PONTE DI WHEATSTONE

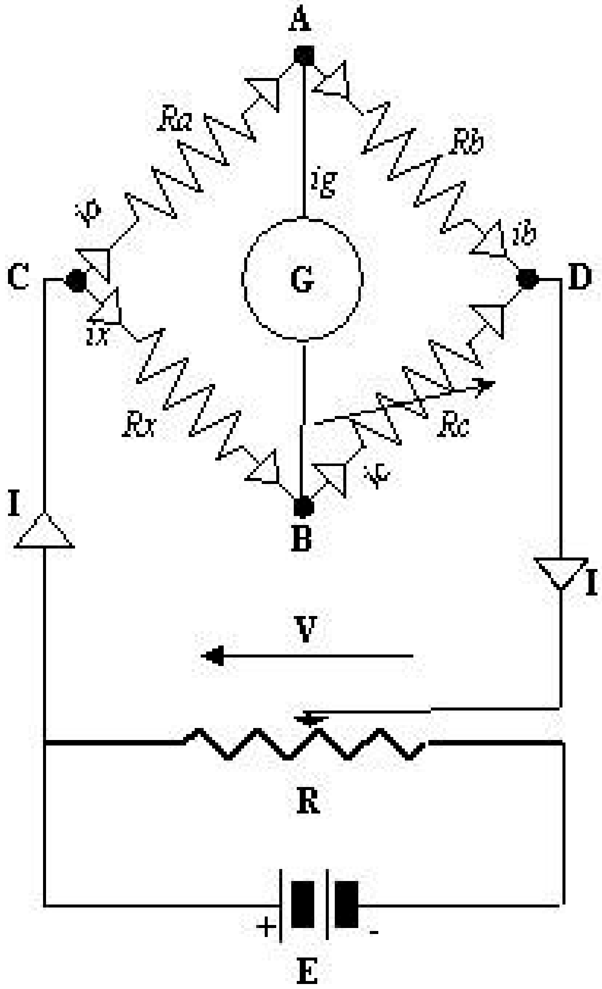


Fig.4.1- Schema elettrico del Ponte di Wheatstone

4.1 Generalita'

Un metodo classico per la misura di resistenze di ordine medio, è il ponte di Wheatstone. Una schematizzazione di tale ponte è riportata in figura 4.1. Come si può vedere dallo schema elettrico, il ponte di Wheatstone risulta formato da quattro resistenze connesse in modo dà realizzare una maglia di forma quadrata, tra i due lati c'è il galvanometro. In base alla configurazione i lati assumono denominazione particolare;

<lati> del ponte sono detti i quattro rami costituiti da resistori

<diagonali> del ponte sono detti i rami che contengono la sorgente di alimentazione o il galvanometro. Questi due rami si differenziano tra loro e si chiama <diagonale di alimentazione>, quella che si ottiene collegando un

generatore di tensione continua tra i punti medi di due lati e <diagonale di rilevazione> quella in cui un galvanometro a zero centrale, di elevata sensibilità, si collega tra i punti medi degli altri due lati. Uno qualsiasi dei quattro lati è costituito dal resistore di resistenza incognita R_x, mentre gli altri tre lati sono costituiti da resistori le cui resistenze assumono valori noti. Almeno una delle resistenze note deve essere anche variabile, ed in particolare nell'esempio di sopra riportato avrò un resistore variabile R_c a decadi. Il rilevatore di zero posto tra i nodi A e B è sensibile al passaggio di corrente nel lato stesso, o alla differenza di potenziale tra i nodi A e B. Il ponte è in equilibrio quando è nulla la corrente che attraversa la diagonale di rivelazione, condizione che può essere individuata dall'indice del galvanometro nella posizione di zero. In condizione di funzionamento, il generatore di tensione continua E fa scorrere, da C verso D, una corrente che si ripartisce tra i due rami comprendenti rispettivamente il nodo A e il nodo B. Applicando i principi di Kirchhoff al ponte, quando è verificata la condizione di equilibrio, si ha :

equazione al nodo A $\quad I_a = I_b \quad$ **(1)**

equazione al nodo B $\quad I_x = I_c \quad$ **(2)**

equazione alla maglia ABC $\quad R_x * I_x = R_a * I_a \quad$ **(3)**

equazione alla maglia ABD $\quad R_c * I_c = R_b * I_b \quad$ **(4)**

Sostituendo (1) e (2) in (4), si ottiene:

$$R_x * I_x = R_a * I_a \qquad (5)$$

$$R_c * I_x = R_b * I_a \qquad (6)$$

Considerando la (5) e la (6), dividendo membro a membro, si ricava :

$$\frac{R_x}{R_c} = \frac{R_a}{R_b} \quad \text{cioè} \quad R_b * R_x = R_a * R_c \tag{7}$$

E' stata cosi trovata la relazione che lega le quattro resistenze del ponte, in condizioni di equilibrio. In questa condizione il prodotto delle resistenze dei due lati opposti eguaglia il prodotto delle altre due, è quindi possibile dedurre la resistenza di un lato, cioè :

$$R_x = R_a * \frac{R_b}{R_c} \tag{8}$$

Di conseguenza per ricavare il valore di R_x resistenza incognita si può agire sul rapporto $\frac{R_a}{R_b}$ o sulla resistenza R_c. Nel seguito si farà riferimento alla soluzione $\frac{R_a}{R_b}$ costante e R_c variabile, quindi una R_c resistenza a decadi.

