MODULAZIONI CON RUMORE

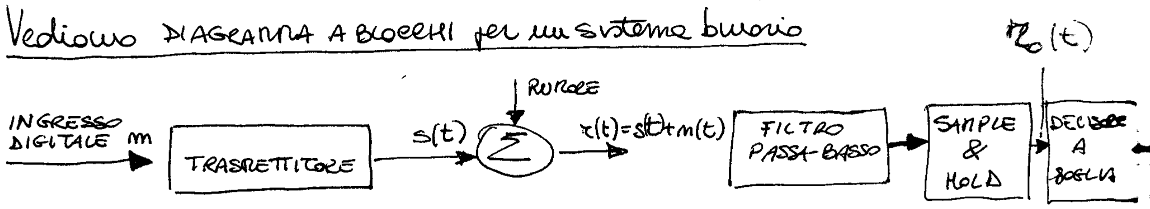
Il progetto di un sistema di comunicazione si basa principalmente su:

1- LA BANDA necessaria a trasmettere il segnale attraverso il canale di comunicazione

2- LE PRESTAZIONI DEL SISTEMA IN PRESENZA DI RUMORE ⇒ in particolare prestazioni sistemi digitali vengono quantificate in relazione alla probabilità d'errore al decisore, mentre per i sistemi ANALOGICI si adotta il rapporto segnale-rumore (SNR) d'uscita

L'informazione utile, cioè il flusso di dati per i sistemi digitali e il segnale modulante per quelli ANALOGICI, viene ricavata in vari modi solo che alcuni RICEVITORI forniscono risultati difficili da interpretare.

Vediamo DIAGRAMMA A BLOCCHI per un sistema binario



Se la trasmissione avviene in BANDA BASE il ricevitore si basa su un FILTRO PASSA-BASSO seguito da una AMPLIFICAZIONE, mentre per trasmissioni PASSA-BANDA (OOK, BPSK e FSK) il ricevitore è di tipo SUPERETERODINA costituito da un MIXER e un amplificatore e rilevatore.

In entrambi i casi ottengo un segnale analogico in banda-base ($r_0(t)$).

La forma d'onda $r_0(t)$ viene campionata e i campioni vengono inviati ad un dispositivo a soglia (COMPARATORE) che ci fornisce in uscita il segnale $\tilde{m}$

Si vede poi il calcolo di BER (bit error rate) che indica la probabilità che un SIMBOLO DI INFORMAZIONE SIA ERRATO ⇒ è la misura standard delle prestazioni di un sistema di comunicazione digitale.

- Indichiamo con **T** l'intervallo necessario per trasmettere UN SIMBOLO ⇒ il segnale trasmesso sull'intervallo di segnalazione $(0,T)$ diventa

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 < t \leq T \quad \text{trasmetto } 1 \\ s_2(t) & 0 < t \leq T \quad \text{trasmetto } \emptyset \end{cases} \Rightarrow \text{in particolare } s_1(t) = -s_2(t)$$

Il segnale in ingresso del ricevitore è $r_0(t) = s(t) + n(t)$ ⇒

$$r_0(t) = \begin{cases} r_{01}(t) & 0 < t \leq T \quad \text{trasmetto } 1 \\ r_{02}(t) & 0 < t \leq T \quad \text{trasmetto } \emptyset \end{cases}$$

Il ricevitore utilizza dispositivi di tipo non lineari e quindi non vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI (per $r_0(t)$)

Il segnale analogico $r_0(t)$ analogico viene poi campionato a un opportuno istante t_0 interno all'intervallo $]0,T]$. Ottengo il campione risultante ⇒

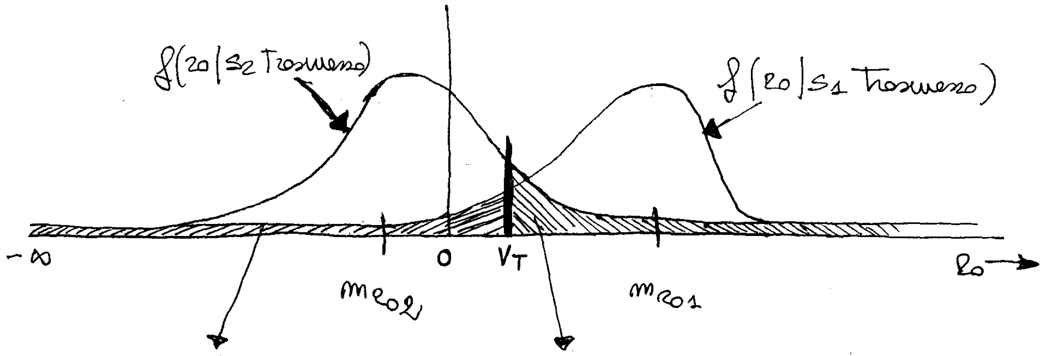
$$r_0(t_0) = \begin{cases} r_{01}(t_0) \rightarrow \text{trasmesso } 1 \\ r_{02}(t_0) \rightarrow \text{trasmetto } 0 \end{cases}$$

