}$$

$$k(s) = \sqrt{(R + sL)(G + sC)} = \frac{s}{c} \sqrt{(1 + \mu/s)^2 - (\nu/s)^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Doppio-bipolo equivalente



$$x^+ = 0, \quad x^- = d$$

$V^+(s)$ è l'onda progressiva a $x=d$;

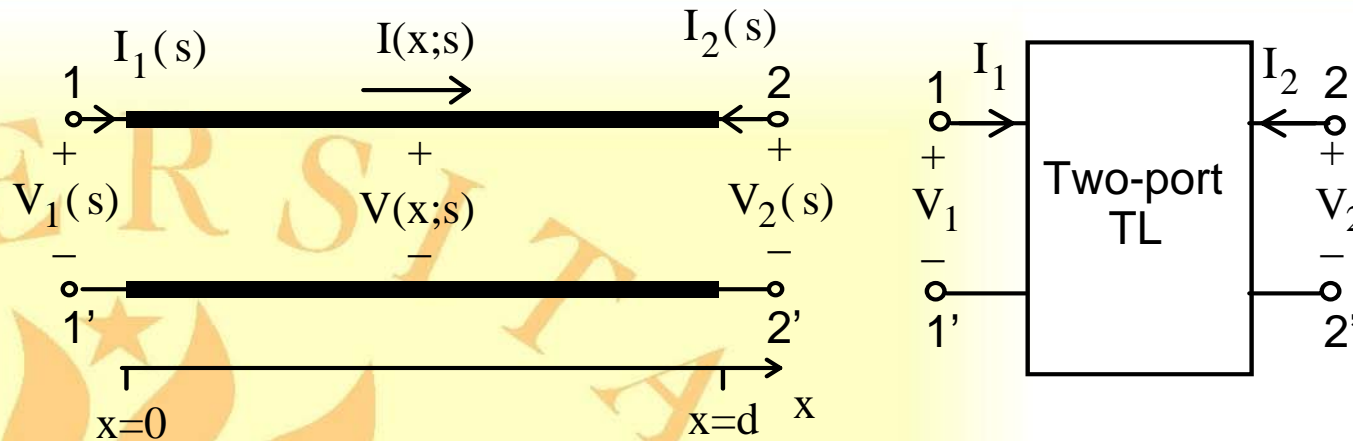
$V^-(s)$ è l'onda regressiva a $x=0$.

$$V(x, s) = V^+(s)e^{-k(s)x} + V^-(s)e^{k(s)(x-d)}$$

$$I(x; s) = \frac{1}{Z_c(s)} \left[V^+(s)e^{-k(s)x} - V^-(s)e^{k(s)(x-d)} \right]$$

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$P(s) \equiv e^{-dk(s)}$ *operatore di propagazione*

$$V_1(s) = V^+(s) + P(s)V^-(s)$$

$$Z_c(s)I_1(s) = V^+(s) - P(s)V^-(s)$$

(sinistra)

$$V_2(s) = P(s)V^+(s) + V^-(s)$$

$$-Z_c(s)I_2(s) = P(s)V^+(s) - V^-(s)$$

(destra)

Descrizione ingresso-stato-uscita della linea

$$\begin{aligned} V_1(s) &= Z_c(s)I_1(s) + 2P(s)V^-(s) \\ V_2(s) &= Z_c(s)I_2(s) + 2P(s)V^+(s) \end{aligned}$$

Equazioni
di rete

Equazioni di stato
(forma esplicita)

$$\begin{aligned} 2V^+(s) &= V_1(s) + Z_c(s)I_1(s) \\ 2V^-(s) &= V_2(s) + Z_c(s)I_2(s) \end{aligned}$$

Funzioni descrittive:

$Z_c = Y^{-1}\sqrt{ZY}$ *impedenza caratteristica*

$P(s) = \exp(-d\sqrt{ZY})$ *operatore di propagazione*

Descrizione ingresso-stato-uscita della linea

$$V_1(s) = Z_c(s)I_1(s) + W_1(s)$$

$$V_2(s) = Z_c(s)I_2(s) + W_2(s)$$

Equazioni
di rete

Equazioni di stato
(forma implicita)

