

Elementi di Teoria dei giochi

Teoria dei giochi

Studio dei modelli matematici di cooperazione e conflitto tra individui *intelligenti* e *razionali*.

- **Razionalità:** ciascun individuo massimizza la sua utilità attesa rispetto a qualche credenza
- **Intelligenza:** ciascun individuo comprende la situazione in cui è coinvolto, compreso il fatto che gli altri individui sono intelligenti e razionali.

Cos'è un gioco?

Un gioco è descritto da quattro cose:

1. I giocatori
2. Le regole: ordine delle mosse, azioni possibili, informazione
3. Esiti (per ogni possibile profilo di scelte)
4. Vincite o utilità attesa.

Azioni vs Strategie

Azioni

L'insieme delle "mosse" a disposizione dei giocatori

Strategia

Piano **completo** di azione.

La strategia specifica un'azione per ognuna delle situazioni in cui il giocatore può essere chiamato a decidere (indipendentemente dal fatto che poi venga effettivamente a trovarsi in quella situazione)

NB: In alcuni casi possono coincidere!

Teoria dei giochi

		<i>Giocatore A</i>	
		Opzione X	Opzione Y
<i>Giocatore B</i>	Opzione X	A_{xx} B_{xx}	A_{yx} B_{xy}
	Opzione Y	A_{xy} B_{yx}	A_{yy} B_{yy}

Equilibrio di Nash

- Si ha l'equilibrio di Nash quando nessuno dei giocatori, data (ipotizzata) la strategia degli altri, è in grado di migliorare il proprio risultato.

Due tipi di interazione strategica

1 interazione simultanea: ciascun giocatore decide le proprie scelte ignorando le scelte compiute dagli altri giocatori

anche se i giocatori compiono le scelte in momenti diversi si ha una interazione simultanea (è come se i giocatori decidessero simultaneamente: ciascuno deve decidere senza sapere cosa hanno deciso gli altri)

2 interazione sequenziale: i giocatori decidono le proprie scelte in modo sequenziale e ciascun giocatore compie le proprie scelte conoscendo le scelte dei giocatori che hanno deciso prima di lui

nel caso di interazione simultanea si deve cercare di mettersi nei panni della controparte per indovinare le sue scelte anche se non lo si può osservare

suggerimenti

se un giocatore può scegliere una mossa che gli garantisce un risultato migliore rispetto a quello di tutte le altre mosse, qualunque sia la scelta degli altri giocatori, si dice che il giocatore dispone di una *strategia dominante* (ottimizza i suoi risultati indipendentemente dalle scelte dell'altro giocatore)

- se il giocatore A dispone di una *strategia dominante* deve scegliere quella strategia
- se il giocatore B *non* dispone di una strategia dominante, allora deve scegliere la migliore risposta alla strategia dominante del giocatore A

suggerimenti (continua)

- se nessuna delle parti ha una strategia dominante deve cercare di individuare una strategia dominata una *strategia dominata* garantisce un risultato peggiore rispetto a quello di *una* delle altre mosse, qualunque sia la scelta degli altri giocatori
- se un giocatore dispone di una strategia dominata deve eliminare quella strategia
- l'operazione va condotta più volte: un giocatore deve eliminare tutte le strategie dominate
- ciascun giocatore deve considerare il fatto che gli altri giocatori eliminano le loro strategie dominate

suggerimenti (continua)

- se durante il procedimento della eliminazione iterata delle strategie dominate emergono strategie dominanti nel gioco di dimensioni ridotte, allora tali strategie vanno scelte man mano che si presentano
- se tale procedimento termina con un risultato unico, vengono individuate indicazioni per il comportamento dei giocatori e per l'esito del gioco

Esempio 1

il giocatore A può scegliere fra due mosse (su, giù)
 il giocatore B può scegliere fra tre mosse (sinistra, centro, destra)

		B		
		sinistra	centro	destra
A	su	1, 0	1, 2	0, 1
	giù	0, 3	0, 1	2, 0

ogni casella corrisponde ad una combinazione di mosse dei due giocatori
 il primo numero di ogni casella corrisponde al risultato (*payoff*) conseguito dal giocatore A; il secondo numero a quello conseguito dal giocatore B

Esempio (continua)

per il giocatore A nessuna delle due strategie è dominata:

su è meglio di *giù* se B sceglie *sinistra* oppure *centro* (1>0);
 viceversa *giù* è meglio di *su* se B sceglie *destra* (2>0)

il giocatore B non ha una strategia dominante (che gli garantisce un risultato migliore rispetto a quello delle altre mosse, qualunque sia la scelta di A); tuttavia ha una strategia dominata:

destra è dominata da *centro* (2>1 se A sceglie *su*, 1>0 se A sceglie *giù*)

quindi

Esempio (continua)

quindi

il giocatore B elimina la strategia *destra* e il giocatore A deve tener conto di questa eliminazione

il gioco si riduce alla seguente tabella:

		B	
		sinistra	centro
A	su	1, 0	1, 2
	giù	0, 3	0, 1

Esempio (continua)

in questa nuova versione del gioco si ha che per il giocatore A la strategia *giù* è dominata da *su* (*su* è la strategia dominante per il giocatore A)

quindi

il giocatore A elimina la strategia *giù* e il giocatore B deve tener conto di questa eliminazione

il gioco si riduce alla seguente tabella:

		B	
		sinistra	centro
A	su	1, 0	1, 2

Esempio (continua)

in questa nuova versione del gioco si ha che per il giocatore B la strategia *sinistra* è dominata da *centro* (*centro* è la strategia dominante per il giocatore B)

quindi

l'esito del gioco sarà (su, centro)

		B
		centro
A	su	1, 2

in molte situazioni di interazione strategica non ci sono strategie dominanti o dominate

oppure

la procedura della eliminazione iterata delle strategie dominate aiuta a ridurre la "dimensione" del gioco, ma non conduce ad una soluzione unica

in tali situazioni, per individuare le strategie ottimali si deve tener conto del fatto che ciò che è meglio per un giocatore dipende da ciò che è meglio per gli altri giocatori e viceversa

in altri termini, per individuare l'esito del gioco si deve individuare una combinazione di strategie dove la scelta di ciascun giocatore sia la migliore risposta a quella degli altri

quindi, se non ci sono strategie dominanti o dominate, oppure se il gioco è già stato "semplificato" mediante l'eliminazione iterata delle strategie dominate, ma non si è arrivati ad una soluzione unica,

allora

la strategia ottimale può essere individuata cercando una combinazione di strategie dove la scelta di ciascun giocatore sia la migliore risposta a quella degli altri

tale combinazione viene definita *equilibrio di Nash*

Esempio 2

		B		
		sinistra	centro	destra
A	alto	0, 4	4, 0	5, 3
	medio	4, 0	0, 4	5, 3
	basso	3, 5	3, 5	6, 6

- non ci sono strategie dominanti
- non ci sono strategie dominate
- per determinare le scelte ottimali per i due giocatori si procede "per ispezione" nel modo che segue

si "evidenziano" le scelte di ciascun giocatore che sono le risposte ottime alle scelte della controparte evidenziando il *payoff* corrispondente

per il giocatore A si ha:

- medio è la risposta ottima a sinistra poiché $4 > 0$ e $4 > 3$
- alto è la risposta ottima a centro poiché $4 > 0$ e $4 > 3$
- basso è la risposta ottima a destra poiché $6 > 5$ e $6 > 5$

		B		
		sinistra	centro	destra
A	alto	0, 4	4, 0	5, 3
	medio	4, 0	0, 4	5, 3
	basso	3, 5	3, 5	6, 6

per il giocatore B si ha:

- sinistra è la risposta ottima a alto poiché $4 > 0$ e $4 > 3$
- centro è la risposta ottima a medio poiché $4 > 0$ e $4 > 3$
- destra è la risposta ottima a basso poiché $6 > 5$ e $6 > 5$

		B		
		sinistra	centro	destra
A	alto	0, 4	4, 0	5, 3
	medio	4, 0	0, 4	5, 3
	basso	3, 5	3, 5	6, 6

se in una casella risultano sottolineati entrambi i payoff, allora è stata individuata una combinazione di strategie caratterizzata dal fatto che ciascuna è la risposta ottima all'altra (equilibrio di Nash)

		B		
		sinistra	centro	destra
A	alto	0, <u>4</u>	<u>4</u> , 0	5, 3
	medio	<u>4</u> , 0	0, <u>4</u>	5, 3
	basso	3, 5	3, 5	<u>6</u> , <u>6</u>

Ricapitolando

Nel caso di interazione **simultanea** è opportuno seguire (in successione) i seguenti suggerimenti

- suggerimento (1) individuare e utilizzare le strategie dominanti e ipotizzare un comportamento analogo da parte degli altri giocatori
- suggerimento (2) individuare ed evitare le strategie dominate e ipotizzare un comportamento analogo da parte degli altri giocatori
- suggerimento (3) individuare un equilibrio, e cioè una combinazione di strategie dove la scelta di ciascun giocatore sia la migliore risposta a quella degli altri

seguendo i tre suggerimenti è possibile individuare le scelte ottimali in un insieme abbastanza ampio di situazioni di interazione simultanea

nel caso di interazione **sequenziale** ciascun giocatore deve guardare avanti e considerare come le sue scelte immediate influiranno su quelle future degli altri e su quelle che lui stesso compirà in seguito

in altri termini, il giocatore deve immaginare quali saranno le risposte future degli altri giocatori e in base ad esse individuare la migliore scelta da compiere immediatamente

nel caso di interazione sequenziale è opportuno aggiungere un ulteriore suggerimento