$r_0(t_0)$ ha al suo interno una componente aleatoria e quindi una variabile aleatoria CON DISTRIBUZIONE CONTINUA ⇒ consideriamo le due variabili aleatorie $r_0 = r_{01}$ e $r_0 = r_{02}$ ⇒ le loro densità di probabilità sono condizionate in quanto dipendono dall'aver trasmesso o 1 o ∅. Nel momento in cui

$r_0 = r_{01}$ abbiamo densità $f(r_0 | s_1 \text{ trasmesso})$

$r_0 = r_{02}$ abbiamo densità $f(r_0 | s_2 \text{ trasmesso})$

FORMA CHE RICHIAMA ANDAMENTO GAUSSIANO



$P(\text{errore}|s_1 \text{ trasmesso})$ $\qquad$ $P(\text{errore}|s_2 \text{ trasmesso})$

Nel momento in cui all'ingresso del ricevitore abbiamo $s(t)+n(t)$ gli errori si ampiano in modo diverso.

L'operatore fissa una SOGLIA V_T e in particolare $\begin{cases} > V_T \rightarrow 1 \\ < V_T \rightarrow 0 \end{cases}$

Si avrà, di conseguenza, errore quando trasmettendo 1 ottengo $r_0(t_0)$ (cioè componente che tiene conto anche del rumore) $< V_T$

$$P(\text{errore}|s_1 \text{ TRASMESSO}) = \int_{-\infty}^{V_T} f(r_0|s_1 \text{ trasmesso})\, dr_0$$

In maniera analoga si fa quando $r_0 > V_T$ per uno $\varnothing$

$$P(\text{errore}|s_2 \text{ TRASMESSO}) = \int_{V_T}^{+\infty} f(r_0|s_2 \text{ trasmesso})\, dr_0$$

La BER (BIT error rate = tasso di bit errati) è dunque $\Rightarrow$

$$P_{TOT} = P(\text{ERRORE}|s_1 \text{ TRASMESSO})P(s_1 \text{ TRASMESSO}) + P(\text{errore}|s_2 \text{ Trasmesso})P(s_2 \text{ TRASMESSO})$$

P_{TOT} = per un sistema binario è dunque $\Rightarrow$

$$P = P(s_1 \text{ trasmesso})\int_{-\infty}^{V_T} f(r_0|s_1)\, dr_0 + P(s_2 \text{ trasmesso})\int_{V_T}^{+\infty} f(r_0|s_2)\, dr_0$$

le quantità $P(s_1 \text{ trasmesso}) = 1/2$

$P(s_2 \text{ trasmesso}) = 1/2$

- PONIAMO ADESSO CHE IL RUMORE SIA GAUSSIANO

Da ricordare che per un processo GAUSSIANO in INPUT in OUTPUT abbiamo sempre processo GAUSSIANO. $\Rightarrow$ questo si applica sempre in banda base, dove il ricevitore consiste in un filtro lineare con opportuno guadagno ma vale anche per una trasmissione in per un circuito lineare. Il RICEVITORE DEVE ESSERE LINEARE

Campione di uscita sarà $r_0(t_0) = s_0 + n_0 \Rightarrow$ la componente di disturbo $n_0(t_0) = n_0$ è una variabile aleatoria GAUSSIANA a media nulla, mentre $s_0(t_0)$ è una COSTANTE che dipende dal segnale trasmesso.

$$s_0 = \begin{cases} s_{01} \Rightarrow \text{trasmetto } 1 \\ s_{02} \Rightarrow \text{trasmetto } 0 \end{cases}$$

se sono note le FORME D'ONDA queste sono sempre rilevabili in ogni punto.

La densità di probabilità condizionate sono $\Rightarrow$

$$f(r_0|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{(r_0 - s_{01})^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$f(r_0|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{(r_0 - s_{02})^2}{2\sigma_0^2}}$$

Utilizzando teorema delle probabilità totali ottengo $\Rightarrow$

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{(r_0-s_{01})^2}{2\sigma_0^2}} dr_0 + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{(r_0-s_{02})^2}{2\sigma_0^2}} dr_0$$

Bisogna trovare V_T che minimizzi la Perrore TOTALE.

Faccio cambio di variabile $\Rightarrow \lambda = -\frac{(r - s_1)}{\sigma_0} \Rightarrow dr = -\sigma_0\, d\lambda$

e nel secondo integrale

$$\lambda = \frac{(r_0 - s_{02})}{\sigma_0}$$

Ottengo ⇒

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\frac{(V_T - S_{o1})}{\sigma_o}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\lambda^2/2}\, d\lambda + \frac{1}{2}\int_{\frac{(V_T - S_{o2})}{\sigma_o}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\lambda^2/2}\, d\lambda$$

ovvero ottengo ⇒ $P_e = \frac{1}{2} Q\left(\frac{-V_T + S_{o1}}{\sigma_o}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{V_T - S_{o2}}{\sigma_o}\right)$

Da questo si ricava un opportuno valore della soglia del comparatore V_T in modo da minimizzare la probabilità d'errore