$$W_2(s) = P(s)[2V_1(s) - W_1(s)]$$

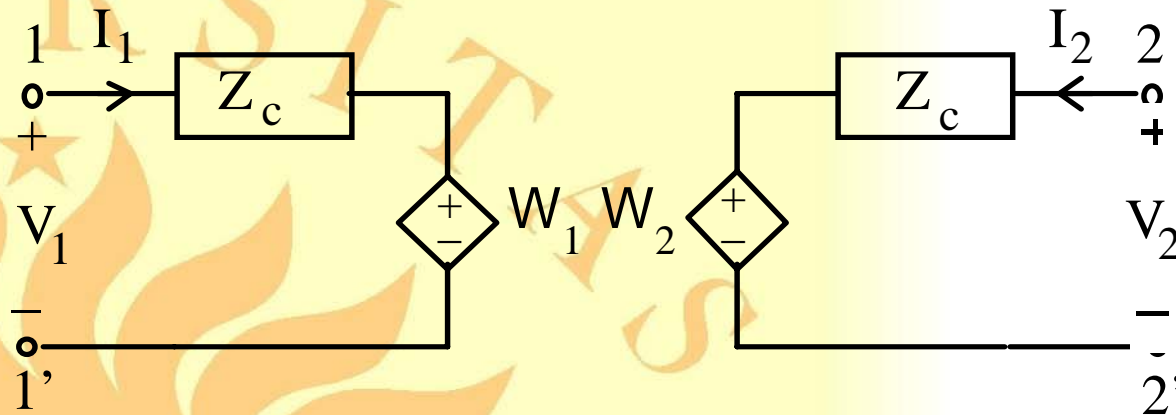
$$W_1(s) = P(s)[2V_2(s) - W_2(s)]$$

dove

$$W_1 \equiv 2P(s)V^-$$

$$W_2 \equiv 2P(s)V^+$$

Doppio-bipolo equivalente nel dominio di Laplace



$$W_2(s) = 2V_1(s) - P(s)W_1(s)$$

$$W_1(s) = 2V_2(s) - P(s)W_2(s)$$

Descrizione ingresso-stato-uscita nel DT

$$\begin{aligned} v_1(t) - \{z_c * i_1\}(t) &= w_1(t) \\ v_2(t) - \{z_c * i_2\}(t) &= w_2(t) \end{aligned}$$

Equazioni
di rete

Equazioni di stato
(forma implicita)

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \{p * (2v_2 - w_2)\}(t) \\ w_2(t) &= \{p * (2v_1 - w_1)\}(t) \end{aligned}$$

Proprietà delle funzioni descrittive: linea RLGC

$$Z(s) = R + sL \quad Y(s) = G + sC$$

$$Z_c(s) = R_c \sqrt{\frac{1 + (\mu + \nu)/s}{1 + (\mu - \nu)/s}}$$

$$P(s) = \exp \left[-sT \sqrt{(1 + \mu/s)^2 - (\nu/s)^2} \right]$$

nel limite ideale:

$$Z_c(s) \rightarrow R_c \quad P(s) \rightarrow \exp(-sT)$$

comportamento asintotico

Sono proprietà generali che non dipendono dalla particolare linea che stiamo considerando

$$Z_c(s) = R_c + Z_{cr}(s) \quad Z_{cr}(s) \approx O(1/s) \quad s \rightarrow \infty$$

$$z_c(t) = R_c \delta(t) + z_{cr}(t)$$

$$P(s) = e^{-(s+\mu)T} [1 + \hat{P}_r(s)] \quad \hat{P}_r(s) \approx O(1/s) \quad s \rightarrow \infty$$

$$p(t) = e^{-\mu T} [\delta(t-T) + \hat{p}_r(t-T)u(t-T)]$$

Linea ideale

$$z_c(t) = R_c \delta(t) \quad \{z_c * i\}(t) = R_c i(t)$$

$$p(t) = \delta(t - T) \quad \{p * w\}(t) = w(t - T)u(t - T)$$

Linea con perdite

Le perdite introducono una “coda”,
responsabile della distorsione

$$z_c(t) = R_c \delta(t) + z_{cr}(t)$$

$$p(t) = e^{-\mu T} [\delta(t - T) + \hat{p}_r(t - T)u(t - T)]$$

le perdite introducono attenuazione

Linea ideale

$$z_c(t) = R_c \delta(t) \quad \{z_c * i\}(t) = R_c i(t)$$

$$p(t) = \delta(t - T) \quad \{p * w\}(t) = w(t - T)u(t - T)$$

Linea con perdite

$$\{z_c * i\}(t) = R_c i(t) + \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \{p * w\}(t) = & e^{-\mu T} w(t - T)u(t - T) + \\ & + \int_0^t \bar{p}(t - T - \tau)u(t - T - \tau)w(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\{z_c * i\}(t) = R_c i(t) + \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i(\tau) d\tau$$

$\{z_c * i\}(t)$ dipende dall'andamento di $i(t)$ nell'intervallo $(0, t)$.

$$\begin{aligned} \{p * w\}(t) = & e^{-\mu T} w(t - T) u(t - T) + \\ & + \int_0^{t-T} \hat{p}(t - T - \tau) u(t - T - \tau) w(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$\{p * w\}(t)$ dipende dall'andamento di $u(t)$ nell'intervallo $(0, t-T)$.

