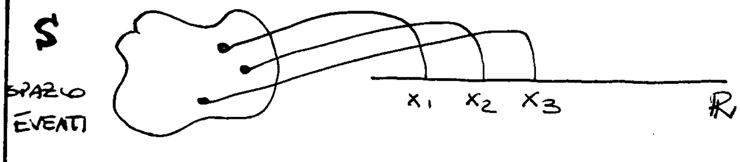
PROCESSI ALEATORI ⇒ dove processi CASUALI ⇒ nella realtà esistono solo processi di questo genere in quanto c'è da considerare che il RUMORE è sempre presente anche in PICCOLA PARTE e non potrà essere determinato a priori.

Per questo motivo l'ANALISI DEI PROCESSI DI TELECOMUNICAZIONE si basa sull'ANALISI DI PROCESSI STOCASTICI (consideriamo il rumore come variabile aleatoria).

<u>PROCESSI ALEATORI</u> ⇒ è un insieme ordinato di funzioni reali di un certo parametro, di solito il tempo che ha determinate proprietà STATISTICHE.



Faccio N esperimenti e ad ogni RISULTATO associo un numero sull'asse REALE.
in realtà associamo ad un CAMPIONE di S una funzione reale di variabile reale ⇒ supponiamo che queste funzioni siano continue nel tempo e a valori continui ⇒
se noi fissiamo N-ISTANTI di tempo generici otteniamo N diverse variabili aleatorie estratte dal processo e le indichiamo con $X(t_1), X(t_2), \ldots\ldots, X(t_N)$. Ognuna di queste variabili aleatorie hanno tutte le proprietà di una comune VARIABILE ALEATORIA ⇒

FUNZIONE DISTRIBUZIONE $F_{X(t)}(x) = p(X \leq x)$

FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ $f_X(x) = \dfrac{d\,F_{X(t)}(x)}{dx}$

VALORE MEDIO DI $X(t) = E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X(t)}(x)\,dx$

Sappiamo che dato un certo numero di variabili aleatorie, è possibile associare ad esse la FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA delle N VARIABILI aleatorie estratte dal processo la funzione $\Rightarrow$

$$F_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_N)}(x_1,x_2,\dots x_N)=P(X(t_1)\leq x_1, X(t_2)\leq x_2,\dots,X(t_N)\leq x_N)$$

stesso ragionamento si fa con 2 sole variabili aleatorie $\Rightarrow$
$X(t_1), X(t_2)$ estratte dal processo $\Rightarrow$

1) DISTRIB. CONGIUNTA $\Rightarrow F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)=P(X(t_1)\leq x_1, X(t_2)\leq x_2)$

2) DENSITA' CONGIUNTA $\Rightarrow f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)$

3) CORRELAZIONE $\Rightarrow R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\iint_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f_{X(t_1)(X(t_2))}(x_1,x_2)dx_1dx_2$

4) COVARIANZA $\Rightarrow C_X(t_1,t_2)= E\{[X(t_1)-E[X(t_1)]][X(t_2)-E[X(t_2)]]\}$

In particolare covarianza e correlazione sono legate fra loro dalla relazione $C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-E[X(t_1)]E[X(t_2)]$

NB = se le due variabili sono a media nulla la loro correlazione corrisponde alla loro covarianza.

Def. PROCESSO STOCASTICO $\Rightarrow$ si dice stazionario quando la funzione di distribuzione di probabilità risulta invariante rispetto ad una traslazione temporale

$$F_{X(t_1),X(t_2),\dots X(t_N)}(x_1,x_2\dots x_N) = F_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau)\dots X(t_N+\tau)}(x_1,x_2,\dots x_N)$$

Un processo stocastico STAZIONARIO È IN SENSO STRETTO se le sue caratteristiche statistiche non variano al variare del tempo (cioè in presenza di traslazioni temporali). ⇒ questo vale per qualsiasi valore di N.