Si pone uguale a 0 la derivata ⇒ $\frac{dP_e}{dV_T}$ ⇒

$$\frac{dP_e}{dV_T} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_o}\, e^{-(V_T - S_{o1})^2/(2\sigma_o^2)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_o}\, e^{-(V_T - S_{o2})^2/(2\sigma_o^2)} = 0$$

e quindi ⇒ $e^{-(V_T - S_{o1})^2/(2\sigma_o^2)} = e^{-(V_T - S_{o2})^2/(2\sigma_o^2)}$

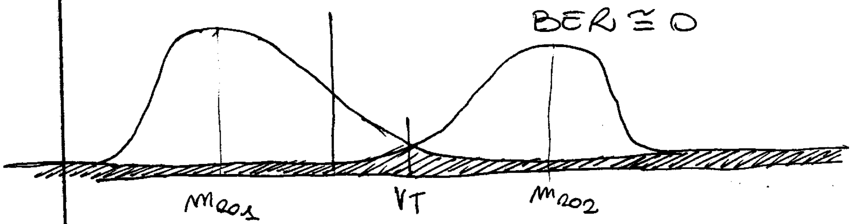
che porta alla condizione ⇒ $\boxed{(V_T - S_{o1})^2 = (V_T - S_{o2})^2}$

abbiamo due risultati ⇒ $S_{o1} = S_{o2}$ ⇒ INUTILE

L'altra $+V_T - S_{o1} = -V_T + S_{o2}$ ⇒

$\boxed{V_T = \frac{S_1 + S_2}{2}}$ questo è l'unico modo per avere la più bassa probabilità di errore

BER ≅ 0



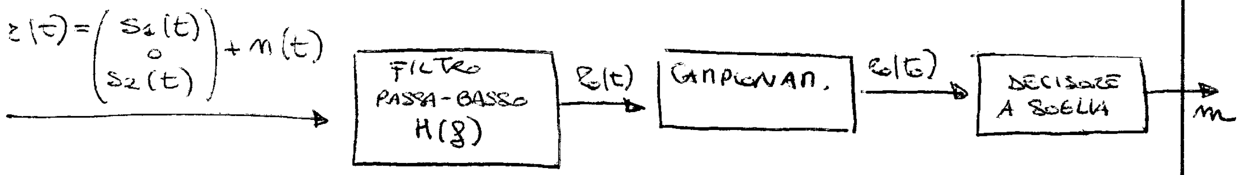
$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{(S_{o1} - S_{o2})^2}{4\sigma_o^2}}\right)$$

Il processo stocastico modella il rumore ⇒ rumore termico dovuto all'agitazione degli elettroni in movimento ⇒ questo rumore corrisponde ad un valore di tensione.

Prestazioni sistemi binari in banda base

Segnale polare e unipolare $s_1(t) = +A \rightarrow$ simbolo 1

Schema a blocchi $s_2(t) = 0 \rightarrow$ simbolo 0



Consideriamo ricevitore che utilizza filtro passa-basso $H(f)$ a guadagno UNITARIO $\Rightarrow$ per non avere problemi di ISI dobbiamo porre la BANDA del FILTRO abbastanza larga, ad esempio $B > 2/T$ (banda della seconda nulla derivante da $\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi f t)}{\pi f t}\right]^2$) ma anche abbastanza stretta in modo da ridurre la potenza del rumore.

Fissiamo $s_{01}(t_0) = A$, $s_{02}(t_0) = 0$ } potenza di rumore uscita dal filtro è

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \cdot 2B$$

B = banda equivalente di rumore

Abbiamo posto la soglia $V_T = \frac{A}{2}$ $\Rightarrow$ calcoliamo la P errore $\Rightarrow$

$$P(\text{errore}) = Q\sqrt{\frac{A^2}{4 N_0 B}}$$

BER segnale unipolare

Segnalazione polare $\Rightarrow$

$$\begin{cases} s_1(t) = +A & 0 < t \leq T \text{ simbolo binario } 1 \\ s_2(t) = -A & 0 < t \leq T \text{ simbolo binario } 0 \end{cases}$$

ed abbiamo segnale polare ANTIPODALE cioè $\Rightarrow s_1(t) = -s_2(t)$

Si fa ipotesi di filtro a in banda $B \geq 2/T$, per evitare eccessive distorsioni; i campioni di segnale in uscita all'istante $s_{01}(t_0) = A$ e $s_{02}(t_0) = -A$ considerando $\sigma_0^2 = N_0 B$.

$V_T = 0$ condizione ottimale $\Rightarrow P_e = Q\sqrt{\frac{4A^2}{4 N_0 B}} = Q\sqrt{\frac{A^2}{N_0 B}}$

Passando da un caso UNIPOLARE ad uno POLARE abbiamo ⇒

$$P_p^{(UNIPOLARE)} = P_p^{(POLARE)} + 6dB$$

mentre per la potenza media abbiamo ⇒ $P_m^{(UNP)} = P_m^{(POL)} + 3db$.