4.2 Procedura di misura

Poiché inizialmente il valore di R_c potrebbe anche essere molto diversa da quello che soddisfa la (8), la corrente nel ramo AB potrebbe essere elevata. Di conseguenza si preferisce alimentare il circuito con valori di tensione via crescenti. Normalmente all'aumentare della tensione di alimentazione e della sensibilità del galvanometro, occorre operare sulle decadi più piccole dalla resistenza a campione Rc. Con una sensibilità del ponte molto spinta non si riesce ad azzerare il galvanometro e, quindi, occorre procedere alla interpolazione. Per esempio ponendo $R_a = R_b$ =1000 Ω ed essendo R_x = 8715-3 Ω si supponga che non si riesca a portare a zero l'indice del galvanometro né con R_c=8715 Ω , né con R_c =8716Ω (nei ponti ordinari R_c varia con salti minori di 1Ω). Si può ,allora, effettuare l'interpolazione del valore di R_x col seguente procedimento. Se con R_c=8715Ω l'indice devia da un lato (per esempio a sinistra dello zero), di δ_1 divisioni e con R_c=8716Ω devia, invece, dall'altro lato di δ_2 divisioni, si può ricavare il valore di x da aggiungere a 8715Ω onde avere il valore esatto della R x . Dalla figura

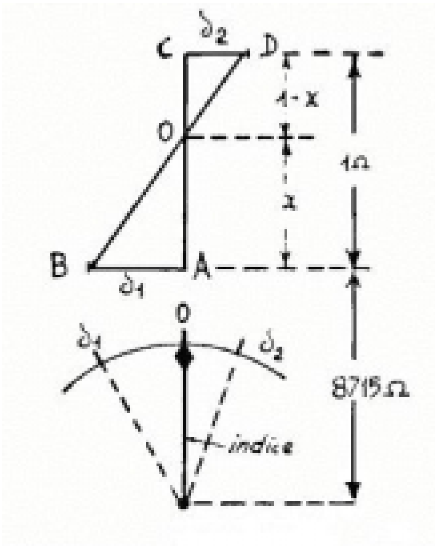


Fig.4.2 – Rappresentazione grafica dell'interpolazione

riportate in senso opposto rispetto al segmento AC=1 (eguale cioè alla differenza tra 8716 e 8715 Ω) le due deviazioni A B =δ_1 e CD=δ_2 (cioè due segmenti ad esse proporzionali) si confrontino i triangoli rettangoli ABO e OCD, che sono simili (essendo AB parallelo a CD ed entrambi perpendicolari ad AC; gli angoli BOA e

COD eguali, perché opposti al vertice). Si ha, quindi $\frac{AO}{OC} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ e siccome AO = x ed OC = 1-x sarà ancora :

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

da cui,

$$x = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}$$

Se ad esempio è δ_1 = 15 divisioni e δ_2 = 20 divisioni, sarà

$$x = \frac{15}{20+15} = \frac{15}{35} = 0{,}42\Omega$$

e quindi

$$R_c = 8715{,}42\Omega$$

Questo valore esatto di R_c va introdotto nella formula

$$R_x = \frac{R_b}{R_a} * R_c$$

4.3 Valutazione incertezza

L'incertezza sulla misura di R_x può essere valutata applicando la legge di propagazione dell'incertezza suggerita dalle Norma UNICEI 9 alla formula (8).

In realtà la sensibilità del galvanometro non è infinita, (e che quindi indica una corrente nulla anche quando la corrente è inferiore ad un certo valore I_{min}). Di conseguenza nella relazione (8) bisogna tener conto che non si è sensibili a variazioni di resistenza che determinano il passaggio di una corrente inferiore a I_{min}. Di questo se ne può tendere conto riscrivendo la relazione (8) nel seguente modo:

$$R_x = R_a * \frac{R_b}{R_c} + R_s$$

dove R_s ha un valore medio nulla valore massimo R_s ed una incertezza u_{dRs} diversa da zero e da valutare. Di conseguenza

$$u^2_{Rx} = u^2_{\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)} + u^2_{dRs}$$

l'incertezza su $\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)$ si ottiene applicando la legge di propagazione nel caso di una produttoria

$$\dot{u}_{\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)} = \dot{u}_{Ra} + \dot{u}_{Rb} + \dot{u}_{Rc}$$

$$u^2_{\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)} = \left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)^2 * \dot{u}^2_{\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)} = R_x^2 * \left(\dot{u}^2_{Ra} + \dot{u}^2_{Rb} + \dot{u}_{Rc}\right).$$

L'incertezza sulle singole resistenze $R_a R_b R_c$ può essere rilevata con metodi di valutazione di categoria A cioè eseguendo misure ripetute o di tipo B utilizzando i dati forniti dal costruttore. Per valutare $\dot{u}_{Rs}$ bisogna ragionare come segue.