Linea di trasmissione RLGC

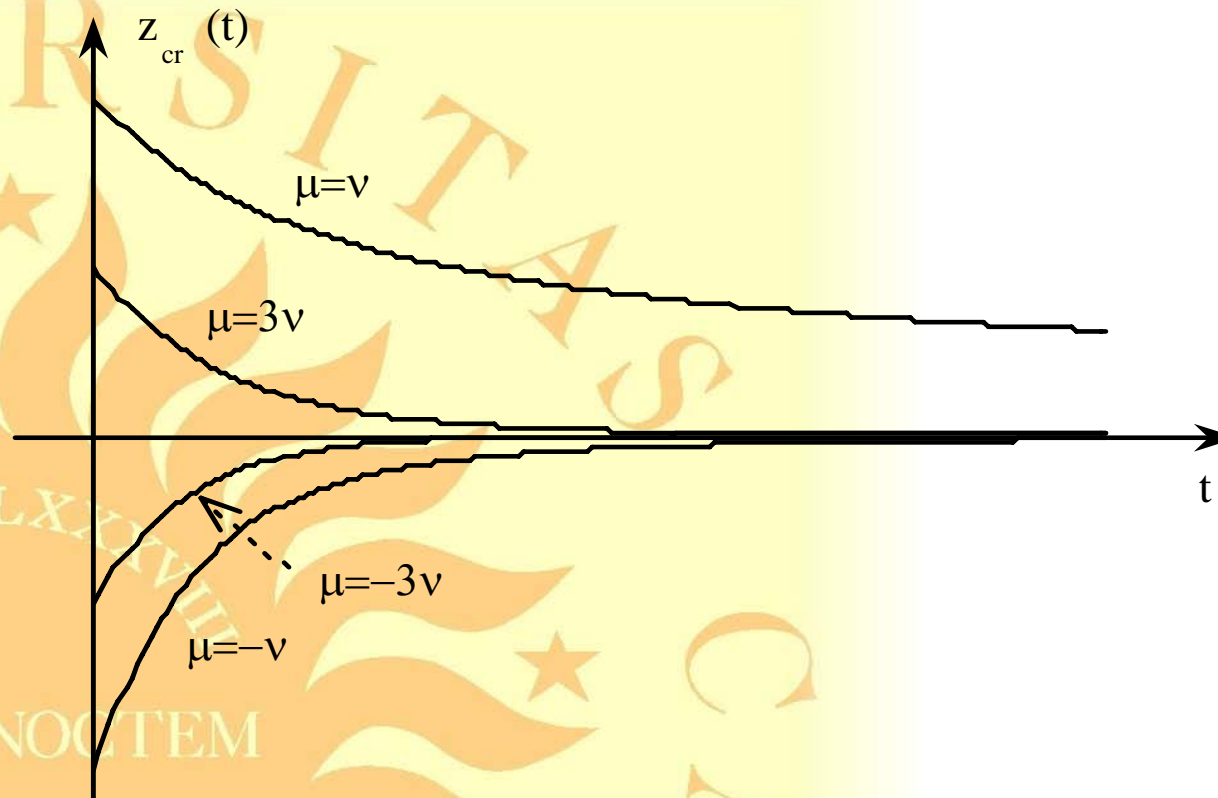
$$z_c(t) = R_c \delta(t) + z_{cr}(t)$$

$$z_{cr}(t) = vR_c e^{-\mu t} [I_0(vt) + I_1(vt)] u(t)$$

$$p(t) = e^{-\mu T} \delta(t - T) + p_r(t - T)$$

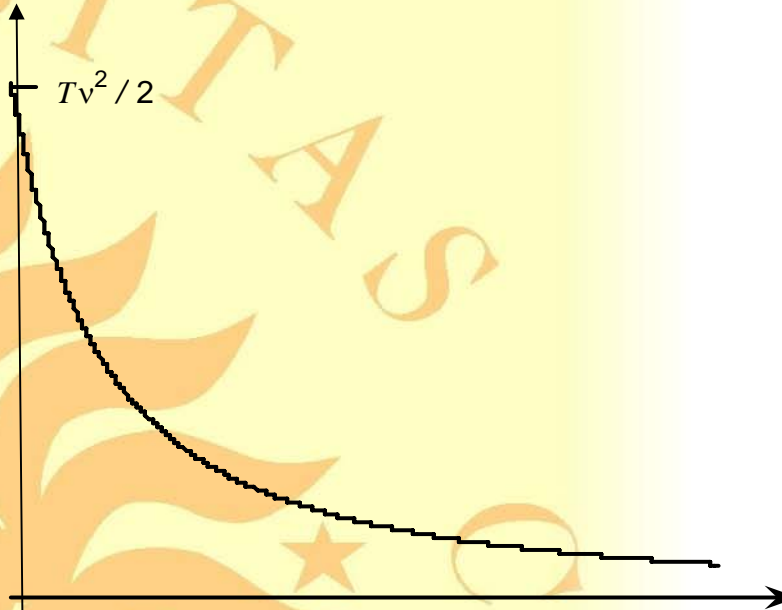
$$p_r(t) = T v e^{-\mu t} \frac{I_1 \left[v \sqrt{(t + T)^2 - T^2} \right]}{\sqrt{(t + T)^2 - T^2}} u(t)$$