SEGNALAZIONE BIPOLARE

Il simbolo 1 viene rappresentato mediante IMPULSO con ampiezza POSITIVA e NEGATIVA, mentre al simbolo 0 corrisponde livello nullo.

Quindi abbiamo $s_1(t) = \pm A \quad 0<t\le T$ (simbolo 1)

$s_2(t) = 0 \quad 0<t\le T$ (simbolo 0) (posizione centrale)

Quindi ora abbiamo due soglie di decisione sui livelli $+V_T$ e $-V_T$.

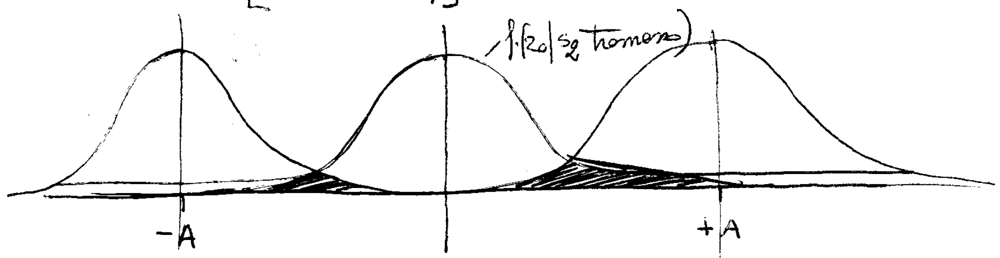
Calcoliamo la BER per canale GAUSSIANO ⇒

$$P_e = P(+A \text{ trasmesso})P(\text{errore}|+A \text{ trasmesso}) + P(-A \text{ trasmesso})P(\text{errore}|-A \text{ trasmesso}) + P(s_2 \text{ trasmesso})P(\text{errore}|s_2 \text{ trasmesso}).$$

Probabilità di trasmettere $+A$ e $-A$ = $1/4$

Probabilità di trasmettere 0 è $1/2$ ⇒ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1$ (100%)

Il BER ⇒ $P_e = \left[2Q\left(\frac{A-V_T}{\sigma_0}\right)\right]\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[2Q\left(\frac{V_T}{\sigma_0}\right)\right]$



Il BER si riduce a ⇒ $Q\left(\frac{V_T}{\sigma_0}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{A-V_T}{\sigma_0}\right)$

Le due gaussiane hanno peso differente e il valore di soglia ottimale è

$V_T = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_0^2}{A}\ln 2$. Se poi la P_e è piccola si pone $V_T = \frac{A}{2}$ ⇒ $P_e = \frac{3}{2}Q\left(\frac{A}{2\sigma_0}\right)$

RIVELAZIONE COERENTE DI SEGNALI PASSA-BANDA BINARI **OOK**

Un segnale OOK è descritto come

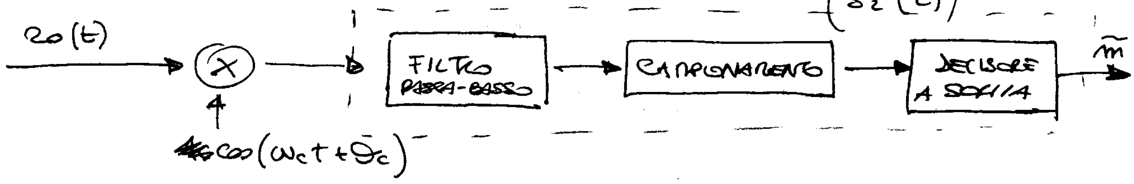
$s_1(t) = A_c \cos(\omega_c t + \vartheta_c) \qquad 0 < t \leq T$ simbolo 1

$s_2(t) = 0 \qquad 0 < t \leq T$ simbolo 0

Consideriamo il rumore GAUSSIANO-BIANCO e lo poniamo uguale a

$n(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \vartheta_N) - y(t)\sin(\omega_c t + \vartheta_N)$

Il segnale che arriva al solito FILTRO è $r_0(t) = \left(\begin{array}{c} s_1(t) \\ o \\ s_2(t) \end{array}\right) + n(t)$



ϑ_N dell'espressione del rumore è una fase ALEATORIA.

Il segnale riceve una distorsione trascurabile

$$r_0(t) = \left\{\begin{array}{ll} A, & 0 < t \leq T \to 1 \\ 0, & 0 < t \leq T \to \varnothing \end{array}\right\} + \underbrace{x(t)}_{\text{rumore}}.$$

La potenza del rumore è $2N_0B$; la soglia ottimale è $A/2$

e quindi la BER è $= \boxed{P_e = Q\sqrt{\dfrac{A^2}{8N_0B}}}$

MODULAZIONE BPSK

Scriviamo il segnale come $s_1(t) = A\cos(\omega_c t + \vartheta_c) \quad 0 < t \leq T \to 1$