• CASO $N=1$ ⇒ abbiamo $F_{X(t_1)}(x) = P(X(t_1)\leq x_1) = F_{X(t_1+\tau)}(x_1) = P(X(t_1+\tau)\leq x_1)$

Cioè abbiamo che dato UN PROCESSO STOCASTICO STAZIONARIO IN SENSO STRETTO se prendiamo due istanti qualsiasi di tempo e date le corrispondenti variabili aleatorie estratte dal processo, queste due variabili da un PUNTO DI VISTA STATISTICO SONO IDENTICHE ⇒

mi determina ⇒ $\boxed{f_{X(t_1)}(x) = f_{X(t_1+\tau)}(x)}$

• CASO $N=2$ ⇒ OTTENGO DUE RISULTATI IMPORTANTI

- la distribuzione congiunta delle variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$ dipende solo dalla differenza t_2-t_1 (e non solo da t_1 e t_2 singolarmente)

- la CORRELAZIONE tra le due variabili aleatorie dipende ancora dalla differenza t_2-t_1

de ⇒ correlazione = aspettazione del prodotto

Def. PROCESSO STOCASTICO È STAZIONARIO IN SENSO LATO se si verificano due CONDIZIONI $\Rightarrow$

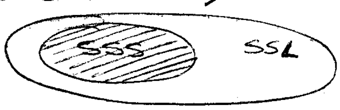
1) presa la variabile aleatoria $X(t)$ estratta dal processo ad un generico istante t, la sua media è indipendente dal TEMPO

2) prese due variabili aleatorie estratte dal processo negli istanti t_1 e t_2, la loro funzione di correlazione dipende solo dalla differenza $t_2 - t_1$

- Abbiamo quindi $\begin{cases} E[X(t)] = m_X & \forall t \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) & \forall t_1, t_2 \end{cases}$

Per questo un processo stazionario SSS si ha che se un processo è SSS sarà anche SSL (non vale il contrario)

Quindi $\overset{1}{\text{SSS}} \rightarrow \overset{2}{\text{SSL}}$



- PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI ~~AUTOCORRELAZIONE~~ CORRELAZIONE $R_X(\tau)$ quando $\tau = 0$ ~~ENERGIA DEL SEGNALE~~

1° $R_X(\tau)\Big|_{\tau=0} = E[x^2(t)]$ momento del 2° ordine della variabile estratta al tempo t

2° $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ in quanto R_X è una funzione PARI

Poniamo $R_X(-\tau) \Rightarrow E[x(t-\tau)x(\tau)] = E[x(\tau)x(t-\tau)]$ che equivale a dire che $E[xy] = E[yx]$

3° $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ Si pone:

$$0 \leq E[x(t) + x(t-\tau)]^2 = E[x^2(t) + x^2(t-\tau) + 2x(t)x(t-\tau)] \geq 0$$

$$E[x^2(t)] + E[x^2(t-\tau)] + 2E[x(t)x(t-\tau)] \geq 0$$

$$R_X(0) + R_X(0) + 2R_X(\tau) \geq 0$$

$R_X(\tau) \geq -R_X(0)$ $\Rightarrow$ che equivale $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$

ERGODICITÀ DEI PROCESSI STOCASTICI

Un processo STOCASTICO associa a ciascun campione derivante da un SPAZIO DI EVENTI una determinata FUNZIONE CONTINUA NEL TEMPO.
Fissando un certo istante t e considerando i valori assunti in questo ISTANTE da tutte le funzioni scelte (REALIZZAZIONI), definiamo una variabile aleatoria $X(t)$ che descrive le caratteristiche STATISTICHE del processo all'ISTANTE t.

Come si fa a risalire alle varie proprietà statistiche conoscendo solo la realizzazione? ⇒ quando ciò è possibile si dice che il processo È ERGODICO ⇒

• Def. PROCESSO ERGODICO ⇒ quando è possibile risalire alle sue caratteristiche statistiche conoscendo solo una delle realizzazioni di cui il processo si compone.