Linea di trasmissione RLGC



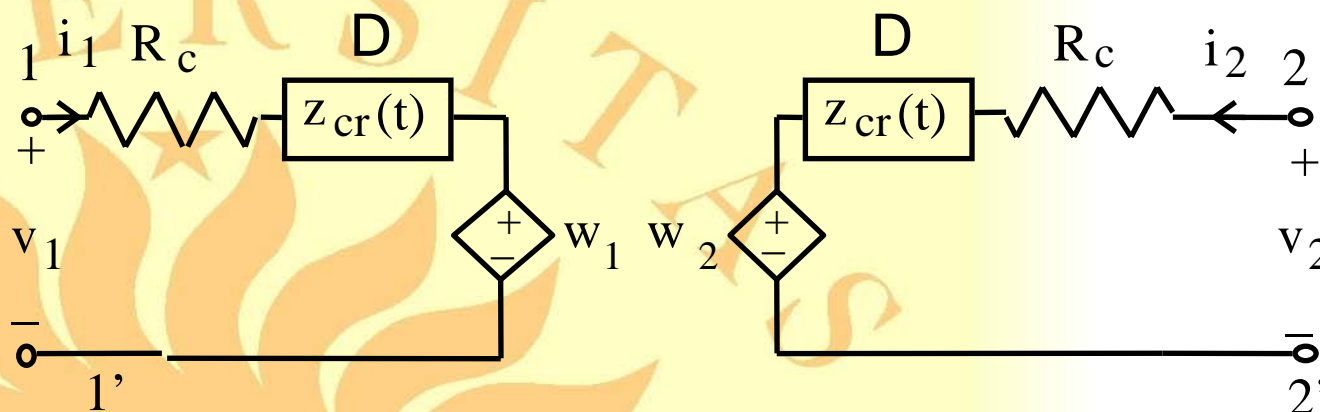
Andamento qualitativo della funzione $z_{cr}(t)$ per diversi valori di μ / v

Linea di trasmissione RLGC

 $p_r(t)$ $Tv^2/2$ 

andamento qualitativo di $p_r(t)$

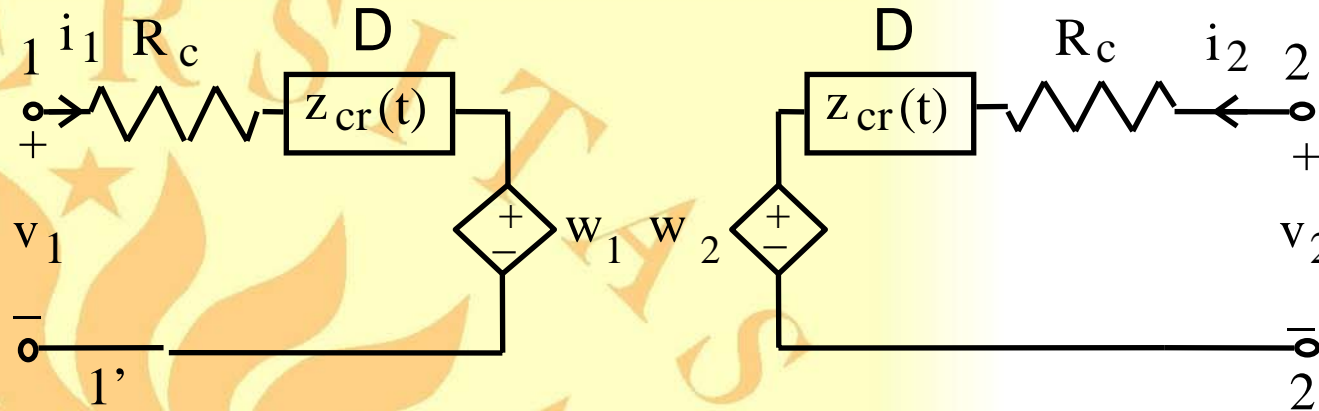
Doppio-bipolo equivalente nel dominio del tempo



$$w_1(t) = [2v_2(t - T) - w_2(t - T)]e^{-\mu T} u(t - T) + u(t - T) \int_0^{t-T} p_r(t - \tau) [2v_2(\tau) - w_2(\tau)] dt,$$

$$w_2(t) = [2v_1(t - T) - w_1(t - T)]e^{-\mu T} u(t - T) + u(t - T) \int_0^{t-T} p_r(t - t) [2v_1(t) - w_1(t)] dt.$$