$s_2(t) = -A\cos(\omega_c t + \vartheta_c) \quad 0 < t \leq T \to 0$

Il ricevitore utilizza sempre una banda pari a $B \geq 2/T$ e

l'uscita in banda base è ⇒

$$r_0(t) = \left\{\begin{array}{ll} A & 0 < t \leq T \to 1 \\ -A & 0 < t \leq T \to 0 \end{array}\right\} + \underbrace{x(t)}_{\text{rumore}}$$

rumore potenza $\underline{2N_0B}$

La soglia ottimale è $V_T = 0$ e quindi otteniamo $\Rightarrow$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0 B}}\right)$$

MODULAZIONE FSK – COERENTE

Si rileva in modo coerente facendo uso di due rivelatori sincroni $\Rightarrow$

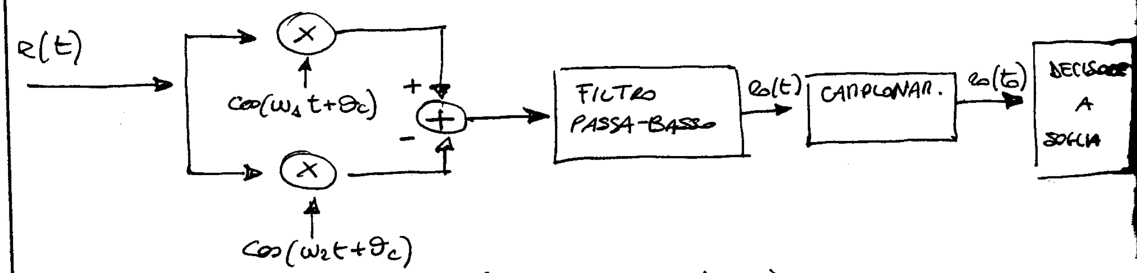
I segnali associati al simbolo 1 e al simbolo 0 sono

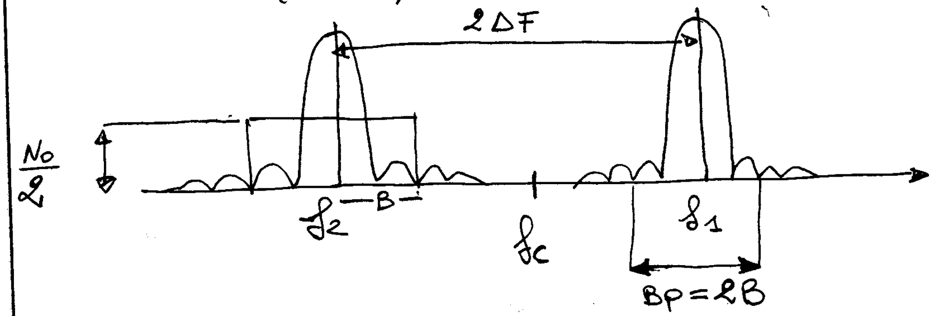
$s_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \vartheta_c) \quad 0 < t \leq T \rightarrow$ simbolo 1

$s_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \vartheta_c) \quad 0 < t \leq T \rightarrow$ simbolo 0

Il filtro passa basso è equivalente a due filtri passa-banda centrati su $f = f_1$ e su $f = f_2$ entrambi di banda $B_p = 2B$.

Per questo il RUMORE VIENE SCOMPOSTO in due componenti $n_1(t)$ e $n_2(t)$ a banda stretta che hanno DSP centrata in f_1 e f_2





Quindi abbiamo 2 componenti di rumore

$n_1(t) = x_1(t)\cos(\omega_1 t + \vartheta_c) - y_1(t)\sin(\omega_1 t + \vartheta_c)$

$n_2(t) = x_2(t)\cos(\omega_2 t + \vartheta_c) - y_2(t)\sin(\omega_2 t + \vartheta_c)$

RAMO SUPERIORE

$$r_1(t) = \left\{\begin{array}{ll} s_1(t) & \text{simbolo binario } 1 \\ 0 & \text{simbolo binario } 0 \end{array}\right\} + n_1(t)$$

RAMO INFERIORE

$$r_2(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{simbolo binario } 1 \\ s_2(t) & \text{simbolo binario } 0 \end{array}\right\} + n_2(t)$$

Il segnale $r(t)$ è somma di $r_1(t)+r_2(t)$ e la potenza delle componenti $r_1(t)$ e $r_2(t)$ $\Rightarrow$ $\underline{2N_0B + 2N_0B} = 4N_0B$

Pertanto $\Rightarrow$

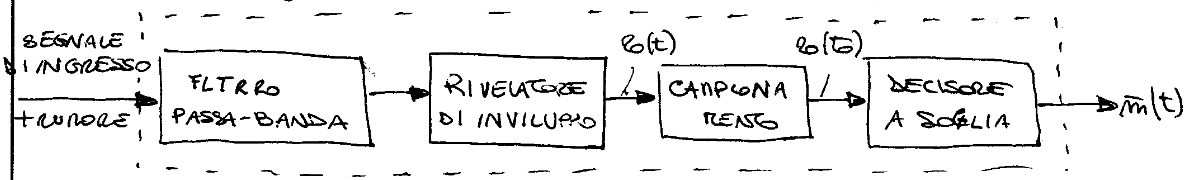
$$r_0(t) = \left\{\begin{array}{ll} +A & 0 < t \leq T \rightarrow \text{binario } 1 \\ -A & 0 < t \leq T \rightarrow \text{binario } 0 \end{array}\right\} + n_0(t)$$