Come già detto la resistenza Rs rappresenta quel valore di variazione di resistenza che da luogo ad uno spostamento dell'ago del galvanometro della minima quantità apprezzabile.

Per la valutazione di R_s si può procedere in due modi distinti: approccio a posteriori (sperimentale) o approccio a priori (teorico). In entrambi i casi bisogna valutare il minimo scostamento a cui il ponte sarà sensibile R_s. Ipotizzando una distribuzione rettangolare di ampiezza pari a R_s si ha

$$\mathbf{u_{dRs} = \frac{Rs}{\sqrt{12}}}.$$

Nel seguito vengono presentati entrambi gli approcci per la valutazione di R_s per ricavare u_{dRs}.

4.4 Approccio a - posteriori per la valutazione dell'incertezza di sensibilita'

Ipotizzando un comportamento lineare intorno allo zero del galvanometro è possibile scrivere:

$$R_s : d\lambda = \Delta R_x : \Delta\lambda \tag{9}$$

Dove si è indicato con:

R_s **= il valore della minima variazioni della** R_x **a cui il ponte è sensibile.**

dλ= numero di deviazioni dello strumento apprezzabili

ΔR_x **= una variazione definita di R**

Δλ= il numero di deviazioni corrispondenti alla variazione finale di R_x

Dalla relazione (9) si ha

$$R_s = \frac{\Delta R_x}{\Delta\lambda} * d\lambda \tag{10}$$

di conseguenza

quindi la R_s **si può valutare dando variazione significativa a** R_x**. Tale variazione non si può fisicamente dare perché** R_x **è la resistenza incognita ed è quindi fissa. Dalla relazione(8) si ha:**

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_c}{R_c}$$

di conseguenza la (10) diviene:

$$R_s = \Delta R_c * \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} * \frac{R_x}{R_c}$$

Quindi la R_s **si può valutare dando una variazione significativa alla resistenza campione** R_c**.**

Con riferimento all'esempio numerico precedentemente riportato ($R_c = 8715.42\Omega$; $R_a = R_b$, $R_c' = 8715.42\Omega$ **e** $R_c'' = 8715.52\Omega$**) con le rispettive deviazioni corrispondenti alla variazione di** R_c **come da figura:**

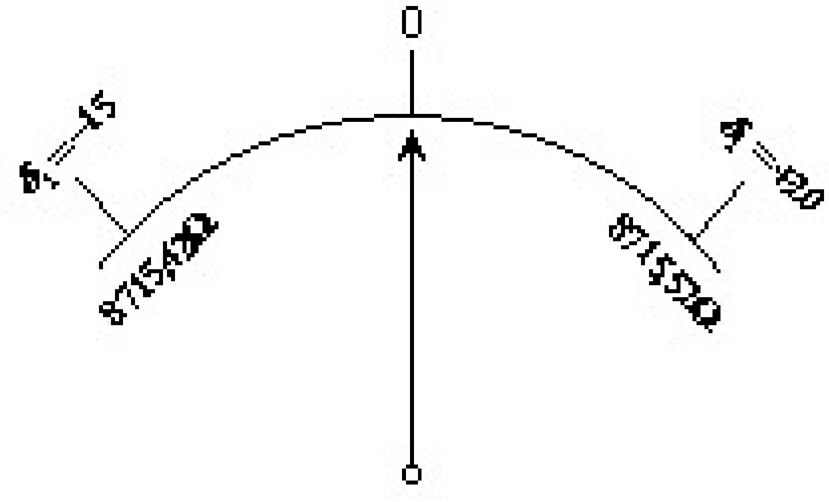


Fig.4.3 – Rappresentazione grafica dell’ago del galvanometro.-

$\Delta\lambda$ = 15+20 =35

$$\Delta R_c = 8715.42 - 8715.52 = 0.1\Omega$$

dλ= 0.5 (l’operatore ritiene di poter apprezzare ½ divisione)

allora sostituendo tali valori nella formula:

$$R_s = \frac{\Delta R_c * d\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{0.1}{35} * 0.5 = 0.0014\Omega$$

4.5 Approccio priori

Scomponendo il circuito di Figura 4.1 tra A e B nel circuito equivalente di Thevenin. Ipotizzando nulla la resistenza interna dell'alimentatore si ha:

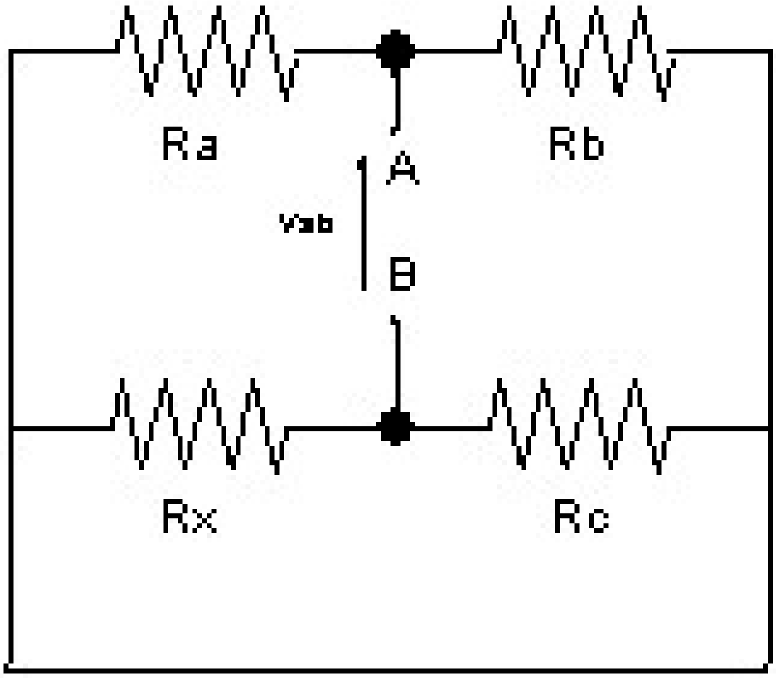


Fig.4.4 – Circuito equivalente

Schematizzando più semplicemente il circuito diventa

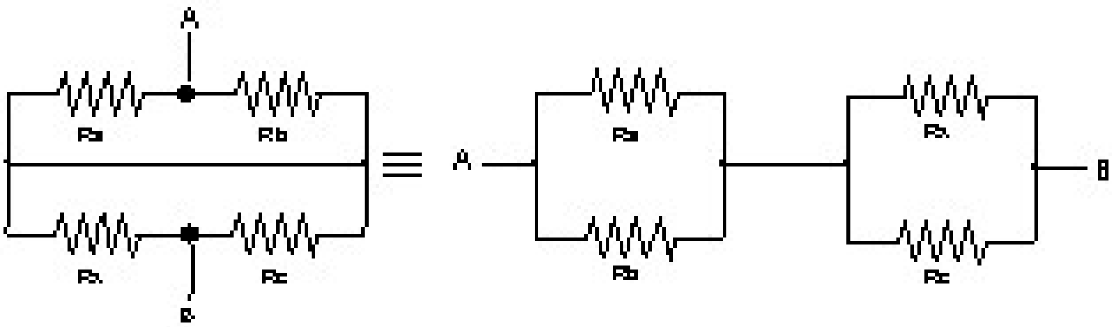


Fig.4.5 – Rappresentazione schematizzata delle resistenze

Dunque $R_{eq} = \dfrac{R_a * R_b}{R_a + R_b} + \dfrac{R_x * R_c}{R_x + R_c}$

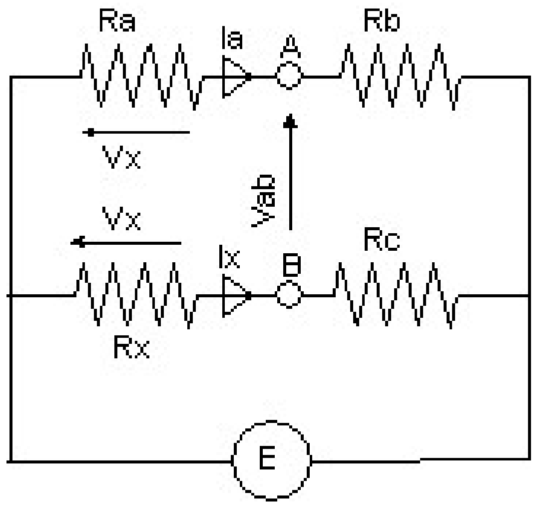


Fig.4.5 – Rappresentazione schematica.-

Dal circuito in esame si ricava I_a nel seguente modo

$$I_a = \frac{E}{R_a + R_b} \qquad I_x = \frac{E}{R_x + R_c}$$

$$V_a = R_a * I_a = E * \frac{R_a}{R_a + R_b} \qquad V_x = R_x * I_x = E * \frac{R_x}{R_x + R_a}$$

quindi la tensione a vuoto $\mathbf{E_o = V_x - V_a = E * \left(\dfrac{R_x}{R_a + R_c} - \dfrac{R_a}{R_a + R_b} \right)}$ **ossia**

il circuito equivalente visto dallo strumento è quello riportato in figura:

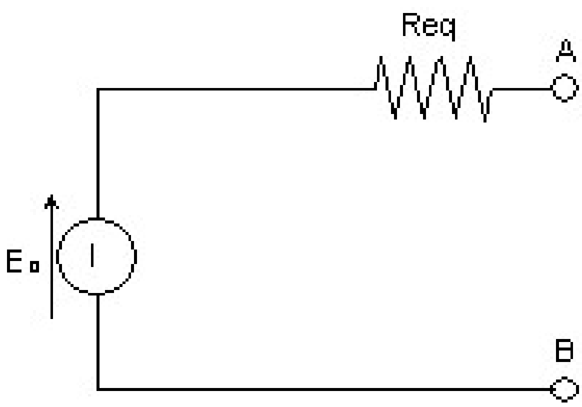


Fig.4.4 –Generatore equivalente di Thevenin.-

Dove $$R_{eq} = \frac{R_a * R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_x * R_c}{R_x + R_c}$$

$$E_o = E * \left(\frac{R_x}{R_x + R_c} - \frac{R_a}{R_a + R_b}\right) \tag{11}$$

In condizione di equilibrio la corrente che scorre nel galvanometro è uguale a zero ($I_g = 0$) quindi $V_{AB} = 0$ l'espressione diventa :

$$0 = E * \left(\frac{R_x}{R_x + R_c} - \frac{R_a}{R_a + R_b}\right)$$

Il circuito equivalente completo che tiene conto del galvanometro è quello riportato in figura 4.6.