ERGODICITÀ IN MEDIA = quei processi STOCASTICI per i quali è possibile conoscere la MEDIA a partire dalla conoscenza di 1 sola realizzazione.
Se consideriamo ad esempio una generica realizzazione del PROCESSO ⇒ indico $f(t, s_i)$ dove t in quanto è funzione continua del TEMPO, e s_i indica il CAMPIONE al quale la realizzazione è ASSOCIATA.
Trattandosi di una funzione del tempo si può calcolare la MEDIA TEMPORALE che viene definita ⇒

$$< f(t, s_i) > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t, s_i)\, dt$$

Diremo che un <u>PROCESSO STOCASTICO È ERGODICO IN MEDIA</u> quando abbiamo ⇒

$$P\left(<f(t,s_i)> = E[X(t)]\right) = P\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t,s_i)\,dt = E[X(t)]\right) = 1$$

cioè la media temporale della realizzazione considerata coincide con la media del processo con probabilità del 100% (o 1) ⇒

DA EVITARE

Si può dimostrare che un processo STOCASTICO sarà ERGODICO solo quando è STAZIONARIO e quindi possiamo scrivere ⇒ ~~IN SENSO~~

$$P\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t,s_i)\,dt = m_x\right)$$

<u>Processo di Poisson</u> (discreto)

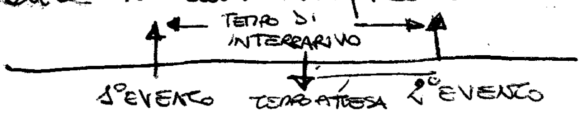
⇒ fa parte dei PROCESSI PUNTUALI cioè nei quali la CASUALITÀ è legata al tempo in cui si verificano certi FENOMENI

Di particolare importanza sono le GRANDEZZE ⇒

1- dobbiamo conoscere il numero di fenomeni in un dato intervallo di tempo (t_0, t_1)

2- <u>TEMPO DI INTERARRIVO</u> ⇒ tempo che intercorre tra l'evento considerato e quello subito successivo

3- <u>TEMPO DI ATTESA</u> ⇒ Tempo che intercorre tra l'istante considerato (UNO QUALSIASI) e l'istante in cui si verifica l'evento successivo.



PROPRIETÀ PROCESSO DI POISSON

Indichiamo con λ l'INTENSITÀ DI PROCESSO che indica il numero di eventi che si verificano nell'unità di tempo.
Consideriamo che il numero medio di eventi che si verificano nell'unità di tempo è sempre lo stesso $\Rightarrow$ cioè su un intervallo di tempo di ampiezza T ho $\lambda \cdot T$ numero medio di INTERVALLI.
Possiamo anche considerare $N(T)$ una variabile aleatoria (ci dà il numero di eventi in un intervallo di tempo cioè λT) $\Rightarrow$ ottengo in pratica che il valore $P(N(T)=k)$ ovvero che la probabilità che ci siano k eventi nell'INTERVALLO T non dipende dall'istante iniziale e finale ma solo dall'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO DI TEMPO T. $\Rightarrow$ possiamo scrivere

$$P\left(N(T)=k\right)=P\left(N(t,t+T)=k\right)$$

Considerando l'intervallo T posso dividerlo in n intervalli di ampiezza $\delta \Rightarrow n\delta=T$. Poi consideriamo la probabilità che si verifichi più di 1 evento in ciascun δ COME TRASCURABILE (cioè non si verifica); poi nel caso in cui si verifichi questa probabilità la pongo uguale a p.
Se adesso noi scegliamo un INTERVALLO $[t,t+\delta]$ ottengo:

$$P[N(t,t+\delta)=1]=p$$ si verifica un evento

$$P[N(t,t+\delta)=0]=1-p$$ nessun evento

$$P[N(t,t+\delta)>1]\cong 0$$ più di un evento

Con la relazione $P[N(t,t+\delta)=1]=p$ dice che il numero medio di eventi che si verificano in un intervallino δ è pari a p.

Se dunque l'intervallo T è composto da $n\delta$ ottengo che il numero medio di eventi che si verificano in un intervallo di tempo T è np ⇒ ottengo $\boxed{np = \lambda T}$

Infine considero che due intervalli di tempo disgiunti (non hanno eventi in comune) $[t_1, t_2]$ e $[t_3, t_4]$ si verifica che il numero di eventi nel primo intervallo sia indipendente dal numero di eventi che si verificano nel secondo e viceversa.