Il problema è simmetrico e quindi la soglia ottimale è in $V_T=0$ ottengo $P_e = Q\left(\sqrt{\dfrac{A^2}{4N_0B}}\right)$

RIVELAZIONE NON COERENTE DI SEGNALI PASSA-BANDA BINARI

Un ricevitore non coerente necessita di una PORTANTE di RIFERIMENTO per la **DEMODULAZIONE** che deve essere sincrona in frequenza con quella di trasmissione. Il calcolo del BER è molto difficile ma in compenso sono più facili da realizzare

MODULAZIONE **OOK**



Il rumore all'ingresso è GAUSSIANO BIANCO, e all'uscita del primo filtro il rumore avrà banda limitata.

Il segnale risultante sarà $r(t) = \begin{cases} r_1(t) \;,\; 0<t\leq T \rightarrow 1 \\ r_2(t) \;,\; 0<t\leq T \rightarrow 0 \end{cases}$

considerando $\begin{cases} s_1(t) = A\cos(\omega_c t+\theta_c) \rightarrow 1 \\ s_2(t) = 0 \rightarrow 0 \end{cases}$

Se la banda del filtro è pari almeno alla banda del segnale ook avremo che per il simbolo 1 avremo $\Rightarrow$

$$s_1(t) = [A_c + x(t)]\cos(\omega_c t+\theta_c) - y(t)\sin(\omega_c t+\theta_c)$$
$$s_2(t) = x(t)\cos(\omega_c t+\theta_c) - y(t)\cos(\omega_c t+\theta_c)$$

La BER $\Rightarrow$ per segnali equiprobabili $\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T} f(r_0|s_1)\,dr_0 + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{+\infty} f(r_0|s_2)\,dr_0$

bisogna vedere a quanto equivale $f(r_0|s_2)$ e $f(r_0|s_1)$ funzione di densità di probabilità condizionate

per $f(r_0|s_1)$ si usa PROBABILITÀ di RICE $\Rightarrow$

$$f(r_0|s_1) = \begin{cases} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)} \cdot I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma^2}\right) & r_0 \geq 0 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

$$I_0(z) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{z\cos\theta}\,d\theta \quad \text{FUNZIONE DI BESSEL}$$

$$f(r_0|s_2) = \left.\begin{cases} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-r_0^2/(2\sigma^2)} & r_0 \geq 0 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}\right\} \text{DISTRIBUZIONE DI RAYLEIGH}$$

La BER per ook non coerente è allora $\Rightarrow$

$$P_e = \frac{1}{2}\int_0^{V_T} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)} \cdot I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-r_0^2/2\sigma^2}\,dr_0$$

Nel momento in cui si vuol rendere minima la Pe il valore ottimale di soglia è $V_T = A/2$

L'integrale con la funzione di BESSEL deve essere modificato in quanto non può essere calcolato come ~~funzione~~ integrale chiuso ⇒ quindi ⇒ si pone $I_0(z) = e^z/\sqrt{2\pi z}$ che vale quando $z \gg 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{A/2} \sqrt{\frac{r_0}{2\pi\sigma^2 A}}\, e^{(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\, dr_0$$

Questa funzione integranda assume valori non trascurabili solo per r_0 vicino ad A, quindi il limite inferiore di integrazione può essere esteso a $-\infty$ e $\sqrt{r_0/(2\pi\sigma^2 A)}$ viene sostituito con $\sqrt{1/(2\pi\sigma^2)}$ ⇒ ottengo ⇒

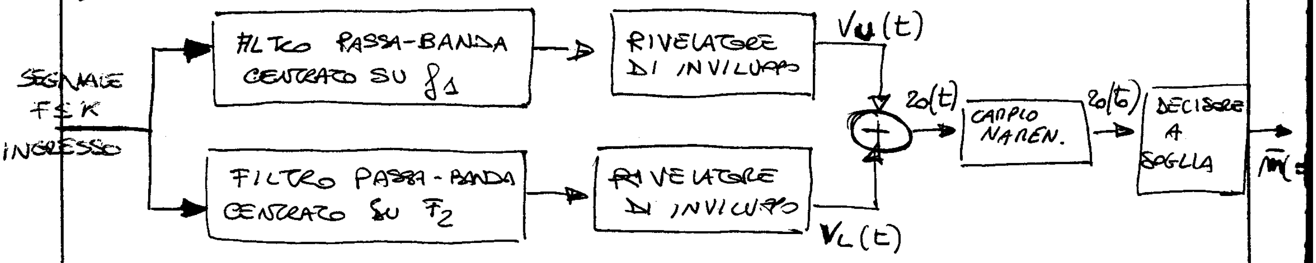
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\, dr_0$$

Quindi la BER è ⇒

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{A/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\, dr_0 + \frac{1}{2}\int_{A/2}^{+\infty} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-r_0^2/2\sigma^2}\, dr_0$$

che diventa ⇒ $P_e = \frac{1}{2} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} e^{-A^2/(8\sigma^2)}$

MODULAZIONE FSK – NON COERENTE



Il rumore che si somma è di tipo GAUSSIANO BIANCO con DSP pari a $N_0/2$.