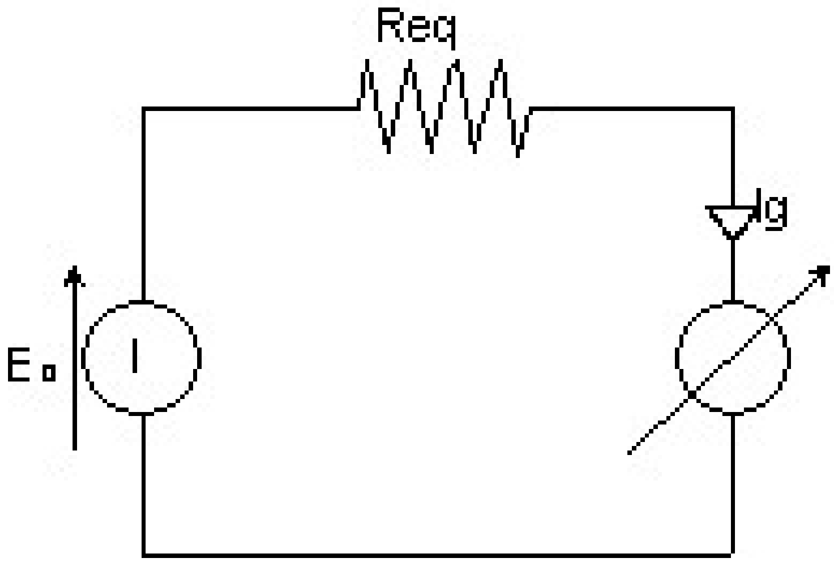


fig.4.6-Schematizzazione completa del circuito.-

In condizione di equilibrio $I_g = 0$ e quindi $V_{AB} = E_0 = 0$ come è stato già visto.Per risalire al valore di R_s si ricordi che essa è definita come la variazione di resistenza dalle condizioni di equilibrio alla quale corrisponde un passaggio di corrente nel galvanometro pari alla minima corrente alla quale il galvanometro è sensibile cioè

$$R_s \Rightarrow I_{min}$$

Analizzando il circuito di figura 4.6 si ha:

$$I_{min} = \frac{\Delta E_0}{R_{eq} + R_i} \tag{12}$$

dove ΔE_o e la variazione di tensione rispetto alla condizione di equilibrio dovuta alla variazione di R_x $(dR_x = R_s)$. Per ricavare ΔE_0 si può sviluppare la relazione (11) in serie di Taylor nell'intorno di R_x a cui corrisponde $E_0 = 0$ e arrestandosi al primo ordine. Tale approssimazione è valida poiché la variazione di R_x sono piccole si ha:

$$\Delta E_0 = \frac{\partial E_0}{\partial R_x} * R_s \tag{13}$$

Dalla (12) e (13) si ha:

$$\Delta E_0 = (R_{eq} + R_i) * I_g = \frac{\partial E_0}{\partial R_x} * R_s$$

cioè

$$R_s = \frac{(R_{eq} + R_i) * I_g}{\frac{\partial E_0}{\partial R_x}} \tag{3^*}$$

La corrente I_g si può esprimere come

$$I_g = K_g * \Delta\lambda \tag{14}$$

dove k_g è la costante strumentale del galvanometro. In genere la costante strumentale di un galvanometro può essere espressa in due modi:

- **Ampere/Divisione**
- **Divisione/Ampere**

Per come è stata scritta la relazione (14) si considera la K_g in $\left(\frac{\text{Ampere}}{\text{Divisione}}\right)$, moltiplicando K_g nella maglia per il numero di deviazioni si ha il valore di corrente che circola. Questa costante è concettualmente l'inverso della sensibilità, intesa come qualità dello strumento, nel senso quanto più piccola Kg è tanto è migliore è la sensibilità dello strumento.

$$\frac{\partial E_0}{\partial R_x} = E * \frac{R_x + R_c - R_c}{(R_x + R_c)^2} = E \frac{R_c}{(R_x + R_c)^2} = E * \frac{R_c}{R_x^2 * \left(1 + \frac{R_c}{R_x}\right)} = \frac{E}{R_x} * \frac{\frac{R_c}{R_x}}{\left(1 + \frac{R_c}{R_x}\right)} \quad (15)$$

in realtà poiché nella relazione (3*) $\frac{\partial E_0}{\partial R_x}$ e al denominatore è interessante andare a valutare quando esso è massimo per poter cosi dimensionare meglio il circuito. Ponendo $\frac{R_c}{R_x} = m$ si ha

$$\frac{\partial E_0}{\partial R_x} = \frac{E}{R_x} * \frac{m}{(1 + m^2)}$$

per ricavare il massimo in funzione di m si deve porre $\frac{\partial \frac{\partial E_0}{\partial R_x}}{\partial m} = 0$ ciò

$$\frac{(1 + m^2) - 2 * (1 + m) * m}{(1 + m)^4} = \frac{2m + 1 + m^2 - 2m^2 - 2m}{1 + m^4} \qquad \frac{-m^2 + 1}{1 + m^4} = 0$$ cioè m=±1.