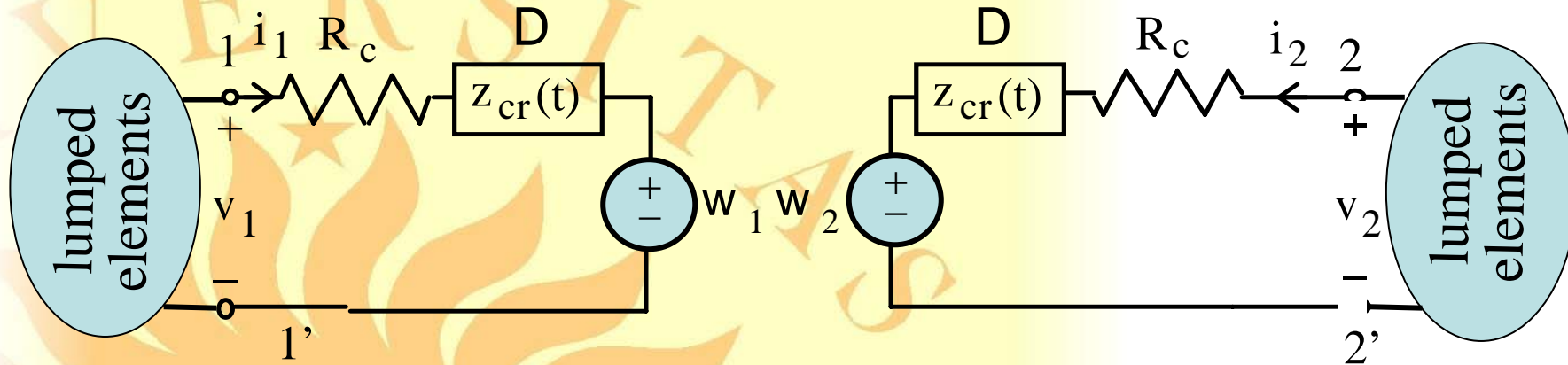
Doppio-bipolo equivalente nel dominio del tempo



Stesse proprietà strutturali del caso ideale: i generatori $w_1(t)$ e $w_2(t)$ all'istante $iT \leq t \leq (i+1)T$ Dipendono dalla soluzione fino all'istante $t-T$

Nota la soluzione per $t \leq iT$, $w_1(t)$ e $w_2(t)$ sono generatori indipendenti in $iT \leq t \leq (i+1)T$

Linea con perdite terminata con bipoli concentrati



$$v_1(t) - R_c i_1(t) - \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i_1(\tau) d\tau = w_1(t)$$

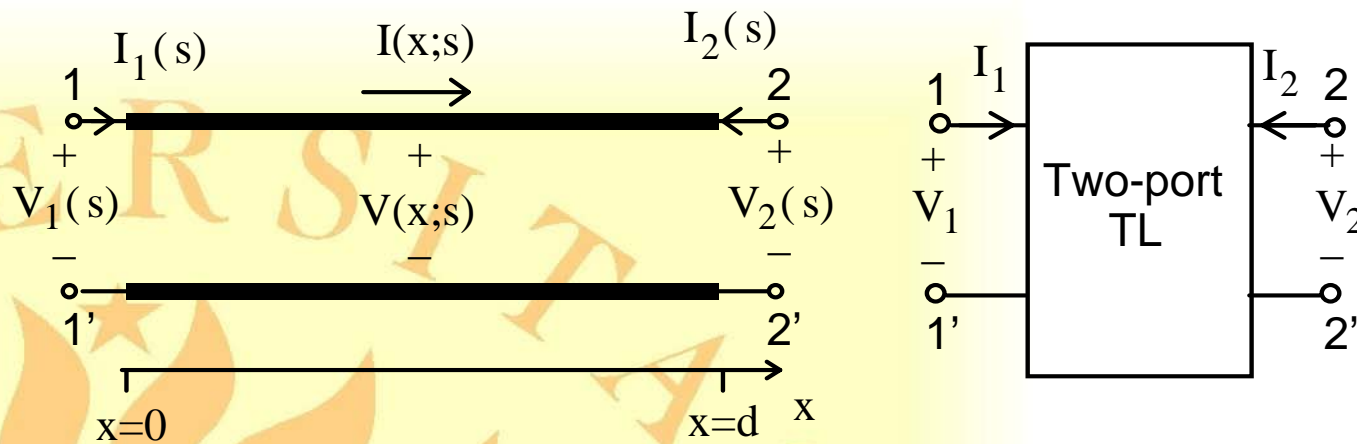
$$v_2(t) - R_c i_2(t) - \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i_2(\tau) d\tau = w_2(t)$$

+ Leggi di Kirchhoff, caratteristiche dei bipoli, condizioni iniziali

Rappresentazioni ingresso-uscita

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Modulo di Elettrotecnica - A.A. 2005-2006



$$V_1(s) - Z_c(s)I_1(s) - P(s)[V_2(s) + Z_c(s)I_2(s)] = 0$$

$$V_2(s) - Z_c(s)I_2(s) - P(s)[V_1(s) + Z_c(s)I_1(s)] = 0$$

SOL PER NOCTEM

$$Z_c = Y^{-1} \sqrt{ZY}$$

$$P(s) = \exp(-d\sqrt{ZY})$$

Matrice di impedenza

$$V_1(s) = Z_{11}(s)I_1(s) + Z_{12}(s)I_2(s)$$

$$V_2(s) = Z_{21}(s)I_1(s) + Z_{22}(s)I_2(s)$$

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_d = Z_c \frac{1 + P^2}{1 - P^2}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_t = Z_c \frac{2P}{1 - P^2}$$