Se non ci fosse rumore all'ingresso del ricevitore avremmo solo segnale e all'uscita del SOMMATORE avremmo $z_0(t) = +A$ per 1 e $z_0(t) = -A \Rightarrow 0$ Nel momento poi che i filtri hanno un comportamento identico rispetto alle frequenze centrali, le componenti del rumore in USCITA dei filtri hanno stessa POTENZA da qui poiché i due simboli sono equiprobabili la SOGLIA OTTIMALE è $V_T = 0$ e la densità di probabilità di $z_0(t)$ condizionata a s_1 e quella condizionata a s_2 sono tali che

$$f(z_0|s_1) = f(-z_0|s_2) \Rightarrow$$

$$BER \Rightarrow P_e = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(z_0|s_1)\,dz_0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} f(z_0|s_2)\,dz_0 = \int_{0}^{\infty} f(z_0|s_2)\,dz_0$$

Il risultato $P_e = \int_0^{+\infty} f(z_0|s_2)\,dz_0$ si ha quando $V_U(t) > V_L(t)$ e quindi quando $P_e = P(V_U > V_L | s_2)$

Se si trasmette uno ϕ sul ramo superiore abbiamo solo rumore e quindi per l'inviluppo di $V_U(t)$ abbiamo USCITA con distribuzione di RAYLEIGH $\Rightarrow$

$$f(V_U|s_2) = \begin{cases} \frac{V_U}{\sigma^2} e^{-V_u^2/2\sigma^2} & V_u \geq 0 \\ 0 & V_u < 0 \end{cases}$$

con $\sigma^2 = N_0 B$

L'uscita del ramo inferiore ha distribuzione di RICE

$$f(v_L|s_2) = \begin{cases} \frac{v_L}{\sigma^2} e^{-(v_L^2+A^2)/(2\sigma^2)} I_0\left(\frac{A v_L}{\sigma^2}\right) & v_L \geq 0 \\ \emptyset & v_L < 0 \end{cases}$$

e $\sigma^2 = N_0 B$

Si ottiene che $\Rightarrow$

$$P_e = \int_0^{+\infty} \frac{v_L}{\sigma^2} e^{-(v_L^2+A^2)/(2\sigma^2)} I_0\left(\frac{A v_L}{\sigma^2}\right)\left[\int_{v_L}^{\infty} \frac{v_U}{\sigma^2} e^{-v_U^2/(2\sigma^2)} dv_U\right] dv_L$$

che ridotto equivale a $\boxed{P_e = \frac{1}{2} e^{-A^2/(4\sigma^2)}}$

- LA MODULAZIONE BPSK NON ESISTE NON COERENTE

- MODULAZIONE NON COERENTE DPSK

I segnali modulati PSK non possono essere demodulati in modo non coerente in quanto occorre la PORTANTE che ha nella sua FASE l'informazione $\Rightarrow$ occorre per questo un RICEVITORE COERENTE.
Si adotta una tecnica detta PARZIALMENTE COERENTE nella quale come riferimento di portante per la ricezione del segnale in un dato intervallo si adotta l'andamento del segnale nell'intervallo precedente.
Praticamente trasmette un segnale BPSK con codifica differenziale.
• e soglia ottimale la si calcola in $V_T = 0$ e quindi

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-(E_b/N_0)}$$

Modulazione QPSK e MSK

Per la segnalazione QPSK si utilizza una "costellazione" di $L=4$ possibili segnali: in ogni intervallo di durata T sono trasmessi 2 bit di informazione

$s(t) = (\pm A)\cos(\omega_c t + \vartheta_c) - (\pm A)(\omega_c t + \vartheta_c)$ dove i termini $\pm A = 1$ bit

Il rumore di ingresso al ricevitore è ⇒

$$n(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \vartheta_N) - y(t)\sin(\omega_c t + \vartheta_N)$$

Per la rivelazione si utilizza un ricevitore coerente ⇒

la BER è $\quad P_e = Q\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}$

Rapporto segnale/rumore per sistemi analogici

Poniamo che il canale di trasmissione sia con rumore additivo gaussiano bianco, con ingresso del ricevitore pari a ⇒

$$r(t) = s(t) + n(t) \Rightarrow$$
$$r(t) = \mathrm{Re}\left\{ g_s(t)\, e^{j(\omega_c t + \vartheta_c)} \right\} + \mathrm{Re}\left\{ g_n(t)\, e^{j(\omega_c t + \vartheta_c)} \right\}$$

Abbiamo inviluppo complesso del rumore più inviluppo complesso del segnale. Per valutare le prestazioni del sistema la maniera più significativa è calcolare il rapporto segnale rumore all'uscita del ricevitore $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$