FORMULA DI POISSON

Indicata con $N(T)$ la variabile aleatoria che ci da il numero di eventi che si verificano nell'INTERVALLO DI TEMPO T, vediamo che la probabilità che si verificano k eventi è

$P(N(T)=k)$.

Abbiamo diviso l'intervallo T in n - intervalli di ampiezza δ e praticamente $P(N(T)=k)$ individua anche la probabilità che in k di questi n - intervalli ci sia 1 evento e nei restanti $n-k$ intervalli 0 eventi.

Si può applicare formula di BERNOULLI

$$P(N(T)=k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

che equivale a scrivere $P(N(T)=k) = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

Poniamo $np = \lambda T$

$p = \dfrac{\lambda T}{n}$ ⇒ ricavo ⇒ $\boxed{P(N(T)=k) = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\dfrac{\lambda T}{n}\right)^k \left(1 - \dfrac{\lambda T}{n}\right)^{n-k}}$

Sviluppo il fattoriale di n, abbiamo che $\Rightarrow$

$$P(N(T)=k) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)}\cdots}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda T}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-k}$$

in quanto i termini successivi a $(n-k+1)$ sono gli stessi di $(n-k)!$
quindi posso scrivere $\Rightarrow$

$$P[N(T)=k] = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda T}{n}\right)^{k}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-k}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ equivale a scrivere $\Rightarrow$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{(\lambda T)^k}{k!}\cdot\overbrace{\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}}$$

Faccio il limite per $n\to\infty$ ottengo $\Rightarrow$

$$P(N(T)=k) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{\cancel{n^k}}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}\right]$$

infinitesimo dello stesso ordine

sposto $\frac{(\lambda T)^k}{k!}$ in quanto non dipende da $\underline{\underline{n}}$

$$P(N(T)=k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!}\lim_{N\to\infty}\left[\cancel{\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n}}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}\right]$$

$1 \Rightarrow$ limite notevole

$$P(N(T)=k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!}\underbrace{\lim_{N\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}\right]}$$

anche questo è limite notevole ed è $e^{-\lambda T}$

Ottengo $\Rightarrow$ $\boxed{P(N(T)=k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda T}}$ FORMULA DI POISSON

probabilità che in un intervallo di ampiezza T si verifichino k eventi di Poisson $\Rightarrow$ detti EVENTI DI POISSON

TEMPO DI INTERARRIVO e TEMPO DI ATTESA

Intervallo di tempo che intercorre tra due eventi (o arrivi) successivi. Si tratta di una variabile aleatoria $\Rightarrow \tau_1$

Vediamo la funzione di distribuzione $F_{\tau_1}(x) \leq P(\tau_1 \leq x)$ e che naturalmente $F_{\tau_1}(x) = 1 - P(\tau_1 > x)$

$P(\tau_1 > x)$ indica la probabilità che l'evento successivo avvenga non prima di un intervallo di tempo di ampiezza $x \Rightarrow$ ovvero che nell'intervallo considerato non si verifichi alcun evento.

Questa probabilità si può calcolare con la formula di POISSON per cui $\Rightarrow$

$$F_\tau(x) = 1 - P(N(x) = \underbrace{\emptyset}_{\text{ZERO}})$$

e quindi utilizzando POISSON abbiamo $\Rightarrow$

NB $\frac{(\lambda x)^\emptyset}{\emptyset!} = 1$ $\quad P(N(T) = k) = 1 - \frac{(\lambda x)^\emptyset}{\emptyset!} e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}$ vediamo quando $k = 0$

$$\boxed{P(N(T) = k) = 1 - e^{-\lambda x} = F_{\tau_1}(x)}$$ che indica la distribuzione

mentre la funzione di densità di probabilità $\boxed{f_{\tau_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$

Stesso identico discorso va fatto per

il TEMPO DI ATTESA $\Rightarrow$ tempo che intercorre tra l'istante t e l'istante in cui si verifica l'evento immediatamente successivo