Rappresentazione su base corrente nel DT

$$v_1(t) = \{z_d * i_1\}(t) + \{z_t * i_2\}(t)$$

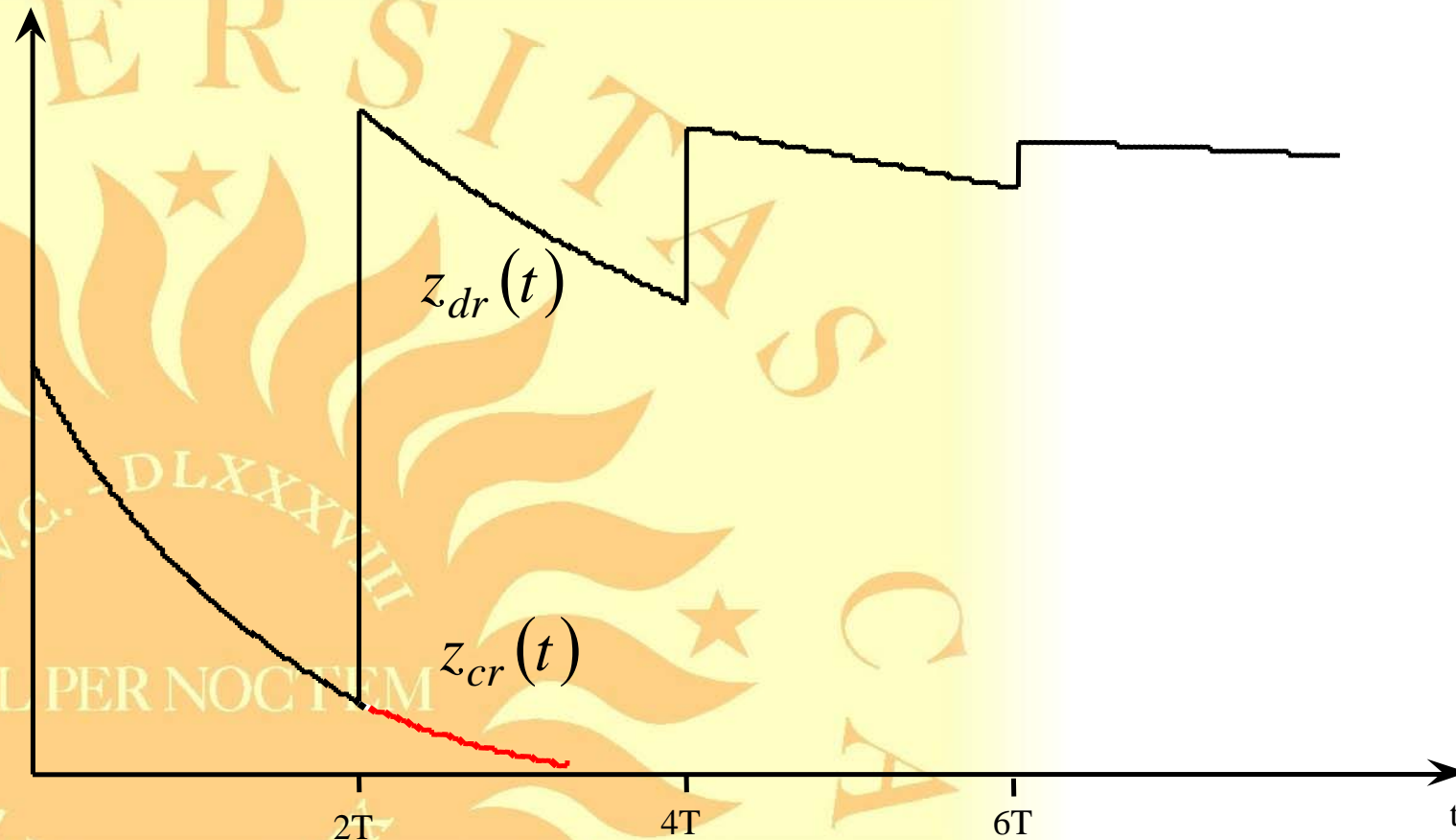
$$v_2(t) = \{z_t * i_1\}(t) + \{z_d * i_2\}(t)$$

$$Z_d = Z_c \frac{1 + P^2}{1 - P^2} \quad \frac{1}{1 - P^2} = \sum_{i=0}^{\infty} P^{2i}$$

$$z_d(t) = z_c(t) + 2 \sum_{i=1}^{\text{int}(t/2T)} z_{2i}(t)$$

$$z_{2i}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Z_c(s) P^{2i+2}(s)\}$$

Rappresentazione su base corrente nel DT



qualsiasi elemento della Z contiene le riflessioni ed ha una durata maggiore di $z_{cr}(t)$

Matrice di ammettenza

$$I_1(s) = Y_{11}(s)V_1(s) + Y_{12}(s)V_2(s)$$

$$I_2(s) = Y_{21}(s)V_1(s) + Y_{22}(s)V_2(s)$$

$$Y_{11} = Y_{22} = Y_d = Y_c \frac{1 + P^2}{1 - P^2} = Y_c (1 + P^2) \sum_{i=0}^{\infty} P^{2i}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = Y_t = -Y_c \frac{2P}{1 - P^2} = -2Y_c P \sum_{i=0}^{\infty} P^{2i}$$