Il rapporto segnale / rumore in uscita sarà

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{A_c^2 \, k_a^2 \, P_s}{2 N_0 W}$$

Per avere il rapporto segnale / rumore lungo il canale consideriamo $\left(\frac{S}{N}\right)_c = \frac{P_T}{2 N_0 W}$

andiamo a calcolare il fattore di merito

$$F = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{CAN}} = \frac{k_a P_s}{1 + k_a P_s} < 1$$

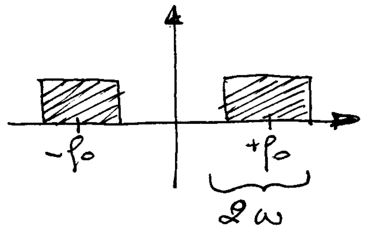
DSB-SC con RUMORE

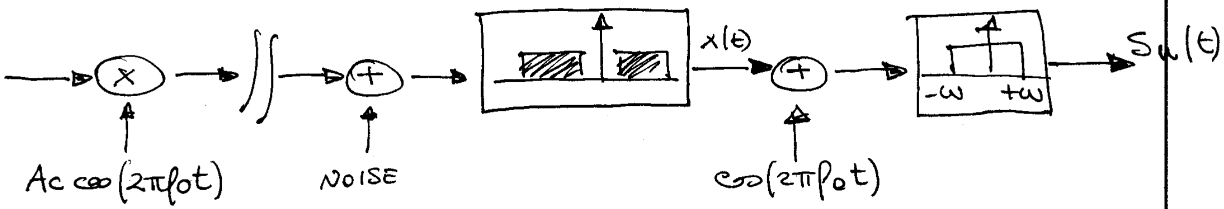
$s(t) = A_c \cos[2\pi f_0 t]$

il segnale trasmesso $s(t) = A_c \, s(t) \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \frac{A_c}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A_c}{2} \delta(f + f_0)$

Il rumore ha meno influenza in trasmissione in quanto $s(t)$ è molto più grande di $n(t)$. Il rumore è di tipo GAUSSIANO BIANCO e per contrastare questo effetto in ricezione si utilizza un FILTRO PASSA-BANDA che elimina le parte di RUMORE ELIMINABILE.

Il filtro ha ampiezza $2W$ ed è centrato in f_c in modo da far passare tranquillamente il segnale che ci interessa





Lo spettro del rumore filtrato è ⇒

$N_p(t) = N_I(t)\cos(2\pi f_0 t) - N_q(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$ dove N_I e N_q sono componenti analogiche in bassa frequenza ⇒ i due spettri di $N_I(t)$ e $N_q(t)$ sono UGUALI.

Ottengo ⇒ $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) =$

$$s_T(t)\cos(2\pi f_c t) + N_p(t)\cos(2\pi f_c t) =$$

$$= A_c\, s(t)\cos^2(2\pi f_c t) + n_I(t)\cos^2(2\pi f_0 t) - n_q(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{A_c}{2}s(t) + \cancel{\frac{1}{2}A_c s(t)\cos(4\pi f_c t)} + \frac{n_T(t)}{2} +$$

$$+ \cancel{\frac{n_I}{2}\cos(4\pi f_c t)} - \cancel{\frac{n_q(t)}{2}\sin(4\pi f_c t)}$$

Il filtro blocca le componenti superiori a $2W$ ⇒ $\underbrace{\frac{1}{2}A_c s(t)}_{\text{SEGNALE}} + \underbrace{\frac{1}{2}n_T(t)}_{\text{RUMORE}}$

Il rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \dfrac{A_c^2/4 \cdot P_s}{\frac{1}{4} N_0 \cdot 2W} =$

$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \dfrac{A_c^2 \cdot P_s}{2N_0 W}$ ⇒ rapporto sui 40 dB

Per aumentare il rapporto si può aumentare A_c^2 o P_s o diminuire il rumore.

Per una modulazione in banda-base il valore è lo stesso

$\left(\frac{S}{N}\right)_c = \dfrac{A_c^2 P_s}{2N_0 W} = 1$

SISTEMI SSB

$g_s(t) = A_c\left[m(t) \pm j\,\hat{m}(t)\right]$ dove col segno + abbiamo USSB

e il segno − per LSSB ⇒ l'inviluppo complesso del segnale ricevuto è dunque ⇒

$$g_T(t) = \left[A_c\, m(t) + x_N(t)\right] + j\left[\pm A_c\,\hat{m}(t) + y_N(t)\right]$$

all'uscita del rilevatore sincrono abbiamo $A_c\, m(t) + x_N(t)$

Il rapporto segnale rumore sarà del tipo ⇒

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = \frac{A_c^2\; \overline{m^2(t)}}{\overline{x_N^2(t)}} = \frac{A_c^2\; \overline{m^2(t)}}{N_0 B}$$

$\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}$ = è uguale a $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$

e il fattore di merito è il rapporto $\dfrac{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}} = 1$