Considerando solo la soluzione positiva si ha m=1 cioè $\frac{R_x}{R_c} = 1$ quindi sostituendo il valore numerico nella (15) diventa:

$$\frac{\partial E_0}{\partial R_x} = \frac{E}{R_x} * \frac{1}{(2)^2} = \frac{E}{4R_x}$$

Quindi si scopre che la condizione ottimale si ha per R_x=R_c e quindi R_a=R_b. E' possibile dimostrare che la situazione ottimale per $R_x = R_c = R_a = R_b$ quando tutte le resistenze sono uguali. Considerando quindi la variazione $R_x = R_c$ la R_s diventa:

$$R_s = \left(R_{eq} + R_i\right) * K_g * \frac{\left(1 + \frac{R_x}{R_c}\right)^2}{E} * \frac{R_x}{R_c} * d\lambda$$

Possiamo, quindi, affermare che:

Uno strumento con un K_g più piccolo riduce l'errore di sensibilità.

Quanto più è elevata la tensione E e tanto più basso è l'errore di sensibilità i limiti massimi di E dipendono dalla I massima circolabile nei componenti. Quanto più è minore $\left(R_{eq} + R_i\right)$ e tanto più basso è R_s. Dunque l'errore di sensibilità non dipende solo dallo strumento utilizzato ma anche dal circuito in cui è inserito il galvanometro inoltre il metodo presenta un limite al crescere di R_x aumenta la R_{eq}, di conseguenza aumenta R_s.

Il ponte utilizzato quindi per misure di resistenza di valore medio con una precisione dell'ordine di una parte su diecimila. Sembrerebbe quindi che trattandosi di precisioni non particolarmente elevate esso possa essere sostituita da un buon multimetro numerico. In realtà attraverso due tecniche:

- **doppia pesata**
- **sostituzione**

si ha un miglioramento della prestazioni in termini di precisioni tale da giustificare l'utilizzo del ponte.

4.6 Tecnica della doppia pesata

Come detto risulta sempre conveniente utilizzare due resistori R_a ed R_b caratterizzate dagli stessi valori nominali, a causa della loro incertezza pur avendo $R_a = R_b$ avrò $R_{c_1} \neq R_{c_2}$ Effettuando due misure su R_x e scambiando di posto R_a ed R_b si ha:

$$R_x = \frac{R_a}{R_b} * R_{c_1} \tag{1}$$

$$R_x = \frac{R_b}{R_a} * R_{c_2} \tag{2}$$

Quindi moltiplicando i due membri dell'equazioni (1) e (2) si ha:

$$R_x^2 = \frac{R_a}{R_b} * R_{c_1} * \frac{R_b}{R_a} * R_{c_2} = R_{c_1} * R_{c_2} \tag{3}$$

Quindi

$$R_x = \sqrt{R_{c_1} * R_{c_2}} \tag{4}$$

considerando $R_{c_1} \cong R_{c_2}$ ipotizzando di utilizzare delle R a decadi evidenziando la parte comune

$$R_{c_1} = R_0 + r_1 \tag{5}$$

$R_{c_2} = R_0 + r_2$ dove $R_0 >> r_1$ e $R_0 >> r_2$
quindi la (4) diviene

$$R_x = \sqrt{(R_0 + r_1) * (R_0 + r_2)} = \sqrt{R_0^2 + R_0 * (r_1 + r_2) + r_1 * r_2}$$

$$= R_0 * \sqrt{1 + \frac{r_1 + r_2}{R_0} + \frac{r_1 * r_2}{R_0^2}} \cong R_0 * \sqrt{1 + \frac{r_1 + r_2}{R_0}} \tag{6}$$

Ricordando che $(1+\alpha)^n$ con $\alpha << 1$ può essere approssimato nel seguente modo: $(1+\alpha)^n \cong 1 + n\alpha$ essendo r_1 e $r_2 << R_0$ si può concludere che $\frac{r_1 * r_2}{R_0} << 1$ quindi la (6) diviene

$$R_x = R_0 * \left(1 + \frac{r_1 + r_2}{2R_0}\right) = \left(\frac{2R_0 + r_1 + r_2}{2}\right) = \frac{R_{c_1} + R_{c_2}}{2}.$$