Indico con θ la variabile aleatoria $\Rightarrow$

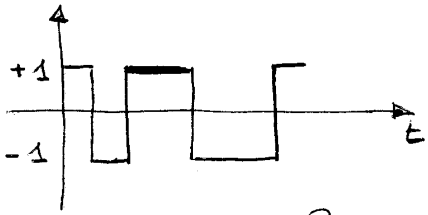
$F_\theta(x) = 1 - P(\theta > x) \Rightarrow$ che mi da come

1) FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $\Rightarrow F_\theta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

2) DENSITA' DI PROBABILITA $f_\theta(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

PROCESSO TELEGRAFICO CASUALE

È un processo in cui ogni realizzazione può solo assumere due diversi VALORI e precisamente +1 e -1



Si suppone che il cambiamento da +1, -1 e viceversa sia condizionato al verificarsi di un evento di POISSON:

praticamente si verifica un evento di POISSON e si determina così uno STATO (+1) ad esempio); nel momento, e solo in quel momento, in cui si realizza un altro evento di POISSON avrò (−1).

Indichiamo con $X(t)$ la variabile aleatoria estratta al tempo t ed indichiamo con $P(X(t)=1)$ la probabilità che abbiamo +1.

— — — — — — — TEOREMA — — — — — — —

Si USA PER QUESTO CALCOLO QUELLO DELLE PROBABILITÀ TOTALI

si serve ⇒ $P(X(t)=1) = P(X(t)=1 \mid X(0)=1)\underbrace{P(X(0)=1)}_{1/2} + P(X(t)=1 \mid X(0)=0)\underbrace{P(X(0)=0)}_{1/2}$.

• Ora poniamo per semplicità che il sistema assuma valori +1 e -1 con la stessa probabilità che quindi è uguale ad $\frac{1}{2}$ ⇒ quindi ottengo

$$P(X(t)=1) = \underbrace{P(X(t)=1 \mid X(0)=1)}_{\text{PROBABILITÀ CONDIZIONATA}}\frac{1}{2} + \underbrace{P(X(t)=1 \mid X(0)=0)}_{\text{PROBABILITÀ CONDIZIONATA}}\frac{1}{2}$$

• $P(X(t)=1 \mid X(0)=1)$ ➔ probabilità che all'istante t il processo si trovi nello stato +1 come lo era anche all'istante $t=0$.

Ogni volta che si verifica un evento di POISSON si verifica un cambiamento di STATO ⇒ noi avremo lo stato +1 ~~all~~'istante t solo se nell'intervallo $[0,t]$ si verifica un numero PARI di eventi di POISSON.

Indico con $N(t)$ la variabile aleatoria che tiene conto del numero di eventi di POISSON nell'intervallo $(0,t)$ possiamo scrivere $\Rightarrow$

$$\boxed{P(X(t)=1 \mid X(0)=1) = P(N(t)=\text{PARI})}$$

• La $P(X(t)=1 \mid X(0)=0)$ è la probabilità che all'istante t il processo si trovi all'istante +1 dopo che allo stato $t=0$ era nello stato $\varnothing$. $\Rightarrow$ Questo si determina solo quando nell'intervallo $[0,t]$ c'è uno numero DISPARI di EVENTI DI POISSON

$$\boxed{P(X(t)=1 \mid X(0)=0) = P(N(t)=\text{DISPARI})}$$

Quindi abbiamo che $P(X(t)=1) = \frac{1}{2}\left(P(N(t)=\text{PARI})\right) + \left(P(N(t)=\text{DISPARI})\right)\frac{1}{2}$
Si devono valutare quelle due probabilità sfruttando ancora una volta la formula di POISSON $\Rightarrow$

$$P(N(T)=k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$ da queste determiniamo

• $$P(N(t)=\text{PARI}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2i}}{(2i)!}\left(e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2i}}{2i!}$$

• $$P(N(t)=\text{DISPARI}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!}\left(e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

C'è da considerare lo sviluppo in serie della FUNZIONE ESPONENZIALE

1) $$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \frac{(\lambda t)^n}{n!} + \dots$$