Matrice di trasmissione

$$V_2(s) = T_{11}(s)V_1(s) + T_{12}(s)I_1(s)$$

$$-I_2(s) = T_{21}(s)V_1(s) + T_{22}(s)I_1(s)$$

$$T_{11} = T_{22} = \frac{1 + P^2}{2P}$$

$$T_{12} = Y_t^{-1} = -Z_c \frac{1 - P^2}{2P} \quad T_{21} = -Z_t^{-1} = -Y_c \frac{1 - P^2}{2P}$$

Matrice di scattering

$$A_p(s) = \frac{1}{2} [V_p(s) + Z_r(s)I_p(s)]$$

$$B_p(s) = \frac{1}{2} [V_p(s) - Z_r(s)I_p(s)]$$

$p = 1, 2$

Z_r impedenza di riferimento

$$V_1(s) - Z_c(s)I_1(s) - P(s)[V_2(s) + Z_c(s)I_2(s)] = 0$$

$$V_2(s) - Z_c(s)I_2(s) - P(s)[V_1(s) + Z_c(s)I_1(s)] = 0$$

Matrice di scattering

$$B_1(s) = S_{11}(s)A_1(s) + S_{12}(s)A_2(s)$$

$$B_2(s) = S_{21}(s)A_1(s) + S_{22}(s)A_2(s)$$

$$S_{11} = S_{22} = \alpha_+ \alpha_- \frac{1 - P^2}{\alpha_+^2 - \alpha_-^2 P^2}$$

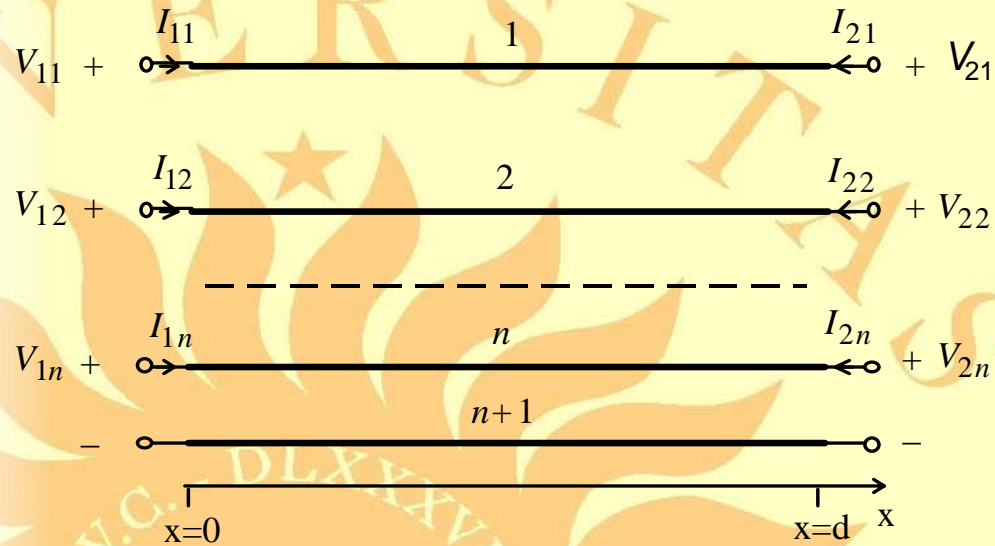
$$S_{12} = S_{21} = P \frac{\alpha_+^2 - \alpha_-^2}{\alpha_+^2 - \alpha_-^2 P^2}$$