Valutazione incertezza

Per valutare l'incertezza bisogna tener conto anche dell'incertezza legata alla sensibilità del ponte. A tal fine le equazioni (1) e (2) vanno così riscritte:

$$R_x = \frac{R_a}{R_b} * R_{c_1} + dR_{s_1}$$

$R_x = \frac{R_b}{R_a} * R_{c_2} + dR_{s_2}$ **quindi sviluppando la (4) e ponendo come prima**

$$R_{c_1} = R_0 + r_1$$

$$R_{c_2} = R_0 + r_2$$

diviene:

$$R_x = \sqrt{R_{c_1} * R_{c_2} + R_{s_1} * \left(\frac{R_a}{R_b} * R_{c_2}\right) + R_{s_2} * \left(\frac{R_b}{R_a} * R_{c_1}\right) + R_{s_1} * R_{s_2}} =$$

$$= \sqrt{R_0^2 + R_0 * (r_{c_1} + r_{c_2}) + r_{c_1} * r_{c_2} + \frac{R_{s_1} * R_a}{R_b} * (R_0 + r_2) + \frac{R_{s_2}}{R_b} * R_a * (R_0 + r_1)} =$$

$$= R_0 * \sqrt{1 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{R_0} + \frac{r_{c_1} * r_{c_2}}{R_0^2} + \frac{R_{s_1} * R_a}{R_b} * \left(\frac{1}{R_0} + \frac{r_2}{R_0^2}\right) + \frac{R_{s_2}}{R_a} * R_b * \left(\frac{1}{R_0} + \frac{r_1}{R_0^2}\right)} \cong$$

$$\cong R_0 * \sqrt{1 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{R_0} + \frac{1}{R_0} * \left(\frac{R_{s_1} * R_a}{R_b} + R_{s_2} * \frac{R_b}{R_a}\right)} \cong$$

$$\cong R_0 * \left(1 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{2} + \frac{1}{2R_0} * \left(\frac{R_{s_1} * R_a}{R_b} + R_{s_2} * \frac{R_b}{R_a}\right)\right) \cong$$

$$\cong R_0 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{2} + \frac{1}{2} * \left(R_{s_1} * \frac{R_a}{R_b} + R_{s_2} * \frac{R_b}{R_a}\right) \cong$$

$$\cong R_0 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{2} + \frac{dR_{s_1} + dR_{s_2}}{2} \quad \textbf{quindi}$$

$$u_{Rx}^2 = U_{R0}^2 + \frac{1}{4} u_{c_1}^2 + \frac{1}{4} u_{c_2}^2 + \frac{1}{4} u_{dRs1}^2 + \frac{1}{4} u_{dRs2}^2$$

4.8 Tecnica della sostituzione

Tale metodo consente di ottenere un incertezza ridotta nelle misure del rapporto di due resistenze che differiscono fra loro di una quantità piccola. Si procede nel seguente modo: si pone una delle due resistenze incognite R_{x1} nel ponte e si raggiunge l'equilibrio:

$$R_{x1} = \frac{R_1}{R_2} * R_{c1} \tag{1}$$

Quindi si sostituisce la R_{x1} con l'altra resistenza incognita e si ricava una nuova condizione d'equilibrio:

$$R_{x2} = \frac{R_1}{R_2} * R_{c2} \tag{2}$$

quindi:

$$\alpha = \frac{R_{x1}}{R_{x2}} = \frac{R_{c1}}{R_{c2}} \tag{3}$$

Per valutare l'incertezza sul rapporto bisogna tener conto dell'incertezza sulle due condizioni di equilibrio si ha:

$$\alpha = \frac{R_{c1} + dR_{s1}}{R_{c2} + dR_{s2}} \tag{4}$$

Inoltre R_{c1} e R_{c2} sono due valori diversi dello stesso resistore a decadi quindi le possiamo scrivere nel seguente modo:

$$R_{c1} = R_0 + r_1 \tag{5}$$

$$R_{c2} = R_0 + r_2$$

dove r_1 e r_2 sono piccole su R_{x1} e R_{x2} sono molte prossime tra loro.

Riprendendo l'espressione (4) diventa:

$$\alpha = \frac{R_0 + r_1 + dR_{s1}}{R_0 + r_2 + dr_{S2}} = \frac{1 + \frac{r_1 + dR_{s1}}{R_0}}{\left(1 + \frac{r_2 + dR_{s2}}{R_0}\right)}$$

se $R_0 >> r_2 + dR_{s2}$ l'espressione diventa:

$$\alpha \cong \left(1 + \frac{r_1 + dR_{s1}}{R_0}\right) * \left(1 - \frac{r_2 + dR_{s2}}{R_0}\right) = 1 + \frac{(r_1 - r_2) + dR_{s1} - dR_{s2}}{R_0} - \frac{(r_1 + dR_{s1})^2 (r_2 + dR_{s2})^2}{R_0^2}$$

poiché r_1 e r_2 così come dR_{s1} e dR_{s2} sono molto minore di R_0 è possibile trascurare l'ultimo termine:

$$\alpha = 1 + \frac{(r_1 - r_2) + dR_{s1} - dR_{s2}}{R_0}$$

quindi l'incertezza assoluta diventa:

$$u_\alpha^2 = \left(\frac{(r_1 - r_2)}{R_0^2}\right)^2 * u_{R0}^2 + \frac{1}{R_0^2} * \left(u_{r1}^2 + u_{r2}^2\right) + \frac{1}{R_0^2} * \left(u_{dRs1}^2 + u_{dRs2}^2\right)$$

A volte il metodo di sostituzione viene utilizzato per misurare una resistenza incognita con un incertezza più bassa ma richiede l'impiego di due resistori campioni variabili. Si posiziona la resistenza incognita nel ponte e raggiunto la condizione di equilibrio si ha:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} * R_{c1}$$

Poi si sostituisce la resistenza incognita R_x con un'altra resistenza campione variabile R_{c2} e si agisce solo su questo secondo resistore fino a giungere alla condizione d'equilibrio mantenendo fisso R_{c1}:

$$R_{c2} = \frac{R_1}{R_2} * R_{c1} \qquad \textbf{(6)}$$

quindi $R_x = R_{c2}$.