2) $$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \frac{(-1)(\lambda t)^n}{n} + \dots$$

Sommiamo membro a membro questi due sviluppi $\Rightarrow$

$$e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} = 2 + \frac{2(\lambda t)^2}{2!} + \frac{2(\lambda t)^4}{4!} + \dots + \frac{2(\lambda t)^{2n}}{n!} \dots = 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2i}}{(2i)!} = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}\right) \quad N = \text{PARI}$$

Infine otteniamo $\Rightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!} = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right)$ $\underline{N = \text{DISPARI}}$

In definitiva possiamo riscrivere il tutto come $\Rightarrow$

$$P(X(t)=1) = \frac{1}{2}P(N(t)=\text{PARI}) + \frac{1}{2}P(N(t)=\text{DISPARI}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i}}{(2i)!} + \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}\right)\right) + \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}\right) + \frac{1}{4}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}\right) = \frac{1}{2}$$

Ottengo $P(X(t)=1) = \frac{1}{2}P(N(t)=\text{PARI}) + \frac{1}{2}P(N(t)=\text{DISPARI}) = \frac{1}{2}$

Come $\frac{1}{2}$ sarà anche $P(X(t)=-1) = \frac{1}{2}$

Quindi avremo $X(t) = \begin{cases} +1 & \text{con probabilità } 1/2 \\ -1 & \text{con probabilità } 1/2 \end{cases}$

- <u>CARATTERISTICHE STATISTICHE di $X(t)$</u>

la media di $X(t)$ è $\Rightarrow$

$$E[X(t)] = 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = \varnothing \quad \underline{\text{media nulla}}$$

si ha che $R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$ e chiamiamo $Z(t_1,t_2) = X(t_1)X(t_2)$ e questa funzione $Z(t_1,t_2)$ assume gli stessi valori di $X(t)$ e quindi o $+1$ o -1. $\Rightarrow$

ottengo quindi

$$R_X(t_1,t_2) = E[Z(t_1,t_2)] = (+1)\,P[Z(t_1,t_2)=1] + (-1)\,P[Z(t_1,t_2)=-1]$$

Avremo che $Z(t_1,t_2)=1$ nel momento in cui $X(t_1)$ e $X(t_2)$ assumono valori uguali $\Rightarrow$

si ha che $X(t_1)=X(t_2)$ nel momento in cui assumono gli stessi stati ed ipotizzando che $t_2>t_1$, ciò significa che nell'intervallo $[t_1,t_2]$ avviene un numero pari di eventi di POISSON per cui avremo $\Rightarrow$

$$\boxed{P(X(t_1)=X(t_2))=P(N(t_2-t_1)=\text{PARI})}$$

Nel momento in cui $X_1(t_1)\neq X(t_2)$ vuol dire stati differenti in un intervallo da $[t_1,t_2]$ $\Rightarrow$ si viene a creare questa situazione nel momento in cui abbiamo N. DISPARI di EVENTI DI POISSON $\Rightarrow$

$$P(X(t_1)\neq X(t_2))=P(N(t_2-t_1)=\text{DISPARI})$$

Si può scrivere il tutto come $\Rightarrow$

$$R_X(t_1,t_2)=P(N(t_2-t_1)=\text{PARI})-P(N(t_2-t_1)=\text{DISPARI})$$

Abbiamo che $P(N(t)=\text{PARI})=\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}\right)=\frac{1}{2}\left(1+2e^{-\lambda t}\right)$

$$P(N(t)=\text{DISPARI})=\frac{1}{2}\left(1-2e^{-\lambda t}\right)$$

da cui segue $\Rightarrow$ $P(N(t_2-t_1)=\text{PARI})=\frac{1}{2}\left(1+2e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right)$

$$P(N(t_2-t_1)=\text{DISPARI})=\frac{1}{2}\left(1-2e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right)$$

Infine abbiamo $\Rightarrow$ $R_X(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\left(1+2e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right)-\frac{1}{2}\left(1-2e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right)=$

$$=e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$$