$$\alpha_{\pm} = 1 \pm \frac{Z_r}{Z_c}$$



Linea multiconduttore con perdite

Formulazione nel dominio di Laplace



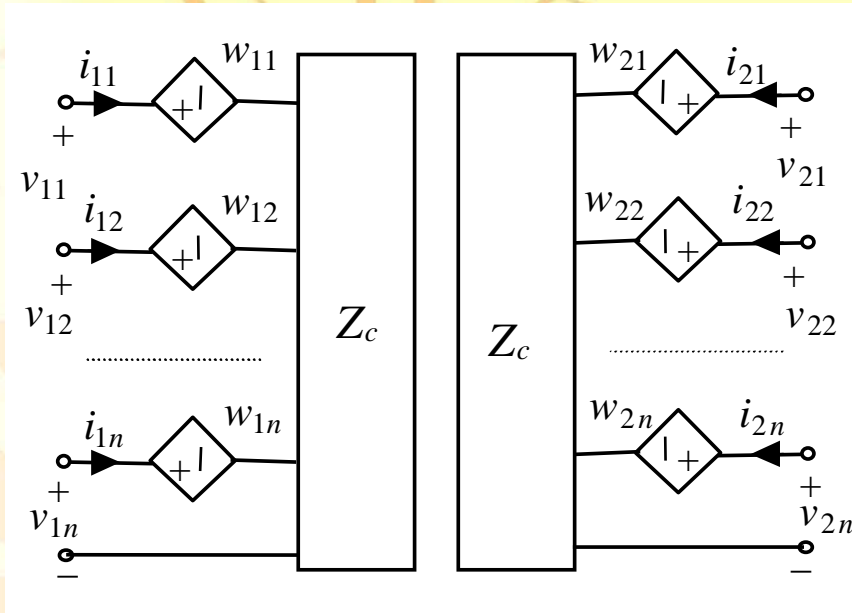
$$-\frac{dV}{dx} = Z(s)I$$

$$-\frac{dI}{dx} = Y(s)V$$

$$\mathbf{I}(x; s) = \left| I_1(x; s) \cdots I_n(x; s) \right|^T$$

$$\mathbf{V}(x; s) = \left| V_1(x; s) \cdots V_n(x; s) \right|^T$$

Multiporte equivalente nel dominio di Laplace



$$V_1(s) - Z_c(s)I_1(s) = W_1(s)$$

$$V_2(s) - Z_c(s)I_2(s) = W_2(s)$$

$$W_1(s) = P(s)[2V_2(s) - W_2(s)]$$

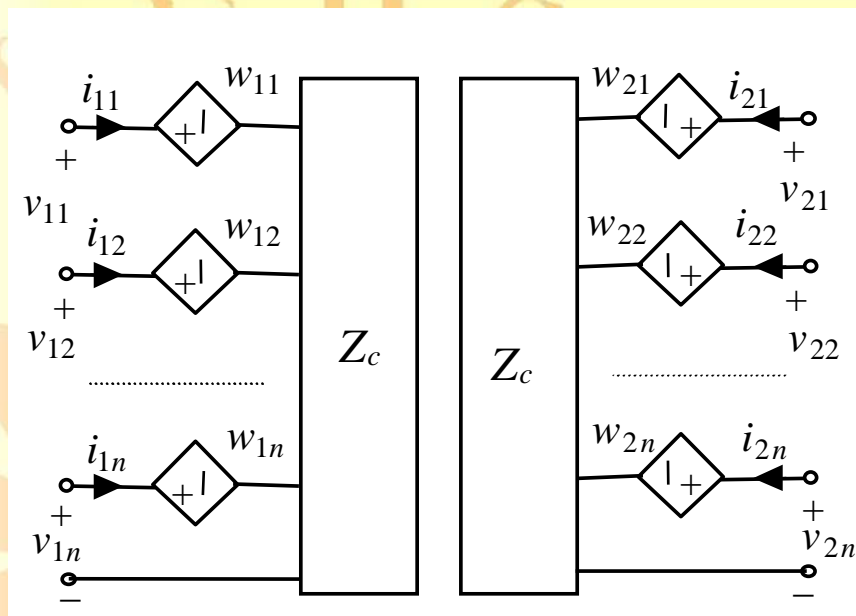
$$W_2(s) = P(s)[2V_1(s) - W_1(s)]$$

SOL PER NOCTEM

$$Z_c(s) = Y^{-1}(s)\sqrt{Z(s)Y(s)}$$

$$P(s) = \exp[-\sqrt{Z(s)Y(s)}d]$$

Multiporle equivalente nel dominio del tempo



$$v_1(t) - \{Z_c * i_1\}(t) = w_1(t)$$

$$v_2(t) - \{Z_c * i_2\}(t) = w_2(t)$$

$$w_1(t) = \{p * (2v_2 - w_2)\}(t)$$

$$w_2(t) = \{p * (2v_1 - w_1)\}(t)$$

$$Z_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Z_c(s)\}$$

$$p(t) = \mathcal{L}^{-1} \{P(s)\}$$

Valutazione semi-analitica delle risposte impulsive di una linea multiconduttore

$$Z_c(s) = Z_{cp}(s) + Z_{cr}(s)$$

$$P(s) = P_p(s) + P_r(s)$$

$$z_c(t) = z_{cp}(t) + z_{cr}(t)$$

$$p(t) = p_p(t) + p_r(t)$$

- Decomposizione in *parte principale* e *parte regolare*
- le parti principali vengono valutate analiticamente
- le parti regolari sono calcolate numericamente

$$P(s) \approx P_p(s) \quad \text{per } s \rightarrow \infty$$

$$P_r(s) = O(s^{-1}) \quad \text{per } s \rightarrow \infty$$

$$Z_c(s) \approx Z_{cp}(s) \quad \text{per } s \rightarrow \infty$$

$$Z_{cr}(s) = O(s^{-1}) \quad \text{per } s \rightarrow \infty$$

Valutazione della parte principale

$$P_p(t) = \sum_{i=1}^n e^{-\mu_i T_i} A_i \delta(t - T_i)$$

$$Z_{cp} = R_c \delta(t)$$

$$A_i = \mathbf{u}_i^{(0)} (\mathbf{w}_i^{(0)})^T$$

$$\mu_i = \frac{c_i^2 \lambda_i^{(1)}}{2}$$

$$R_c = C^{-1} \sqrt{LC}$$

$$W = U^{-1}$$

Le parti regolari si possono valutare numericamente

L'approccio può essere esteso al caso generale di linee con parametri dipendenti da frequenza