- suggerimento (4) guardare avanti e ragionare retrospettivamente

Esempio 3

si consideri il seguente gioco

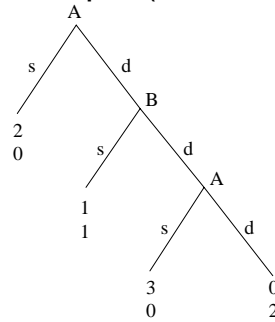
- nel **periodo 1** il giocatore A deve scegliere fra sinistra (s) e destra (d);
 - la scelta s pone fine al gioco e assegna un payoff pari a 2 al giocatore A e un payoff pari a 0 al giocatore B;
 - la scelta d permette di giocare al giocatore B nel periodo 2
- nel **periodo 2** il giocatore B, dopo aver osservato la mossa del giocatore A, deve scegliere fra s e d;
 - la scelta s pone fine al gioco e assegna un payoff pari a 1 a entrambi i giocatori;
 - la scelta d permette di giocare al giocatore A nel periodo 3

Esempio (continua)

- nel **periodo 3** il giocatore A, dopo aver osservato la mossa del giocatore B, deve scegliere fra sinistra (s) e destra (d);
- entrambe le mosse pongono fine al gioco;
- la scelta s assegna un *payoff* pari a 3 al giocatore A e un *payoff* pari a 0 al giocatore B;
- la scelta d assegna un *payoff* pari a 0 al giocatore A e un *payoff* pari a 2 al giocatore B;

è possibile rappresentare la situazione di interazione sequenziale nel modo che segue:

Esempio (continua)



Esempio (continua)

il giocatore A deve “guardare avanti” e immaginare di arrivare al terzo periodo; in questo punto la scelta s risulta ottima

tuttavia, il giocatore A deve “ragionare retrospettivamente” e considerare che:

- nel secondo periodo il giocatore B anticipa che se il gioco raggiunge il terzo periodo allora A sceglierà s e ciò implica un *payoff* pari a 0 per il giocatore B
- perciò la scelta ottima del giocatore B nel secondo periodo sarà s che gli garantisce un *payoff* pari a 1

Esempio (continua)

- pertanto, nel primo stadio del gioco il giocatore A anticipa che se il gioco raggiunge il secondo periodo, allora B sceglierà s e ciò implica un *payoff* pari a 1 per il giocatore A

- perciò la scelta ottima del giocatore A nel primo periodo sarà s che gli garantisce un *payoff* pari a 2

il giocatore A “guardando avanti e ragionando retrospettivamente” sceglie immediatamente (nel primo periodo) s ponendo fine al gioco

Dilemma del prigioniero/1

- Due pregiudicati, Minguccio e Savinuccio, sono arrestati perché sospettati di rapina.
- Sono interrogati separatamente, e il giudice fa ad ognuno una proposta: se confessa, se la caverà con una pena di 1 anno, ed il complice sconterà 10 anni.
- Se entrambi confessano, però, saranno condannati a 5 anni.
- Se invece nessuno confessa, saranno entrambi condannati a 2 anni.

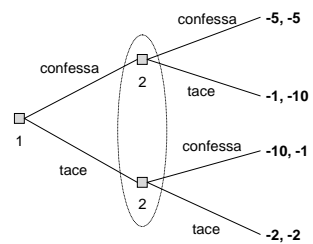
Dilemma del prigioniero/2

		Minguccio	
		Confesso	Non confesso
Savinuccio	Confesso	-5, -5	-10, -1
	Non confesso	-10, -5	-2, -2

Dilemma del prigioniero/3

- Sembrerebbe che convenga sempre confessare: se il complice non confessa, ce la caviamo con 1 anno; se confessa ne scontiamo 5.
- “Confesso” non è però una strategia dominante: 5 anni è meglio di 10 ma peggio di 2.
- Confesso/confesso è un equilibrio di Nash nei giochi non ripetuti.
- Nei giochi ripetuti, non confesso/non confesso è un equilibrio di Nash (omertà).

Gioco in forma estesa



INTERPRETAZIONI DELL'EQUILIBRIO DI NASH

- NB: è definito come un **profilo di strategie**, non come un prodotto cartesiano, come abbiamo visto nel caso precedente. Questo dipende dal fatto che stiamo considerando un concetto di **equilibrio**.
- Tre **INTERPRETAZIONI**:
 1. Equilibrio di Nash come soluzione eduttiva
 2. Equilibrio di Nash come punto di equilibrio di un processo dinamico (implicito)
 3. Equilibrio di Nash come equilibrio di aspettative razionali.