Tenendo conto delle due condizioni di equilibrio la relazione (6) si può riassumere come :

$$R_x = R_{c2} + 2dR$$

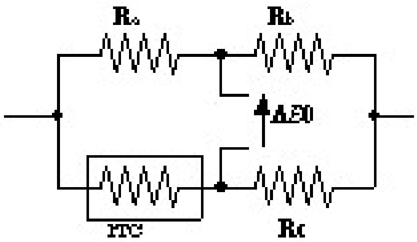
ne segue che l'incertezza assoluta sul resistore è data da:

$$u_{Rx}^2 = u_{Rc}^2 + 4u_{dR}^2$$

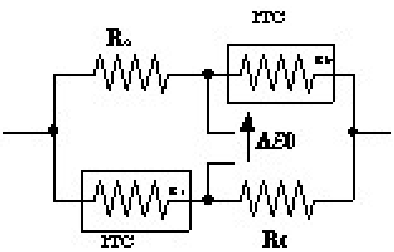
Quindi l'incertezza su R_1 e su R_2 non rientra in questa relazione e quindi la misura è caratterizzata da un'incertezza minore rispetto al ponte tradizionale.

Altre applicazioni del ponte

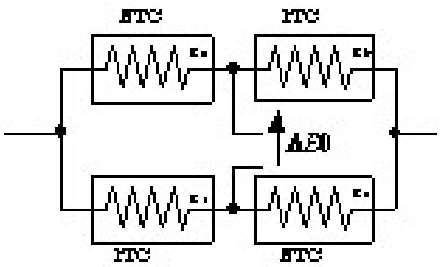
Il ponte di Wheatstone oltre ad essere utilizzato per misure di resistenza può essere impiegato come circuito di condizionamento per sensori resistivi (estensimetri, sensori piezoresistivi, termoresistenze termistori) Se al posto di R_x si pone un sensore, per esempio una termoresistenza , come in figura



ne segue che azzerando ΔE_0 per un dato valore θ_0 della temperatura, al variare della ϑ varia la resistenza del sensore, generando quindi uno squilibrio del ponte. Esiste un legame di proporzionalità tra lo squilibrio in tensione, la resistenza incognita e la temperatura cioè: $\Delta E \propto \Delta R_x \propto \Delta\theta$. Se si utilizzano due sensori uguali posti su due lati opposti si otterrà un squilibrio doppio. come da figura



Utilizzando quattro sensori, due con variazioni positivi e due negativi, si otterrà un squilibrio quadruplo.



eliminiamo il problema dell'azzeramento utilizzando sensori con le stesse caratteristiche. Nell'ipotesi che lo strumento che misura ΔE_0 assorba una corrente praticamente trascurabile cioè che il ponte abbia i morsetti di ΔE_0 a vuoto si

ha: $E_0 = E * \left[\frac{R_x}{R_x + R_c} - \frac{R_a}{R_a + R_b} \right]$ **In condizione di azzeramento le resistenze sono uguali** $R_x = R_c = R_a = R_b$ **ne segue che** $E_0 = 0$**. Se** R_x **subisce una variazione** $\Delta R \Rightarrow 0$ **avrò una** $\Delta E_0^{'}$ **come da formula:**

$$\Delta E_0^{'} = E * \left[\frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R} - \frac{R}{R} \right]$$

$$= E * \left[\frac{2R + 2\Delta R - 2R - \Delta R}{2 * (2R + \Delta R)} \right], \text{ se } \Delta R << R$$

$$\Delta E_0^{'} \cong \frac{E * \Delta R}{4R},$$

essendo ΔR **dell'ordine del** $^0\!/_{00} - ^0\!/_0$ **di R. Se la due resistenze** R_x **e** R_b **subiscono una variazione** ΔR **avrò una nuova variazione** $\Delta E_0^{''}$ **data da:** $\Delta E_0^{''} = E * \left[\frac{R + \Delta R}{2R + \Delta R} - \frac{R}{2R + \Delta R} \right] \cong \frac{E * \Delta R}{2R} = 2\Delta E_0^{'}$.

Considerando invece una variazione ΔR **positiva e negativa sulle due resistenze** R_x **e** R_b **lavariazione**

diventa: $\Delta E_0^{'''} = E * \left[\frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R - \Delta R} - \frac{R - \Delta R}{R + \Delta R + R - \Delta R} \right] = \frac{E * \Delta R}{R}$.

Emerge che la variazione di $\Delta R \propto \Delta \theta$.